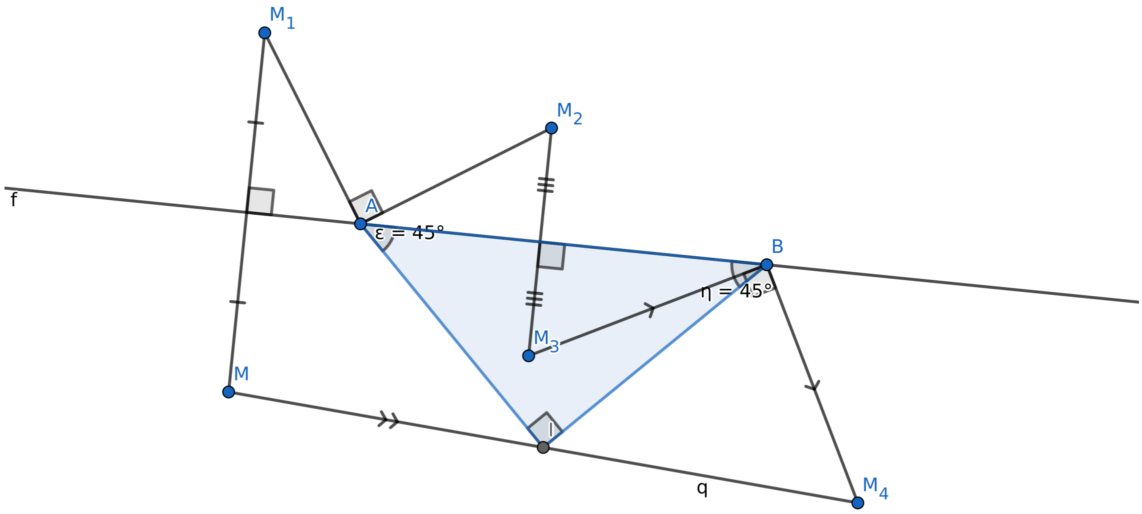
Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2019
Math 102 : Option de Géométrie

Corrigé du Devoir 1



Constructions et observations

On fixe deux points distincts A et B. On note s la réflexion d'axe la droite (AB). La rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est notée r_A^- et la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est notée r_B^+. Le but du devoir est l'étude de la transformation $\varphi := r_B^+ \circ s \circ r_A^- \circ s$.

(1) Placer des points A, B et M.

(2) Construire $M_1 := s(M)$, $M_2 := r_A^-(M_1)$, $M_3 := s(M_2)$, $M_4 := r_B^+(M_3)$.

(3) Faire apparaître sur la figure les propriétés caractérisant les points M_1, M_2, M_3, M_4 : matérialiser le fait que certains angles sont droits, certaines distances égales, etc.

(4) Activer la trace des points M et M_4. Déplacer le point M et observer comment se déplace le point M_4.

(5) Désactiver les traces de M et M_4. Construire le milieu I du segment $[MM_4]$. Que constatez-vous quand vous déplacez le point M ? Que cela suggère-t-il sur la nature de la transformation φ ?

> Le point I ne semble pas bouger quand on déplace M. Ceci suggère que le point I ne dépendrait pas du point M et vu que $\varphi(M) = M_4$, que φ serait la symétrie centrale de centre I.

(6) Tracer le triangle ABI. Quelles propriétés remarquables ce triangle semble-t-il avoir ? Vérifier si possible ces propriétés dans Geogebra ?

> Le triangle ABI semble être rectangle isocèle en I. On peut le vérifier par exemple en testant d'une part de $IB = IA$ et d'autre part que l'angle géométrique $\widehat{AIB}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

Devoir 1 : Démonstrations

On note r la distance AB.

(7) Expliquer pourquoi il existe un repère orthonormal du plan dans lequel l'affixe du point A soit 0 et celle de B soit r.

> On note $\vec{i}$ le vecteur $\frac{1}{r}\vec{AB}$: c'est un vecteur de longueur 1. On introduit l'unique vecteur $\vec{j}$ de longueur 1 tel que l'angle orienté $(\vec{i},\vec{j})$ soit égal à $\frac{\pi}{2}$. Le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal (et direct). Par construction, l'affixe de A est 0 et vu que $\vec{AB} = r\vec{i}$, l'affixe de B est r.

On fixe un tel repère jusque l'avant-dernière question.

(8) Déterminer l'expression complexe des transformations s, r_A^- et r_B^+.

> Comme la droite (AB) est l'axe des abscisses dans le repère choisi, l'expression complexe de s est $s(z) = \overline{z}$.
> De manière générale, si un point C est d'affixe c, la rotation de centre C et d'angle θ admet pour expression complexe $z \longmapsto c + e^{i\theta}(z-c)$.
> En particulier, on obtient que $r_A^-(z) = -iz$ et $r_B^+(z) = r + i(z-r) = iz + (1-i)r$.

(9) Soit M un point du plan d'affixe z. Exprimer en fonction de z les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 respectifs des points M_1, M_2, M_3, M_4 où $M_1 := s(M)$, $M_2 := r_A^-(M_1)$, $M_3 := s(M_2)$ et $M_4 := r_B^+(M_3)$.

> Comme $M_1 = s(M)$, on a $z_1 = \overline{z}$.
> $M_2 = r_A^+(M_1)$, donc $z_2 = -iz_1 = -i\overline{z}$.
> $M_3 = s(M_2)$, donc $z_3 = \overline{z_2} = \overline{(-i\overline{z})} = iz$.
> $M_4 = r_B^-(M_3)$, donc $z_4 = iz_3 + (1-i)r = -z + (1-i)r$.

(10) Quelle est l'expression complexe de la transformation φ ?

> Pour tout point M d'affixe z, $\varphi(M)$ est le point M_4 défini précédemment, donc l'affixe du point $\varphi(M)$ est le nombre complexe z_4. L'expression complexe de $\varphi(M)$ est $z \longmapsto -z + (1-i)r$.

(11) Montrer que φ est une symétrie centrale. Déterminer l'affixe c du centre C de la symétrie φ.

> On reconnaît que l'expression complexe de φ est de la forme $z \longmapsto -z + 2c$ avec $c := \frac{(1-i)r}{2}$. La transformation φ est donc la symétrie centrale de centre C d'affixe c.

(12) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$. En déduire que $BC = AC$ et déterminer l'angle orienté $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$.

> On a $a - c = (-\frac{1-i}{2})r = \frac{-1+i}{2} \cdot r$ et $b - c = (1 - \frac{1-i}{2})r = \frac{1+i}{2} \cdot r$, donc $\frac{a-c}{b-c} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i$. Si on note α l'angle orienté $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$, le calcul précédent montre que $\frac{a-c}{b-c} = \frac{AC}{BC}e^{i\alpha} = i$. En passant au module, on obtient $\frac{AC}{BC} = 1$, donc $AC = BC$. De l'identité $e^{i\alpha} = i$, on déduit que, modulo 2π, on a $\alpha = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$.

(13) Montrer que le point I milieu de $[MM_4]$ est égal à C. Déduire des résultats précédents que le triangle IAB est rectangle en I.

> On a $\varphi(M) = M_4$, or φ est la symétrie centrale de centre C, donc C est le centre du segment $[MM_4]$, d'où $C = I$. Les résultats de la question précédente montrent donc que le triangle ABI est rectangle (isocèle) en I.

(14) Dans cette question, on ne suppose plus que A et B ont pour affixes 0 et r. On suppose au contraire que l'on a fixé un autre repère et que les points A et B ont pour affixes respectifs 1 et $2+i$. Déterminer l'affixe du centre C de la symétrie φ dans ce repère.

> Notons ici a, b et c les affixes des points A, B et C dans ce repère quelconque. Le quotient $\frac{a-c}{b-c}$ est indépendant du repère (orthonormal direct), puisque ce nombre complexe est égal à $\frac{AC}{BC}e^{i\alpha}$ où $\alpha = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$.
> En général, on a donc $\frac{a-c}{b-c} = i$, d'où $(a-c) = i(b-c)$, puis $c = \frac{(a-ib)}{1-i}$.
> Avec $a = 1$ et $b = 2+i$, on obtient $c = 2$.