Université Paris-Sud | L1 MPI S1 2017/2018
Faculté des Sciences d'Orsay | Math 102 : Option de Géométrie

Examen du 9 janvier 2018
Durée : deux heures

(Calculatrice et documents interdits.)

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que s soit une similitude qui multiplie les distances par un facteur 2. Combien s possède-t-elle de points fixes ?

(a) Aucun ;
(b) Un ;
(c) Deux ;
(d) Une infinité.

(2) Supposons que φ soit une symétrie glissée et ψ une réflexion. Alors $\psi \circ \varphi$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

Exercice I

On considère la transformation φ du plan complexe définie par $\varphi(z) = iz + 2$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

(Note : Les deux dernières questions de l'exercice sont indépendantes des précédentes.)

(1) La transformation φ est-elle une isométrie ? Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

On note $z_1 = \frac{3}{2}$ et on pose $z_2 = \varphi(z_1)$, $z_3 = \varphi(z_2)$ et $z_4 = \varphi(z_3)$. On note M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3 et z_4.

(2) Montrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un carré.
(3) Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $\varphi \circ \varphi$?
(4) Déterminer l'isobarycentre des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4.
(5) Calculer les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4.
(6) Faire une figure. (Utilisez si possible le verso de la feuille additionnelle jointe à ce sujet.)

Exercice II

Soit deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ du plan. On note O le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que A, B, C sont des points distincts de $\mathscr{D}$ différents de O et que A', B', C' sont des points distincts de $\mathscr{D}'$ différents de O.

On fait l'hypothèse que (AB') et $(A'B)$ sont parallèles et que (BC') et $(B'C)$ sont parallèles.

Le but de l'exercice est de montrer que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

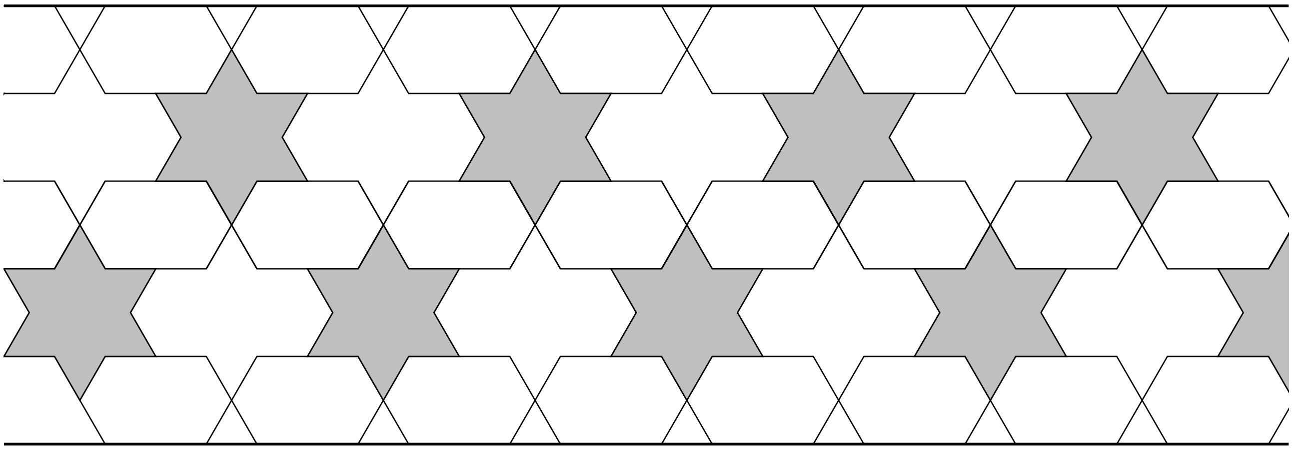
(1) Faire une figure. (Utilisez si possible le verso de la feuille additionnelle jointe à ce sujet.)
(2) Montrer qu'il existe une homothétie h telle que $h(A) = B$ et $h(B') = A'$.
(3) Montrer qu'il existe une homothétie h' telle que $h'(B) = C$ et $h'(C') = B'$.

(Note : dans les deux questions précédentes, les homothéties construites sont uniques, mais on ne demande pas de le démontrer.)

(4) Déterminer $(h' \circ h)(A)$ et $(h \circ h')(C')$.
(5) Montrer que les deux transformations $h \circ h'$ et $h' \circ h$ sont égales. Déterminer la nature de cette transformation $h'' := h \circ h' = h' \circ h$.
(6) Déduire des questions précédentes que (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Exercice III

On considère la frise suivante $\mathscr{F}$:



(Cette frise est inspirée d'une décoration murale en grès rouge à Fatehpur Sikri la capitale de l'empire moghol de 1571 à 1584, actuellement dans l'État d'Uttar Pradesh en Inde.)

Les constructions de cet exercice devront être réalisés sur la feuille ci-jointe qui reproduit la frise ci-dessus.

(1) Déterminez un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise. Tracez-le sur la figure.

(2) Tracez les axes de symétrie qu'admet la frise. Notez-en un Δ. On notera σ_Δ la réflexion d'axe Δ dans la suite.

(3) Placez sur la figure les centres de symétrie de la frise. Notez A le centre de symétrie qui se trouve à droite de Δ, le plus proche de Δ. On notera σ_A la symétrie centrale de centre A dans la suite.

(4) Quel est le plus petit nombre réel strictement positif λ tel que $t_{\lambda\vec{u}}(\Delta)$ soit un axe de symétrie de $\mathscr{F}$? ($t_{\lambda\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\lambda\vec{u}$.)

(5) Sur la figure, placez le point O, point d'intersection de Δ avec la médiane de la frise. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction du vecteur $\vec{u}$.

(6) On note $\varphi := \sigma_A \circ \sigma_\Delta$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie φ.

(7) Faites l'inventaire de tous les éléments du groupe $G(\mathscr{F})$, c'est-à-dire de l'ensemble des isométries conservant la frise $\mathscr{F}$.