Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2017/2018
Math 102 : Option de Géométrie

Corrigé de l'examen du 9 janvier 2018

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que s soit une similitude qui multiplie les distances par un facteur 2. Combien s possède-t-elle de points fixes ?

(a) Aucun ;
(b) Un ;
(c) Deux ;
(d) Une infinité.

> (b)

(2) Supposons que φ soit une symétrie glissée et ψ une réflexion. Alors $\psi \circ \varphi$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

> (a), (b).

Exercice I

On considère la transformation φ du plan complexe définie par $\varphi(z) = iz + 2$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. *(Note : Les deux dernières questions de l'exercice sont indépendantes des précédentes.)*

(1) La transformation φ est-elle une isométrie ? Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

> L'expression complexe est de la forme $z \longmapsto az + b$ avec $a = i$ qui est bien de module 1, donc φ est une isométrie (directe). Plus précisément, comme i est d'argument $\frac{\pi}{2}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Notons C le centre de la rotation. C'est l'unique point fixe de φ, son affixe c doit vérifier $c = ic + 2$, donc $c = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1 + i$.
> Finalement, φ est la rotation de centre C d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note $z_1 = \frac{3}{2}$ et on pose $z_2 = \varphi(z_1)$, $z_3 = \varphi(z_2)$ et $z_4 = \varphi(z_3)$. On note M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3 et z_4.

(2) Montrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un carré.

> Comme $z_1 \neq 1 + i$, $M_1 \neq C$. Par constrution, on a $M_2 = \varphi(M_1)$, $M_3 = \varphi^2(M_1)$ et $M_4 = \varphi^3(M_1)$. Comme φ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, on obtient que $M_1M_2M_3M_4$ est un polygone régulier direct (de centre C) à quatre côtés, donc $M_1M_2M_3M_4$ est un carré.

(3) Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $\varphi \circ \varphi$?

> D'après le résultat général décrivant le composé de deux rotations de même centre, on obtient que $\varphi \circ \varphi$ est la rotation de centre C (d'affixe $1 + i$) et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Autrement dit, $\varphi \circ \varphi$ est la symétrie centrale de centre C.

(4) Déterminer l'isobarycentre des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.

> D'après le cours, comme $M_1M_2M_3M_4$ est un polygone régulier de centre C, l'isobarycentre des sommets est C. (Alternativement, comme $M_3 = (\varphi \circ \varphi)(M_1)$ et que $\varphi \circ \varphi$ est la symétrie centrale de centre C, on obtient que le milieu du segment $[M_1M_3]$ est C. De même, C est le milieu de $[M_2M_4]$. D'après le théorème des barycentres partiels le barycentre des points M_1, M_2, M_3, M_4 tous affectés de la masse 1 est le barycentre de $(C, 2)$ et de $(C, 2)$, c'est-à-dire le point C.

(5) Calculer les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.

> $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = iz_1 + 2 = 2 + i\frac{3}{2}$, $z_3 = iz_2 + 2 = \frac{1}{2} + 2i$, $z_4 = iz_3 + i = i\frac{1}{2}$.

(6) Faire une figure. (Utilisez si possible le verso de la feuille additionnelle jointe à ce sujet.)

Exercice II

Soit deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ du plan. On note O le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que A, B, C sont des points distincts de $\mathscr{D}$ différents de O et que A', B', C' sont des points distincts de $\mathscr{D}'$ différents de O.

On fait l'hypothèse que (AB') et $(A'B)$ sont parallèles et que (BC') et $(B'C)$ sont parallèles.

Le but de l'exercice est de montrer que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

(1) Faire une figure. (Utilisez si possible le verso de la feuille additionnelle jointe à ce sujet.)

(2) Montrer qu'il existe une homothétie h telle que $h(A) = B$ et $h(B') = A'$.

> (Dans ce corrigé, on montre aussi l'unicité de h, qui n'était pas exigée.) Si une telle homothétie h existe, comme on doit avoir $h(A) = B$, le centre doit être sur la droite $(AB) = \mathscr{D}$. De même, comme $h(B') = A'$, le centre de l'homothétie doit être sur la droite $(A'B') = \mathscr{D}'$. Le centre de l'homothétie h est donc le point O.
>
> Il est évident qu'il existe une unique homothétie h de centre O telle que $h(A) = B$. Montrons qu'elle vérifie $h(B') = A'$. Le point $h(B')$ appartient à la droite $(OB') = \mathscr{D}'$. Par ailleurs, l'homothétie h envoie la droite (AB') sur une droite qui lui est parallèle et qui contient le point $h(A) = B$, c'est-à-dire la droite $(A'B)$. Le point $h(B')$ est donc le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et de $(A'B)$, c'est-à-dire A', donc $h(B') = A'$.
>
> (Il était possible de répondre assez directement en invoquant une forme du théorème de Thalès, mais il était important de préciser que le centre de l'homothétie était O.)

(3) Montrer qu'il existe une homothétie h' telle que $h'(B) = C$ et $h'(C') = B'$.

> L'argument est rigoureusement le même que dans la question précédente.

(Note : dans les deux questions précédentes, les homothéties construites sont uniques, mais on ne demande pas de le démontrer.)

(4) Déterminer $(h' \circ h)(A)$ et $(h \circ h')(C')$.

> Par construction, $(h' \circ h)(A) = h'(h(A)) = h'(B) = C$, et $(h \circ h')(C') = h(h'(C')) = h(B') = A'$.

(5) Montrer que les deux transformations $h \circ h'$ et $h' \circ h$ sont égales. Déterminer la nature de cette transformation $h'' := h \circ h' = h' \circ h$.

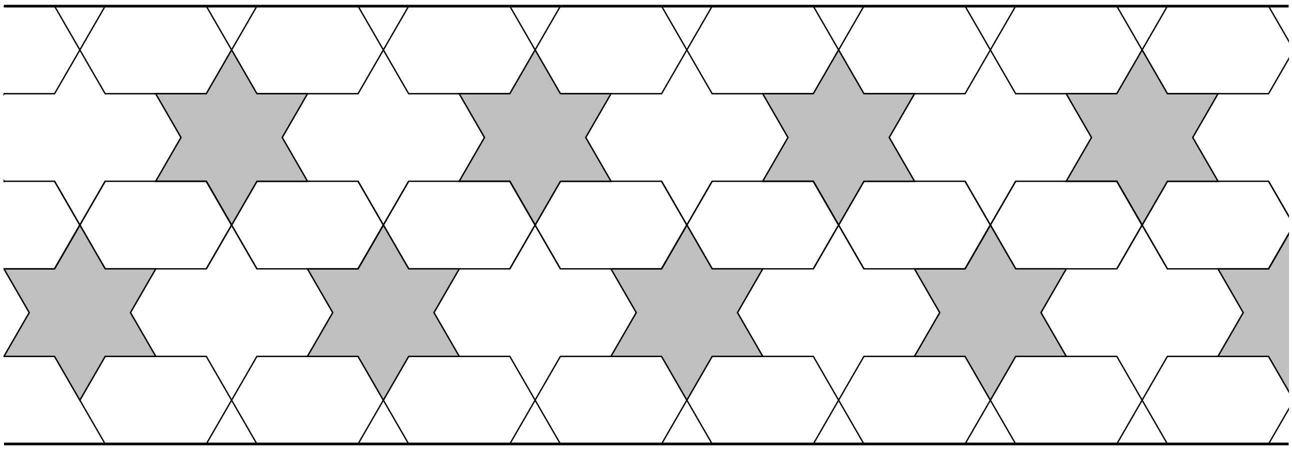
> Notons λ et λ' les rapports respectifs des homothéties h et h'. Comme h et h' sont deux homothéties de centre C, la transformation composée $h \circ h'$ est l'homothétie de centre C et de rapport $\lambda\lambda'$. Le même raisonnement donne que $h' \circ h$ est aussi l'homothétie de centre C et de rapport $\lambda\lambda'$. Les transformations $h \circ h'$ et $h' \circ h$ sont donc égales.

(6) Déduire des questions précédentes que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

> D'après les deux questions précédentes, on a $h''(A) = (h' \circ h)(A) = C$ et $h''(C') = (h \circ h')(C') = A'$. L'image de la droite (AC') par h'' est donc la droite $(A'C)$. Comme h'' est une homothétie, l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle, donc $(A'C)$ et (AC') sont parallèles.

Exercice III

On considère la frise suivante $\mathscr{F}$:



(Cette frise est inspirée d'une décoration murale en grès rouge à Fatehpur Sikri la capitale de l'empire moghol de 1571 à 1584, actuellement dans l'État d'Uttar Pradesh en Inde.)

Les constructions de cet exercice devront être réalisés sur la feuille ci-jointe qui reproduit la frise ci-dessus.

(1) Déterminez un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise. Tracez-le sur la figure.

> Note : Le vecteur $\vec{u}$ mesure environ 4 centimètres.

(2) Tracez les axes de symétrie qu'admet la frise. Notez-en un Δ. On notera σ_Δ la réflexion d'axe Δ dans la suite.

> Note : La distance entre deux axes de symétrie consécutifs est d'environ 2 centimètres.

(3) Placez sur la figure les centres de symétrie de la frise. Notez A le centre de symétrie qui se trouve à droite de Δ, le plus proche de Δ. On notera σ_A la symétrie centrale de centre A dans la suite.

(4) Quel est le plus petit nombre réel strictement positif λ tel que $t_{\lambda\vec{u}}(\Delta)$ soit un axe de symétrie de $\mathscr{F}$? ($t_{\lambda\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\lambda\vec{u}$.)

> $\lambda = \frac{1}{2}$.

(5) Sur la figure, placez le point O, point d'intersection de Δ avec la médiane de la frise. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$.

> Le centre de symétrie A est équidistant des deux axes de symétrie les plus proches. On a $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{4}\vec{u}$.

(6) On note $\varphi := \sigma_A \circ \sigma_\Delta$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie φ.

> Notons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les deux droites horizontales délimitant la bande $\mathscr{B}$ dans laquelle se trouve la frise $\mathscr{F}$. La réflexion σ_Δ préserve chacune des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, mais σ_A les échange. On en déduit que le composé φ échange les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Par ailleurs, comme composé d'un antidéplacement et d'un déplacement, φ est un antidéplacement. φ est un antidéplacement qui échange $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. D'après la classification des isométries préservant globalement la bande $\mathscr{B}$, on en déduit que si on note $\mathscr{D}$ la médiane de la bande $\mathscr{B}$ (c'est-à-dire $\mathscr{D} = (OA)$), alors φ est de la forme $\sigma_{\mathscr{D}} \circ t_{\mu\vec{u}} = t_{\mu\vec{u}} \circ \sigma_{\mathscr{D}}$ pour un certain $\mu \in \mathbf{R}$: si $\mu = 0$, φ est la réflexion d'axe $\mathscr{D}$, sinon φ sera une symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$. Le calcul montre que $\varphi(O) = B$ où B est le symétrique de O par rapport à A, c'est-à-dire que $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{u}$. Ainsi, φ est la symetrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.
>
> (Alternativement, le calcul du vecteur $\vec{OA}$ donne l'égalité $\sigma_A = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ \sigma_O$, puis $\varphi = \sigma_A \circ \sigma_\Delta = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ (\sigma_O \circ \sigma_\Delta)$. On a bien sûr $\sigma_O \circ \sigma_\Delta = \sigma_{\mathscr{D}}$, où $\mathscr{D}$ est la perpendiculaire à Δ passant par O, c'est-à-dire la médiane de la bande $\mathscr{B}$. Finalement, $\varphi = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ \sigma_{\mathscr{D}}$, donc φ est la symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.)

(7) Faites l'inventaire de tous les éléments du groupe $G(\mathscr{F})$, c'est-à-dire de l'ensemble des isométries conservant la frise $\mathscr{F}$.

Compte tenu des observations précédentes et des résultats du cours, il existe quatre type d'éléments dans $G(\mathscr{F})$:

- les translations de vecteur $k\vec{u}$ pour $k \in \mathbf{Z}$;
- les réflexions par rapport aux droites Δ_k pour tout $k \in \mathbf{Z}$ où Δ_k est la droite obtenue en translatant Δ par le vecteur $\frac{k}{2}\vec{u}$;
- les symétries centrales de centre A_k pour tout $k \in \mathbf{Z}$ où A_k est défini par $\overrightarrow{AA_k} = \frac{k}{2}\vec{u}$;
- les symétries glissées d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $(k + \frac{1}{2})\vec{u}$ pour $k \in \mathbf{Z}$.