Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2018
Math 102 : Option de Géométrie

Corrigé de l'examen du 10 janvier 2019

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Soit h une homothétie de rapport 2 et φ une isométrie. On note $\psi := h \circ \varphi$. Combien de points fixes ψ peut-elle avoir ?

(a) Aucun ;
(b) Un ;
(c) Deux ;
(d) Une infinité.

> (b).

(2) Supposons que φ soit une isométrie indirecte. On suppose que φ possède au moins un point fixe. Quelle peut être la nature de φ ?

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

> (c).

Exercice I

On considère un triangle quelconque ABC. On suppose que A' est un point de la droite (BC) différent de B et C, que B' est un point de la droite (AC) différent de A et C et que C' est un point de la droite (AB) différent de A et B.

On note $h_{A'}$ l'homothétie de centre A' telle que $h_{A'}(B) = C$, $h_{B'}$ l'homothétie de centre B' telle que $h_{B'}(C) = A$ et $h_{C'}$ l'homothétie de centre C' telle que $h_{C'}(A) = B$.

On note α, β, γ les rapports respectifs des homothéties $h_{A'}$, $h_{B'}$, $h_{C'}$.

(1) Montrer que l'on a les égalités $|\alpha| = \frac{A'C}{A'B}$, $|\beta| = \frac{B'A}{B'C}$, $|\gamma| = \frac{C'B}{C'A}$.

> $h_{A'}$ est une homothétie de rapport α, donc il s'agit d'une similitude de facteur $|\alpha|$. Comme $h_{A'}(A') = A'$ et $h_{A'}(B) = C$, on en déduit que $A'C = |\alpha|\, A'B$, donc $|\alpha| = \frac{A'C}{A'B}$. Les autres égalités se démontrent exactement de la même façon.

(Plus précisément, en introduisant des mesures algébriques (c'est-à-dire avec d'éventuels signes) des segments, on pourrait écrire plus précisément $\alpha = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$, etc, mais il n'est pas nécessaire de le faire ici.)

On considère la transformée composée $\varphi := h_{B'} \circ h_{A'} \circ h_{C'}$.

(2) Montrer que $\varphi(A) = A$.

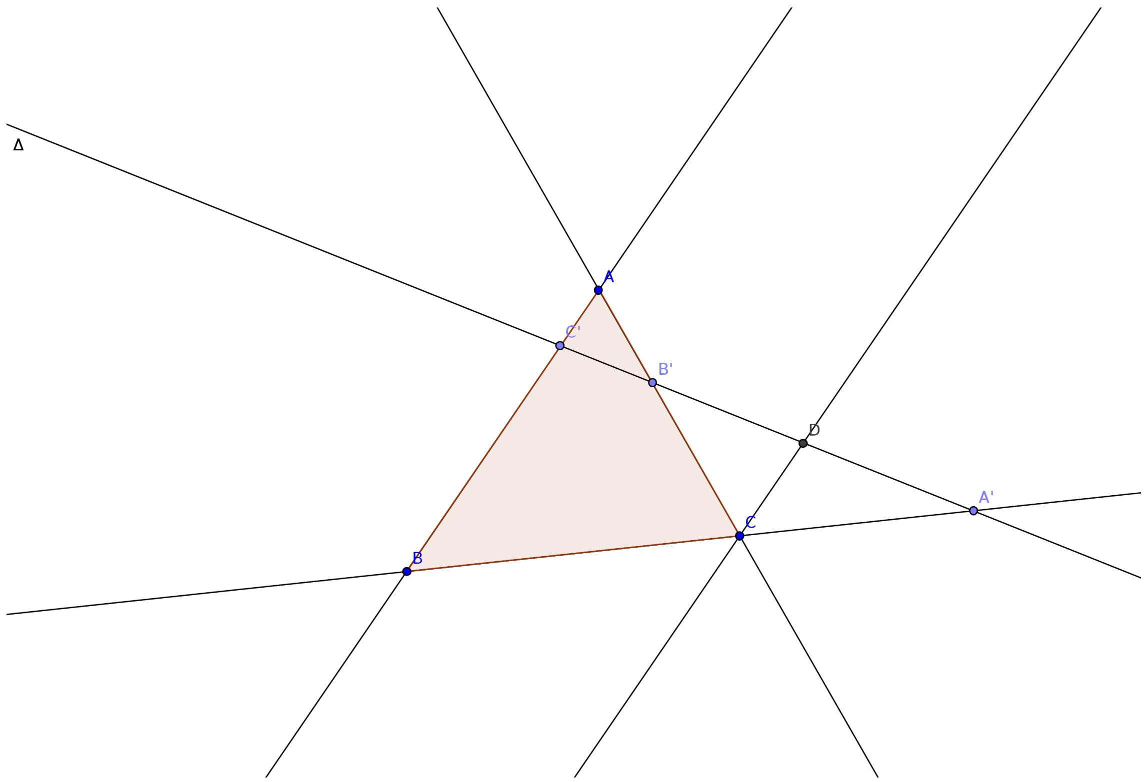
On a $\varphi(A) = h_{B'}(h_{A'}(h_{C'}(A))) = h_{B'}(h_{A'}(B)) = h_{B'}(C) = A$.

(3) Montrer que φ est l'homothétie de centre A et de rapport $\alpha\beta\gamma$.

L'ensemble des homothéties-ou-translations est stable par composition, donc φ est une translation ou une homothétie. On sait plus précisément que son expression complexe dans un repère sera de la forme $z \longmapsto \alpha\beta\gamma z + b$ avec $b \in \mathbf{C}$. Si $\alpha\beta\gamma \neq 1$, on reconnaît l'expression complexe d'une homothétie de rapport $\alpha\beta\gamma$ dont le centre est A puisque A est fixé par φ. Si $\alpha\beta\gamma = 1$, φ est une translation qui possède A comme point-fixe, donc est l'identité, et il est admissible de dire qu'il s'agit aussi de l'homothétie de centre A et de rapport 1.

À partir de maintenant et jusqu'à la question (6) incluse, on fait l'hypothèse supplémentaire que A', B' et C' sont alignés. On note Δ la droite passant par A', B' et C'.

(4) Faire une figure sur laquelle on construira également D le point d'intersection de Δ avec la parallèle à (AB) passant par C.



(5) Montrer que $h_{A'}(C') = D$, puis que $\varphi(C') = C'$.

Comme Δ contient A' et C', le point $h_{A'}(C')$ appartient à Δ. C' appartient à la droite (AB) dont l'image par $h_{A'}$ est la droite parallèle à (AB) passant par $C = h_{A'}(B)$. On en déduit que $D = h_{A'}(C')$. De même, $h_{B'}(D) \in \Delta \cap (AB) = \{C'\}$, donc $h_{B'}(D) = C'$. Finalement, comme $h_{C'}(C')$, on en déduit aussitôt que $\varphi(C') = h_{B'}(h'_A(C')) = h_{B'}(D) = C'$.

(6) Montrer que φ est l'identité et que $\alpha\beta\gamma = 1$.

L'homothétie φ admet A et C' comme points fixes. Comme ce sont deux points distincts, le rapport $\alpha\beta\gamma$ de cette homothétie est égal à 1 et φ est l'identité.

À partir de maintenant et jusqu'à la question (8) incluse, on fait réciproquement l'hypothèse que $\alpha\beta\gamma = 1$.

(7) Montrer que $\psi := h_{A'} \circ h_{C'}$ est une homothétie de centre B'.

D'après la question (3), comme $\alpha\beta\gamma = 1$, il vient que φ est l'identité, ce qui revient à écrire $h_{B'} \circ \psi = \mathrm{Id}$, donc ψ est l'inverse de l'homothétie $h_{B'}$. Par conséquent, ψ est aussi une homothétie de centre B'.

(8) Expliquer pourquoi la droite $(A'C')$ est stable par ψ et la raison pour laquelle on peut en déduire que $B' \in (A'C')$.

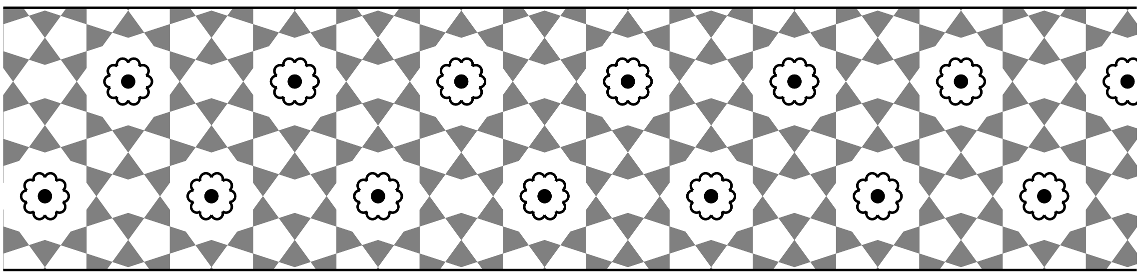
La droite $(A'C')$ contient les centres A' et C' des homothéties $h_{A'}$ et $h_{C'}$, elle est donc stable par ces deux homothéties, donc par leur composée ψ. On sait que ψ est une homothétie de centre B', et comme il s'agit de l'inverse de $h_{B'}$ qui n'est pas identité, ψ est une homothétie de centre B' et de rapport $\neq 1$, donc les droites invariantes par ψ passent par B' : en effet, soit M un point de $(A'C')$ qui soit différent de B', on a $\psi(M) \neq M$, et M et $\psi(M)$ appartiennent tous les deux à droite $(A'C')$, par ailleurs $B' \in (M\psi(M)) = (A'C')$.

(9) Déduire de tout ce qui précède que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si on a $\alpha\beta\gamma = 1$ (autrement dit si $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$).

Dans les questions précédentes, on a d'abord montré que A', B', C' alignés impliquait $\alpha\beta\gamma = 1$ puis que la réciproque était vraie, donc les deux conditions sont bien équivalentes.

Exercice II

On considère la frise suivante $\mathscr{F}$:



(Cette frise apparaît sur le portique en grès rouge d'Itimad-ud-Daulah (« Baby Taj ») à Agra, dans l'État d'Uttar Pradesh en Inde.)

Les constructions de cet exercice devront être réalisés sur la feuille ci-jointe qui reproduit la frise ci-dessus.

(1) Déterminez un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise. Tracez-le sur la figure.

Note : Le vecteur $\vec{u}$ mesure environ x centimètres.

(2) Tracez les axes de symétrie qu'admet la frise. Notez-en un Δ. On notera σ_Δ la réflexion d'axe Δ dans la suite.

(3) Quel est le plus petit réel $\alpha > 0$ tel que la droite Δ' translatée de Δ par le vecteur $\alpha\vec{u}$ soit aussi un axe de symétrie de la frise ?

D'après le cours, et de façon cohérente avec ce que l'on observe sur la figure, on a $\alpha = \frac{1}{2}$.

(4) Tracer la médiane $\mathscr{D}$ de la frise. Construire le point d'intersection O de Δ et de $\mathscr{D}$. Le point O est-il un centre de symétrie de la frise ?

Le point O n'est pas un centre de symétrie de la frise.

(5) Placer sur la figure le centre de symétrie A de la frise placé immédiatement à droite de O. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $\vec{u}$.

Le point A est équidistant de Δ et Δ'. On a $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{4}\vec{u}$.

On note σ_A la symétrie centrale de centre A et on pose $\varphi := \sigma_A \circ \sigma_\Delta$.

(6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Comme les droites Δ et $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires en O, on sait que $\sigma_{\mathscr{D}} \circ \sigma_\Delta = \sigma_O$, puis que $\sigma_O \circ \sigma_\Delta = \sigma_{\mathscr{D}}$. Par ailleurs, d'après les résultats sur les compositions de symétries centrales, on a $\sigma_A = t_{2\overrightarrow{OA}} \circ \sigma_O = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}\sigma_O$. Finalement, $\varphi = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ \sigma_O \circ \sigma_\Delta = t_{\frac{1}{2}\vec{u}} \circ \sigma_{\mathscr{D}}$. Comme $\frac{1}{2}\vec{u}$ dirige la droite $\mathscr{D}$, on en déduit que φ est la symétrie glissée d'axe $\mathscr{D}$ et de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

(7) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi \circ \varphi$.

D'après la question précédente et les résultats généraux sur les symétries glissée, on obtient que $\varphi \circ \varphi$ est la translation de vecteur $2\frac{1}{2}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.