Corrigé du partiel du 20 novembre 2017

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que r et r' soient deux rotations d'angles respectifs α et α'. On suppose que $\alpha+\alpha'$ n'est pas de la forme $2k\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Alors, $r' \circ r$ est :

(a) Une translation ;

(b) Une rotation ;

(c) Une réflexion ;

(d) Une symétrie glissée.

> (b)

(2) Supposons que t soit une translation et s une réflexion. Alors $t \circ s$ peut être :

(a) Une translation ;

(b) Une rotation ;

(c) Une réflexion ;

(d) Une symétrie glissée.

> (c), (d).

Exercice

On considère la transformation φ du plan complexe définie par $\varphi(z) = \left(\frac{3+4i}{5}\right)\overline{z} + \frac{2-4i}{5}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

(1) Justifier brièvement que φ est une isométrie. Est-ce un déplacement ou un antidéplacement ?

> Notons $a := \frac{3+4i}{5}$. On a $|a| = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{5} = 1$. En posant $b := \frac{2-4i}{5}$, on obtient que l'expression complexe de φ est $z \longmapsto a\overline{z} + b$ avec a de module 1. On en déduit donc que φ est une isométrie, et plus précisément un antidéplacement.

(2) Calculer $\varphi(1)$. Que peut-on en déduire sur la nature de l'isométrie φ ?

> On obtient $\varphi(1) = 1$. Le point du plan d'affine 1 est donc un point fixe de l'isométrie φ. En tant qu'antidéplacement, φ peut *a priori* être une réflexion ou une symétrie glissée. Comme une symétrie glissée ne possède pas de point fixe, on en déduit que φ est une réflexion. (On peut aussi noter que l'axe de la réflexion φ passe par le point d'affixe 1.)

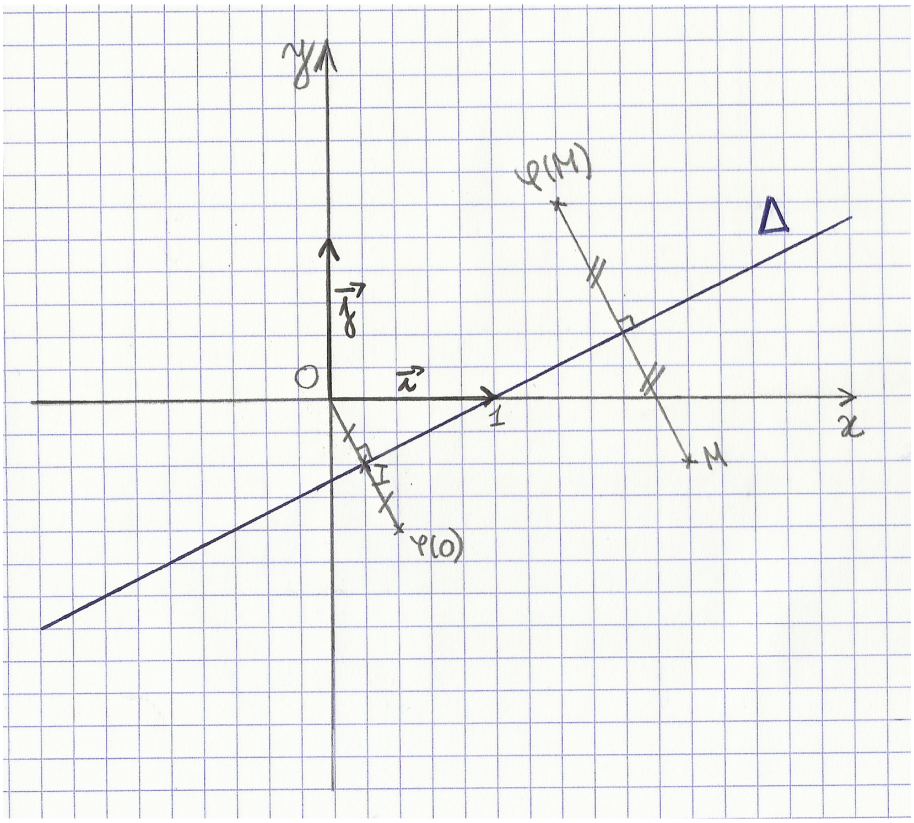
(3) Notons O l'origine du repère. Calculer l'affixe du milieu I du segment $[O\varphi(O)]$.

> $\varphi(0) = \frac{2-4i}{5}$, le point I est d'affixe $\frac{0+\varphi(0)}{2} = \frac{1-2i}{5}$.

(4) Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie φ.

> Notons Δ l'axe de réflexion φ. D'après les questions précédentes, Δ contient le point d'affixe 1 et aussi le point I d'affixe $\frac{1-2i}{5}$, ce qui permet de construire la droite Δ. (La figure ci-dessous peut suggérer que le point d'affixe $-\frac{i}{2}$ appartiennent à Δ, ce qui est confirmé par le calcul : $\varphi(-\frac{i}{2}) = -\frac{i}{2}$.)

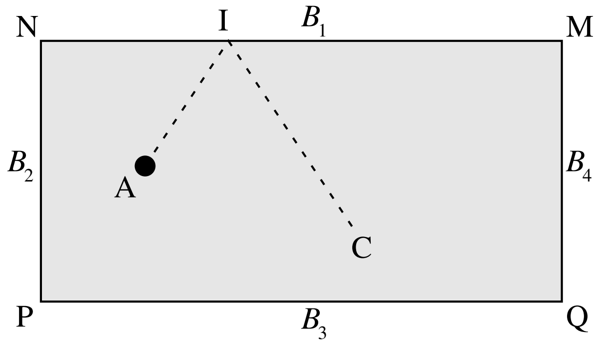
(5) Faire une figure sur laquelle on placera aussi un point arbitraire M et son image $\varphi(M)$.



Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à la trajectoire d'une bille qui rebondit sur les bandes d'un billard rectangulaire. On dispose ainsi d'un rectangle MNPQ. Les segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$ sont respectivement les bandes du haut, de gauche, du bas et de droite. On notera B_1, B_2, B_3, B_4 les droites prolongeant ces segments. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note s_i la réflexion d'axe la droite B_i.

Dans cette modélisation, on néglige le rayon de la boule qui constitue la bille : on considérera que la bille est un point. Tant que la bille reste à l'intérieur du rectangle, sa trajectoire est rectiligne. Quand la bille atteint une bande, elle rebondit comme sur la figure ci-contre. Sur cette figure, la bille est initialement placée en un point A et son mouvement suit la ligne en pointillés : elle frappe la bande du haut (B_1) en le point I et elle rebondit. La trajectoire après l'impact au point I est déterminée par l'égalité d'angles orientés $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IA})$.



(1) *(Rebond sur B_1.)* Dans cette question, comme sur la figure précédente, on suppose que la bille se déplace du point A au point C en rebondissant en I sur la bande du haut. Notons $\mathcal{D}$ la droite (AI) et $\mathcal{D}'$ la droite (IC).

(1a) Déterminer une isométrie φ telle que $\mathcal{D}' = \varphi(\mathcal{D})$. (L'isométrie φ ne doit pas dépendre des points A, I et C : elle doit pouvoir s'appliquer à tous les rebonds sur la bande du haut.)

On peut poser $\varphi := s_1$ (la réflexion d'axe la droite B_1). En effet, si on note $A' := s_1(A)$, la réflexion s_1 change le signe des angles orientés, donc $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IN}) = -(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IN}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IM})$, donc $(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) = \pi$. On en déduit que A' appartient à la droite (IC). Comme $\mathcal{D} = (AI)$, la droite $\varphi(\mathcal{D})$ est la droite passant par $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(I) = I$: ces deux points appartenant à $(IC) = \mathcal{D}'$, on a établi que $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

(1b) Montrer que $M := \varphi^{-1}(C)$ appartient à $\mathcal{D}$.

Vu que $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, on a aussi $\varphi^{-1}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$. Comme $C \in \mathcal{D}'$, on obtient que $\varphi^{-1}(C) \in \mathcal{D}$.

(1c) Dans une situation de jeu de billard, si la bille est initialement placée au point A et que le joueur veut que la bille atteigne le point C après avoir rebondi sur la bande du haut, quel « point virtuel » le joueur doit-il viser ? (Autrement dit, comment construire la figure précédente si on ne connaît que les points A et C.)

En visant le point $\varphi^{-1}(C)$ depuis le point A, le joueur impose que la trajectoire avant l'impact soit contenue dans la droite passant par A et $\varphi^{-1}(C)$, c'est-à-dire la droite $\mathcal{D}$, ce qui est ce que l'on souhaite faire. (En d'autres termes, en construisant le point $\varphi^{-1}(C)$, qui est ici $s_1(C)$, le symétrique de C par rapport à la droite B_1, on peut tracer la droite $\mathcal{D}$ passant par A et $\varphi^{-1}(C)$, et noter I le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et B_1.)

(2) *(Rebond sur $\mathcal{B}_1$, puis sur $\mathcal{B}_2$.)* On suppose maintenant que la bille part d'un point A, rebondit sur la bande du haut en un point I, puis qu'elle rebondit sur la bande de gauche en un point J et atteint un point C. On note $\mathcal{D} := (AI)$, $\mathcal{D}' := (IJ)$, $\mathcal{D}'' := (JC)$.

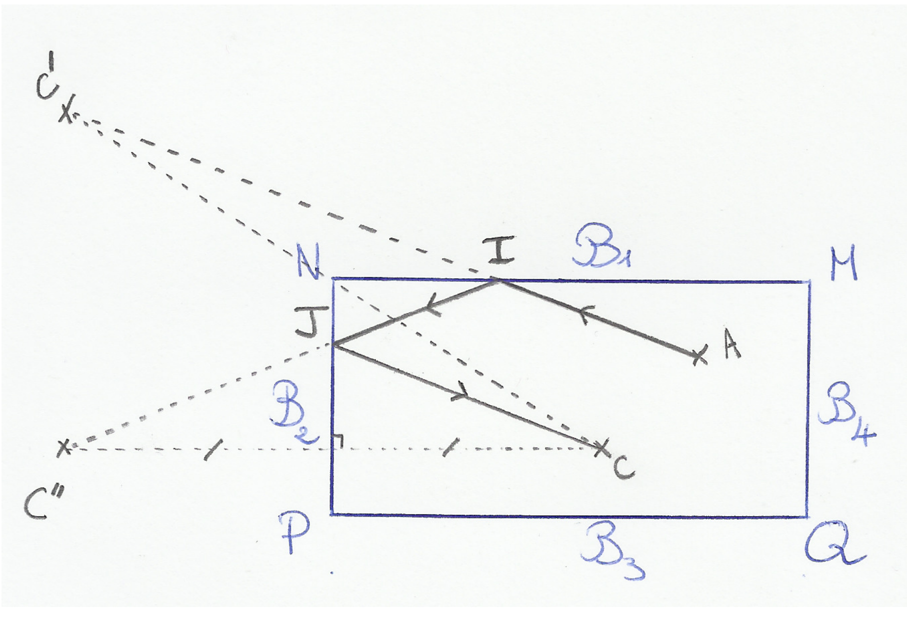
(2a) Déterminer des isométries φ et ψ telles que $\mathcal{D}' = \varphi(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'' = \psi(\mathcal{D}')$.

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on peut poser $\varphi := s_1$ et $\psi := s_2$.

(2b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie composée $\alpha := \psi \circ \varphi$.

L'isométrie composée $\alpha := s_2 \circ s_1$ est un composé de deux réflexions d'axes perpendiculaires. On sait alors que α est la symétrie centrale de centre le point d'intersection des deux axes de réflexion. Ainsi, α est la symétrie centrale de centre N.

(2c) Faire une figure sur laquelle vous placerez aussi le point $C' := \alpha^{-1}(C)$ et tracerez la droite (AC').

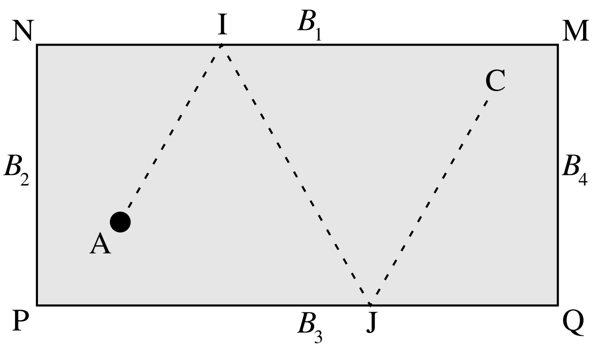


Note : Pour déterminer la position du point J, on a aussi construit le point $C'' \in \mathcal{D}'$ symétrique de C par rapport à $\mathcal{B}_2$.

(2d) Si le joueur de billard veut que la bille initialement placée en A atteigne le point C après des rebonds sur les bandes du haut puis de gauche, est-ce une bonne stratégie de viser le point C' ?

Par construction, $\alpha(\mathcal{D}) = \psi(\varphi(\mathcal{D})) = \psi(\mathcal{D}') = \mathcal{D}''$. Comme $C \in \mathcal{D}''$, on en déduit que $C' := \alpha^{-1}(C) \in \mathcal{D}$ (bien sûr, $\alpha^{-1} = \alpha$ ici). En visant le point C' depuis le point A, la trajectoire de le bille commencera bien par un segment contenu dans la droite $\mathcal{D}$, et par construction, après les deux rebonds, la bille pourra atteindre le point C.

(3) *(Rebond sur $\mathcal{B}_1$, puis sur $\mathcal{B}_3$.)* On suppose désormais que la bille part d'un point A, rebondit sur la bande du haut en un point I, puis qu'elle rebondit sur la bande du bas en un point J et atteint un point C. On note $\mathcal{D} := (AI)$, $\mathcal{D}' := (IJ)$, $\mathcal{D}'' := (JC)$.



(3a) Construire une isométrie β telle que $\beta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}''$. (Comme précédemment, β ne doit dépendre que des bandes et pas des points A, I, J et C donnant la position de la bille à divers instants.)

Comme précédemment, on peut poser $\beta := s_3 \circ s_1$, puisqu'alors $\beta(\mathcal{D}) = s_3(s_1(\mathcal{D})) = s_3(\mathcal{D}') = \mathcal{D}''$.

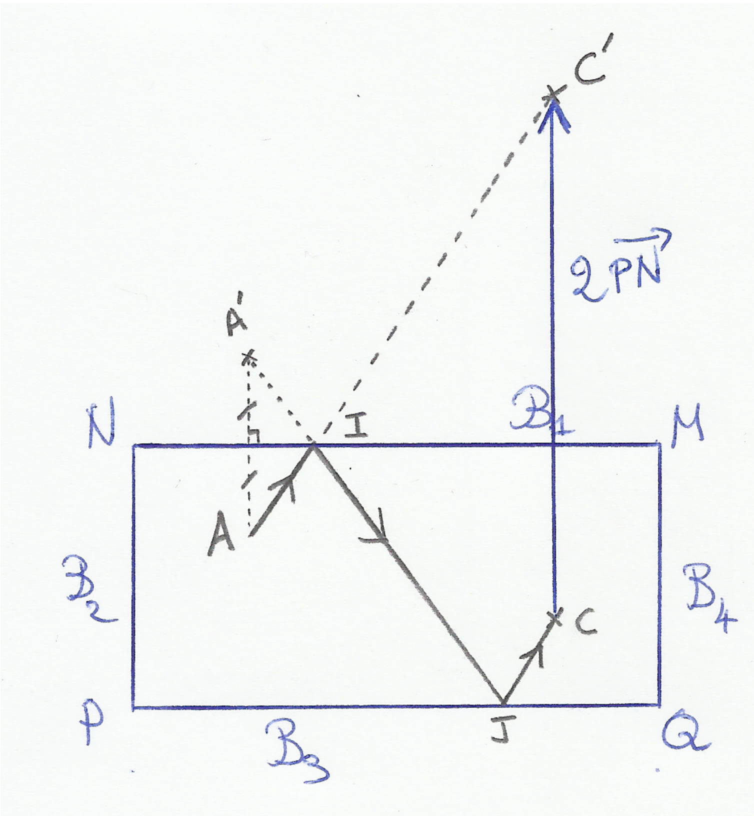
(3b) Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de β ? Déterminer aussi β^{-1}.

Comme composée de deux réflexions d'axes parallèles, β est une translation, et plus précisément, il s'agit de la translation de vecteur $2\overrightarrow{NP}$. La réciproque β^{-1} est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{PN}$.

(3c) Si les points A et C sont fixés, quel « point virtuel » le joueur doit-il viser pour que la bille placée initialement en A atteigne le point C après avoir rebondit successivement sur les bandes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$?

Notons $C' := \beta^{-1}(C)$, c'est-à-dire le translaté de C par le vecteur $2\overrightarrow{PN}$. Comme $\beta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}''$, on obtient $\mathcal{D} = \beta^{-1}(\mathcal{D}'')$. Puisque $C \in \mathcal{D}''$, il vient que $C' \in \mathcal{D}$. Comme précédemment, on peut atteindre le point C en visant le point C'.

(3d) Faire une figure.



Note : Pour déterminer la position du point J, on a aussi construit le point $A' \in \mathcal{D}'$ symétrique de A par rapport à $\mathcal{B}_1$.

(4) *(Rebonds sur $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, puis $\mathcal{B}_4$)* On suppose maintenant que la bille part d'un point A et rebondit successivement sur les bandes du haut, de gauche, du bas et de droite. On note I_1

le point d'impact sur $\mathcal{B}_1$, I_2 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_2$, I_3 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_3$ et I_4 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_4$. On note $\mathcal{D}$ la droite (AI_1). On pose $\mathcal{D}_1 := (I_1I_2)$, $\mathcal{D}_2 := (I_2I_3)$, $\mathcal{D}_3 := (I_3I_4)$. On note $\mathcal{D}_4$ la droite passant par I_4 donnant la trajectoire de la bille après le rebond en I_4.
(4a) Déterminer une isométrie γ telle que $\mathcal{D}_4 = \gamma(\mathcal{D})$. (Comme ci-dessus, γ ne doit pas dépendre de la trajectoire particulière de la bille, elle ne doit dépendre que de la géométrie du billard.)

> En raisonnant comme dans les questions précédentes, en posant $\gamma := s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$, on obtient $\mathcal{D}_4 = \gamma(\mathcal{D})$.

(4b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de γ.

> Comme composés de deux réflexions d'axes perpendiculaires, on sait que $s_2 \circ s_1$ et $s_4 \circ s_3$ sont les symétries centrales σ_N et σ_Q. La composée $\gamma = \sigma_N \circ \sigma_Q$ est donc la translation de vecteur $2\overrightarrow{NQ}$.

(4c) Montrer que $\mathcal{D}_4$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

> L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle. Comme $\mathcal{D}_4$ est l'image de $\mathcal{D}$ par γ qui est la translation de vecteur $2\overrightarrow{NQ}$, on obtient que $\mathcal{D}_4$ est parallèle à $\mathcal{D}$.

(4d) Montrer que $A \in \mathcal{D}_4$ si et seulement si la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (NQ).

> Notons $A' := \gamma(A)$. On a $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{NQ}$ et $A' \in \mathcal{D}_4$. Si A appartient à $\mathcal{D}_4$, le vecteur $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{NQ}$ dirige la droite $\mathcal{D}_4$, donc dirige aussi la droite $\mathcal{D}$ qui lui est parallèle, donc $\mathcal{D}$ est parallèle à (NQ). Inversement, si $\mathcal{D}$ est parallèle à (NQ), le translaté A' de $A \in \mathcal{D}$ par le vecteur $2\overrightarrow{NQ}$ appartient à $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}_4$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $A' \in \mathcal{D}$, on obtient que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_4$, et donc que $A \in \mathcal{D}_4$.

(4e) Faire une figure correspondant à un cas où $A \in \mathcal{D}_4$.