Université Paris-Sud — L1 MPI S1 2019

Faculté des Sciences d'Orsay — Math 102 : Option de Géométrie

Le TP 10 consiste en la deuxième interrogation WIMS et le début de la préparation de la figure Geogebra pour le deuxième devoir.

> La première partie *Constructions et observations* est commencée lors du TP du 26/27 novembre. Votre copie incluant vos observations lors de la première partie et des réponses rigoureuses à la seconde partie *Démonstrations* et à la troisième partie *Frise* devra être rendue en TD le **10/11 décembre 2019.** Votre figure Geogebra (fichier `.ggb`) devra être déposée avant cette date sur *ecampus* (Cours Math102, rubrique Devoirs, *Devoir 2* ; en cas de problème, envoyer un mail `joel.riou@math.u-psud.fr`). Attendez de préférence d'avoir bien compris l'ensemble du devoir avant de soumettre votre figure Geogebra.

Devoir 2

Le devoir est constitué de *trois* parties. Les deux premières concernent l'étude de polygones et la troisième consiste en l'étude d'une frise.

1. **Constructions et observations.** Au cours du TP 10 vous devez commencer à travailler sur cette partie qui consiste principalement à faire des constructions et *à faire des observations qui devront être décrites précisément sur votre copie.*

- Construire un triangle équilatéral direct ABC.
- On note O l'isobarycentre des points A, B et C.
- Construire les droites (OA), (OB) et (OC). On notera σ_1 la réflexion d'axe (OA), σ_2 celle d'axe (OB) et σ_3 la réflexion d'axe (OC).
- Placer un point arbitraire D. Construire $D' := \sigma_1(D)$, $E := \sigma_3(D')$, $E' := \sigma_2(E)$, $F := \sigma_1(E')$ et $F' := \sigma_3(F)$.

(1) Construire les triangles DEF et $D'E'F'$. Quelles propriétés semblent avoir ces deux triangles (indépendamment de la position du point D) ?

(2) Construire l'hexagone $\mathcal{H} := DD'EE'FF'$. Afficher les angles de l'hexagone $\mathcal{H}$. L'hexagone $\mathcal{H}$ est-il régulier en général ? Si ce n'est pas le cas, où semble-t-il que D doive se trouver pour que $\mathcal{H}$ soit un hexagone régulier direct ?

2. **Démonstrations.** On note $s := \sigma_1$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

(3) Exprimer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_1 \circ \sigma_3$ en fonction de r.

(4) En déduire une égalité $\sigma_2 = s \circ r^i$ pour un entier $i \in \{0, 1, 2\}$ bien choisi. Faire de même pour σ_3.

(5) Déterminer $(s \circ r) \circ (s \circ r)$. En déduire $r \circ s = s \circ r^{-1}$.

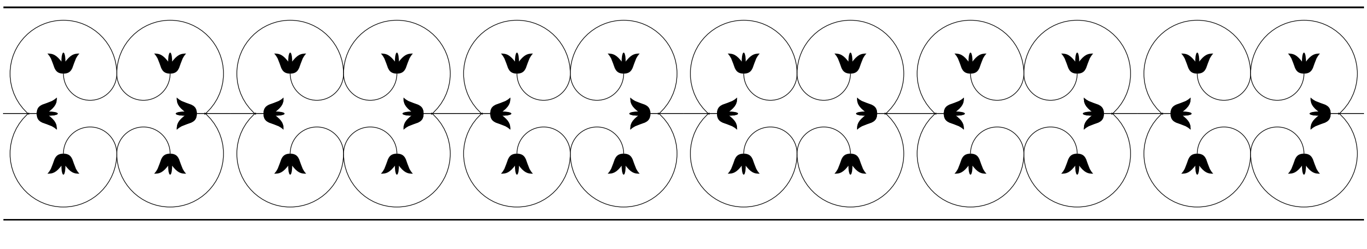
(6) Montrer les identités $r(D) = E$, $r(D') = E'$, $r(E) = F$ et $r(E') = F'$.

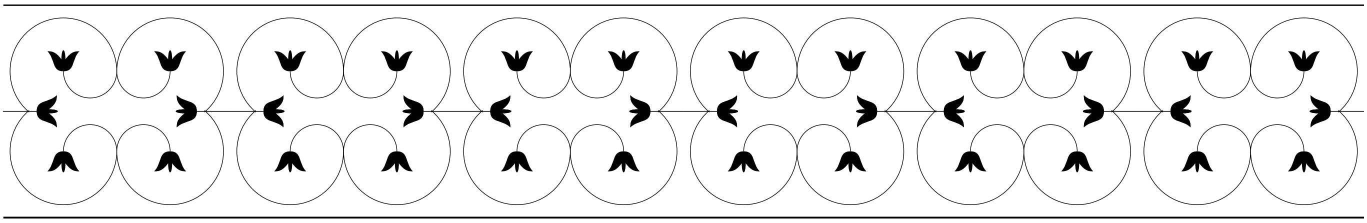
(7) En déduire que les triangles DEF et $D'E'F'$ sont équilatéraux (directs).

(8) Déterminer l'angle orienté $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD})$. En déduire que l'on a $(\overrightarrow{D'E}, \overrightarrow{D'D}) = \frac{2\pi}{3}$ ou $(\overrightarrow{D'E}, \overrightarrow{D'D}) = -\frac{\pi}{3}$.

(9) Dans cette question, on suppose que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{\pi}{6}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un hexagone régulier direct.

3. **Frise.** La frise $\mathscr{F}$ ci-dessous est inspirée des motifs ornant le Taj Mahal (تاج محل) à Agra en Inde. Après avoir fait les constructions suggérées dans les questions suivantes, découpez-la et collez-la dans votre devoir.





(10) Représenter un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise.
(11) La médiane $\mathscr{D}$ de la bande est-elle un axe de symétrie de $\mathscr{F}$?
(12) Tracer les axes de symétries de $\mathscr{F}$ qui sont perpendiculaires à $\mathscr{D}$. Si Δ est un tel axe de symétrie, quel est le plus petit réel $\lambda > 0$ tel que $t_{\lambda\vec{u}}(\Delta)$ soit aussi un axe de symétrie de $\mathscr{F}$?
(13) Soit Δ un axe de symétrie perpendiculaire à $\mathscr{D}$. Le point d'intersection O de $\mathscr{D}$ et Δ est-il un centre de symétrie de $\mathscr{F}$? Placer tous les centres de symétrie de $\mathscr{F}$.
(14) On note comme ci-dessus Δ un axe de symétrie perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et O le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$. Énumérer tous les isométries du plan conservant la frise $\mathscr{F}$.