Partiel du 20 novembre 2017
Durée : deux heures

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que r et r' soient deux rotations d'angles respectifs α et α'. On suppose que $\alpha+\alpha'$ n'est pas de la forme $2k\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Alors, $r' \circ r$ est :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

(2) Supposons que t soit une translation et s une réflexion. Alors $t \circ s$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

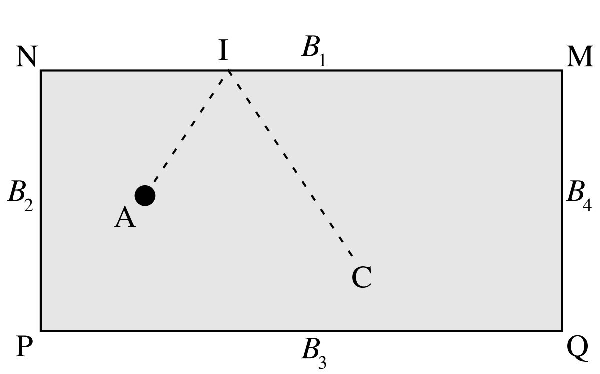
Exercice

On considère la transformation φ du plan complexe définie par $\varphi(z) = \left(\frac{3+4i}{5}\right)\overline{z} + \frac{2-4i}{5}$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.
(1) Justifier brièvement que φ est une isométrie. Est-ce un déplacement ou un antidéplacement ?
(2) Calculer $\varphi(1)$. Que peut-on en déduire sur la nature de l'isométrie φ ?
(3) Notons O l'origine du repère. Calculer l'affixe du milieu I du segment $[O\varphi(O)]$.
(4) Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie φ.
(5) Faire une figure sur laquelle on placera aussi un point arbitraire M et son image $\varphi(M)$.

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à la trajectoire d'une bille qui rebondit sur les bandes d'un billard rectangulaire. On dispose ainsi d'un rectangle MNPQ. Les segments $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$ sont respectivement les bandes du haut, de gauche, du bas et de droite. On notera B_1, B_2, B_3, B_4 les droites prolongeant ces segments. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on note s_i la réflexion d'axe la droite B_i.

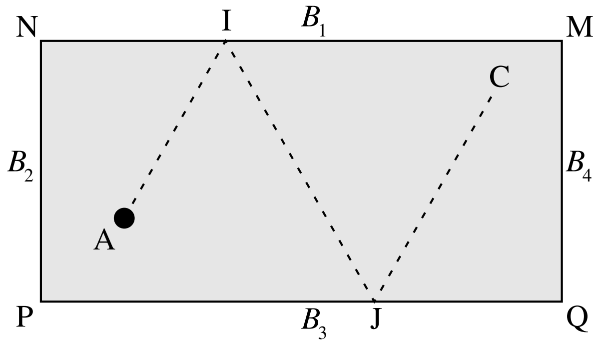
Dans cette modélisation, on néglige le rayon de la boule qui constitue la bille : on considérera que la bille est un point. Tant que la bille reste à l'intérieur du rectangle, sa trajectoire est rectiligne. Quand la bille atteint une bande, elle rebondit comme sur la figure ci-contre. Sur cette figure, la bille est initialement placée en un point A et son mouvement suit la ligne en pointillés : elle frappe la bande du haut (B_1) en le point I et elle rebondit. La trajectoire après l'impact au point I est déterminée par l'égalité d'angles orientés $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IA})$.



(1) *(Rebond sur $\mathcal{B}_1$.)* Dans cette question, comme sur la figure précédente, on suppose que la bille se déplace du point A au point C en rebondissant en I sur la bande du haut. Notons $\mathcal{D}$ la droite (AI) et $\mathcal{D}'$ la droite (IC).
(1a) Déterminer une isométrie φ telle que $\mathcal{D}' = \varphi(\mathcal{D})$. (L'isométrie φ ne doit pas dépendre des points A, I et C : elle doit pouvoir s'appliquer à tous les rebonds sur la bande du haut.)
(1b) Montrer que $M := \varphi^{-1}(C)$ appartient à $\mathcal{D}$.
(1c) Dans une situation de jeu de billard, si la bille est initialement placée au point A et que le joueur veut que la bille atteigne le point C après avoir rebondi sur la bande du haut, quel « point virtuel » le joueur doit-il viser ? (Autrement dit, comment construire la figure précédente si on ne connaît que les points A et C.)

(2) *(Rebond sur $\mathcal{B}_1$, puis sur $\mathcal{B}_2$.)* On suppose maintenant que la bille part d'un point A, rebondit sur la bande du haut en un point I, puis qu'elle rebondit sur la bande de gauche en un point J et atteint un point C. On note $\mathcal{D} := (AI)$, $\mathcal{D}' := (IJ)$, $\mathcal{D}'' := (JC)$.
(2a) Déterminer des isométries φ et ψ telles que $\mathcal{D}' = \varphi(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'' = \psi(\mathcal{D}')$.
(2b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie composée $\alpha := \psi \circ \varphi$.
(2c) Faire une figure sur laquelle vous placerez aussi le point $C' := \alpha^{-1}(C)$ et tracerez la droite (AC').
(2d) Si le joueur de billard veut que la bille initialement placée en A atteigne le point C après des rebonds sur les bandes du haut puis de gauche, est-ce une bonne stratégie de viser le point C' ?

(3) *(Rebond sur $\mathcal{B}_1$, puis sur $\mathcal{B}_3$.)* On suppose désormais que la bille part d'un point A, rebondit sur la bande du haut en un point I, puis qu'elle rebondit sur la bande du bas en un point J et atteint un point C. On note $\mathcal{D} := (AI)$, $\mathcal{D}' := (IJ)$, $\mathcal{D}'' := (JC)$.



(3a) Construire une isométrie β telle que $\beta(\mathcal{D}) = \mathcal{D}''$. (Comme précédemment, β ne doit dépendre que des bandes et pas des points A, I, J et C donnant la position de la bille à divers instants.)
(3b) Quels sont la nature et les éléments caractéristiques de β ? Déterminer aussi β^{-1}.
(3c) Si les points A et C sont fixés, quel « point virtuel » le joueur doit-il viser pour que la bille placée initialement en A atteigne le point C après avoir rebondit successivement sur les bandes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$?
(3d) Faire une figure.

(4) *(Rebonds sur $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$, puis $\mathcal{B}_4$)* On suppose maintenant que la bille part d'un point A et rebondit successivement sur les bandes du haut, de gauche, du bas et de droite. On note I_1 le point d'impact sur $\mathcal{B}_1$, I_2 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_2$, I_3 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_3$ et I_4 celui de l'impact sur $\mathcal{B}_4$. On note $\mathcal{D}$ la droite (AI_1). On pose $\mathcal{D}_1 := (I_1I_2)$, $\mathcal{D}_2 := (I_2I_3)$, $\mathcal{D}_3 := (I_3I_4)$. On note $\mathcal{D}_4$ la droite passant par I_4 donnant la trajectoire de la bille après le rebond en I_4.
(4a) Déterminer une isométrie γ telle que $\mathcal{D}_4 = \gamma(\mathcal{D})$. (Comme ci-dessus, γ ne doit pas dépendre de la trajectoire particulière de la bille, elle ne doit dépendre que de la géométrie du billard.)
(4b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de γ.
(4c) Montrer que $\mathcal{D}_4$ est parallèle à $\mathcal{D}$.
(4d) Montrer que $A \in \mathcal{D}_4$ si et seulement si la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (NQ).
(4e) Faire une figure correspondant à un cas où $A \in \mathcal{D}_4$.

Rappel : la deuxième interrogation WIMS aura lieu les 21/22 novembre. Les exercices seront tirés des quatre feuilles d'exercices WIMS actuellement en ligne.