Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2018
Math 102 : Option de Géométrie

Corrigé du partiel du 19 novembre 2017

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que s et s' soient deux réflexions. Alors, $s' \circ s$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

> (a), (b).

(2) Supposons que τ soit une translation et φ une réflexion glissée. Alors $\tau \circ \varphi$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

> (c), (d).

Exercice

On considère un triangle quelconque ABC.
On note $D := Bary((B,1),(C,2))$, $E = Bary((A,2),(B,1))$, $F = Bary((A,2),(C,1))$.
On note I le milieu du segment $[DF]$.

(1) Écrire I comme barycentre des points A, B, C affectés de masses appropriées.

> D'après le théorème des barycentres partiels, on a :
> $$Bary((B,1),(C,2),(A,2),(C,1)) = Bary((D,3),(F,3)) = I$$
> En regroupant les deux masses placées en C, on obtient finalement que $I = Bary((A,2),(B,1),(C,3))$.

(2) Montrer que I est aussi le milieu du segment $[CE]$.

D'après le théorème des barycentres partiels, le milieu de $[CE]$ est $Bary((E,3),(C,3)) = Bary((A,2),(B,1),(C,3))$ qui est égal à I d'après la question précédente.

(3) En déduire que $CDEF$ est un parallélogramme.

D'après les questions précédentes, les diagonales $[CE]$ et $[DF]$ de ce quadrilatère se coupent en leur milieu, donc $CDEF$ est un parallélogramme.

(4) Montrer que le milieu G du segment $[DE]$ est le centre de gravité du triangle ABC.

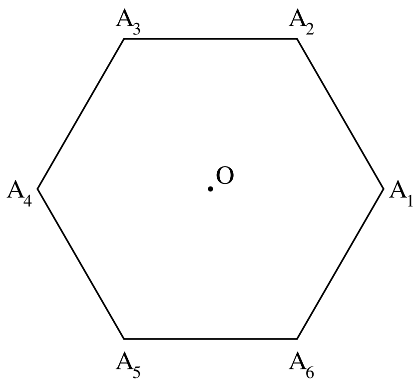
Par définition du milieu de $[DE]$, on a $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{0}$. Par définition de D, on a $3\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}$. E, on a $3\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$. En faisant la somme, on obtient $2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, ce qui revient à dire que G est l'isobarycentre de ABC.

(5) Faire une figure.

Voir la première figure Geogebra sur Dokéos.

Problème

On considère un hexagone régulier (direct) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ comme dans la figure ci-dessous. On note O le centre de l'hexagone. On suppose que $OA_1 = 1$ et on considère le repère d'origine O tel que A_1 soit d'affixe $a_1 = 1$.



(1) *Étude de l'hexagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.*
(1a) On note $\omega := exp(\frac{i\pi}{3})$. Déterminer l'écriture algébrique de ω (c'est-à-dire les réels x et y tels que $\omega = x + iy$).

$\omega = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1b) On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'expression complexe de l'isométrie r.

Comme le centre de la rotation est l'origine, l'expression complexe de r est $z \longmapsto \omega z$.

(1c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r^3 = r \circ r \circ r$. Quelle est l'expression complexe de r^3 ?

Si M est d'affixe z, alors $r(M)$ aura pour affixe ωz, puis $r(r(M))$ aura pour affixe $\omega^2 z$ et enfin $r^3(M)$ aura pour affixe $\omega^3 z$. Or $\omega^3 = \exp(\frac{2i\pi}{3})^3 = \exp(i\pi) = -1$, donc r^3 admet $z \longmapsto -z$ pour expression complexe.

(1d) Pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$, déterminer l'affixe a_i du point A_i. (On écrira ces nombres complexes sous forme algébrique.)

> Comme $A_{i+1} = r(A_i)$ (pour $i \in \{1, \ldots, 5\}$), on a la relation $a_{i+1} = \omega a_i$. Comme $a_1 = 1$, il vient immédiatement que $a_i = \omega^{i-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$. On ainsi $a_2 = \omega$. $a_6 = \omega^5$. Comme $\omega^6 = 1$, $\omega^5 = \omega^{-1}$. Comme ω est de module 1, on a aussi $\omega\overline{\omega} = 1$, donc $a_6 = \overline{\omega}$. Par ailleurs, $a_6 = \omega^3 a_3 = -a_3$, donc $a_3 = -\overline{\omega}$. $a_4 = \omega^3 = -1$. Enfin, $a_5 = \omega^4 = -\omega$. Finalement,
>
> $$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_3 &= -\overline{\omega} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_4 &= -1 \\ a_5 &= -\omega = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a_6 &= \overline{\omega} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(2) *Étude d'une transformation* φ.

On note φ la transformation du plan complexe dont l'expression complexe est $z \longmapsto -\omega\overline{z} + \omega + 1$.

(2a) Justifier que φ est une isométrie et expliquer quelles sont *a priori* les possibilités pour la nature de l'isométrie φ ?

> L'expression complexe de φ est de la forme $z \longmapsto a\overline{z} + b$ avec a de module 1, donc on reconnaît l'expression complexe d'un antidéplacement. φ est donc une isométrie qui ne peut *a priori* être qu'une réflexion ou une réflexion glissée.

(2b) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. En déduire la nature de l'isométrie φ.

> Soit M un point d'affixe z. Notons $M' = \varphi(M)$ et $M'' = \varphi(M') = (\varphi \circ \varphi)(M)$. Les affixes z' et z'' de M' et M'' vérifient les identités $z' = -\omega\overline{z} + \omega + 1$ et $z'' = -\omega\overline{z'} + \omega + 1 = -\omega\left(-\overline{\omega}z + \overline{\omega} + 1\right) + \omega + 1 = z - 1 - \omega + \omega + 1 = z$, donc $M'' = M$. Ainsi, $\varphi \circ \varphi$ est l'identité.
>
> Comme on sait déjà que φ est un antidéplacement, on en déduit que φ est une réflexion. (En effet, si c'était une symétrie glissée, $\varphi \circ \varphi$ serait une translation de vecteur non nul.)

(2c) Déterminer $\varphi(A_1)$ et $\varphi(A_2)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

> L'affixe de $\varphi(A_i)$ est $-\omega\overline{a_i} + \omega + 1$. Pour $i = 1$, on a a_1, donc $-\omega\overline{a_1} + \omega + 1 = 1 = a_1$, donc $\varphi(A_1) = A_1$.
>
> Pour $i = 2$, $a_2 = \omega$, donc $-\omega\overline{a_2} + \omega + 1 = -1 + \omega + 1 = \omega = a_2$, donc $\varphi(A_2) = A_2$.
>
> On sait que φ est une réflexion. Comme φ fixe A_1 et A_2, on en déduit que φ est la réflexion d'axe (A_1A_2).

(3) *Étude de l'hexagone* $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$, on note $B_i := \varphi(A_i)$.

On note $O' := \varphi(O)$. On introduit l'isométrie $r' := \varphi \circ r \circ \varphi$.

(3a) Déterminer $r'(O')$.

On rappelle que φ est une involution. $r'(O') = r'(\varphi(O)) = (\varphi \circ r \circ \varphi \circ \varphi)(O) = (\varphi \circ r)(O) = \varphi(r(O)) = \varphi(O) = O'$.

(3b) L'isométrie r' est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?

φ est un antidéplacement et r un déplacement, donc $r \circ \varphi$ est un antidéplacement, puis $r' = \varphi \circ r \circ \varphi$ est un déplacement.

(3c) Pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$, montrer que $r'(B_i) = B_{i+1}$.

Comme φ est une involution, $B_i = \varphi(A_i)$ implique que $A_i = \varphi(B_i)$, donc $r'(B_i) = \varphi(r(\varphi(B_i))) = \varphi(r(A_i)) = \varphi(A_{i+1}) = B_{i+1}$.

(3d) Déterminer l'expression complexe de r'.

En utilisant un certain abus de notation, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a :

$$\begin{aligned} r(\varphi(z)) &= \omega\left(-\omega\overline{z} + \omega + 1\right) \\ &= -\omega^2\overline{z} + \omega^2 + \omega \end{aligned}$$

On a déjà montré que $\omega^2 = a_3 = -\overline{\omega}$, donc

$$r(\varphi(z)) = \overline{\omega z} + \omega - \overline{\omega}$$

Ensuite, on appliquant φ, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(r(\varphi(z))) &= -\omega\overline{(\overline{\omega z} + \omega - \overline{\omega})} + \omega + 1 \\ &= -\omega\left(\omega z + \overline{\omega} - \omega\right) + \omega + 1 \\ &= -\omega^2 z - 1 + \omega^2 + \omega + 1 \\ &= \overline{\omega} z - \overline{\omega} + \omega = \overline{\omega} z + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3e) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'.

On sait déjà que r' est un déplacement qui fixe le point O', donc r' est une rotation de centre O'. Son expression complexe est $z \longmapsto \overline{\omega} z + i\sqrt{3}$, or $\overline{\omega} = exp(-\frac{i\pi}{3})$, donc r' est la rotation de centre O' et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

(3f) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'^{-1}.

D'après la question précédente, on obtient que r'^{-1} est la rotation de centre O' et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(3g) Déduire de ce qui précède que $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$ est un hexagone régulier.

On sait que $r'(B_{i+1}) = B_i$ pour $i \in \{1, \dots, 5\}$ et que r' est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$, donc par définition $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$ est un hexagone régulier (direct), de centre O'.

(4) Faire une figure dans laquelle on fera apparaître les axes du repère et les hexagones $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ et $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$.

Voir la deuxième figure Geogebra sur Dokéos.