Partiel du 10 janvier 2019
Durée : deux heures

(Documents et calculatrices interdits)

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Soit h une homothétie de rapport 2 et φ une isométrie. On note $\psi := h \circ \varphi$. Combien de points fixes ψ peut-elle avoir ?

(a) Aucun ;

(b) Un ;

(c) Deux ;

(d) Une infinité.

(2) Supposons que φ soit une isométrie indirecte. On suppose que φ possède au moins un point fixe. Quelle peut être la nature de φ ?

(a) Une translation ;

(b) Une rotation ;

(c) Une réflexion ;

(d) Une symétrie glissée.

Exercice I

On considère un triangle quelconque ABC. On suppose que A' est un point de la droite (BC) différent de B et C, que B' est un point de la droite (AC) différent de A et C et que C' est un point de la droite (AB) différent de A et B.

On note $h_{A'}$ l'homothétie de centre A' telle que $h_{A'}(B) = C$, $h_{B'}$ l'homothétie de centre B' telle que $h_{B'}(C) = A$ et $h_{C'}$ l'homothétie de centre C' telle que $h_{C'}(A) = B$.

On note α, β, γ les rapports respectifs des homothéties $h_{A'}$, $h_{B'}$, $h_{C'}$.

(1) Montrer que l'on a les égalités $|\alpha| = \frac{A'C}{A'B}$, $|\beta| = \frac{B'A}{B'C}$, $|\gamma| = \frac{C'B}{C'A}$.

(Plus précisément, en introduisant des mesures algébriques (c'est-à-dire avec d'éventuels signes) des segments, on pourrait écrire plus précisément $\alpha = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$, etc, mais il n'est pas nécessaire de le faire ici.)

On considère la transformée composée $\varphi := h_{B'} \circ h_{A'} \circ h_{C'}$.

(2) Montrer que $\varphi(A) = A$.

(3) Montrer que φ est l'homothétie de centre A et de rapport $\alpha\beta\gamma$.

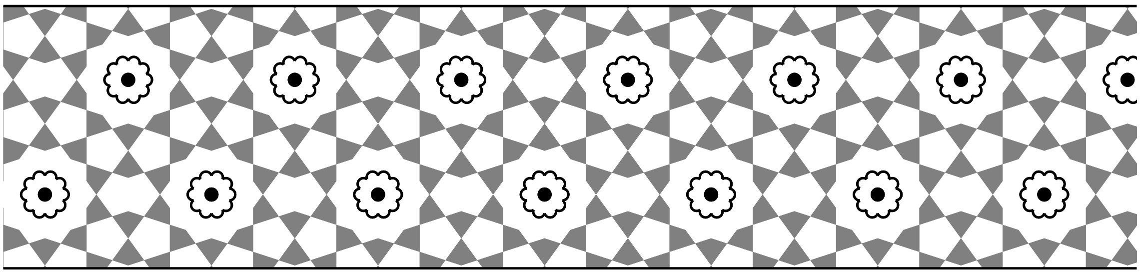
À partir de maintenant et jusqu'à la question (6) incluse, on fait l'hypothèse supplémentaire que A', B' et C' sont alignés. On note Δ la droite passant par A', B' et C'.
(4) Faire une figure sur laquelle on construira également D le point d'intersection de Δ avec la parallèle à (AB) passant par C.
(5) Montrer que $h_{A'}(C') = D$, puis que $\varphi(C') = C'$.
(6) Montrer que φ est l'identité et que $\alpha\beta\gamma = 1$.

À partir de maintenant et jusqu'à la question (8) incluse, on fait réciproquement l'hypothèse que $\alpha\beta\gamma = 1$.
(7) Montrer que $\psi := h_{A'} \circ h_{C'}$ est une homothétie de centre B'.
(8) Expliquer pourquoi la droite $(A'C')$ est stable par ψ et la raison pour laquelle on peut en déduire que $B' \in (A'C')$.

(9) Déduire de tout ce qui précède que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si on a $\alpha\beta\gamma = 1$ (autrement dit si $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1$).

Exercice II

On considère la frise suivante $\mathscr{F}$:



(Cette frise apparaît sur le portique en grès rouge d'Itimad-ud-Daulah (« Baby Taj ») à Agra, dans l'État d'Uttar Pradesh en Inde.)

Les constructions de cet exercice devront être réalisés sur la feuille ci-jointe qui reproduit la frise ci-dessus.

(1) Déterminez un vecteur minimal $\vec{u}$ de cette frise. Tracez-le sur la figure.
(2) Tracez les axes de symétrie qu'admet la frise. Notez-en un Δ. On notera σ_Δ la réflexion d'axe Δ dans la suite.
(3) Quel est le plus petit réel $\alpha > 0$ tel que la droite Δ' translatée de Δ par le vecteur $\alpha\vec{u}$ soit aussi un axe de symétrie de la frise ?
(4) Tracer la médiane $\mathscr{D}$ de la frise. Construire le point d'intersection O de Δ et de $\mathscr{D}$. Le point O est-il un centre de symétrie de la frise ?
(5) Placer sur la figure le centre de symétrie A de la frise placé immédiatement à droite de O. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $\vec{u}$.

On note σ_A la symétrie centrale de centre A et on pose $\varphi := \sigma_A \circ \sigma_\Delta$.
(6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.
(7) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\varphi \circ \varphi$.