Partiel du 19 novembre 2018
Durée : deux heures

(Documents et calculatrices interdits)

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que s et s' soient deux réflexions. Alors, $s' \circ s$ peut être :

(a) Une translation ;

(b) Une rotation ;

(c) Une réflexion ;

(d) Une symétrie glissée.

(2) Supposons que τ soit une translation et φ une réflexion glissée. Alors $\tau \circ \varphi$ peut être :

(a) Une translation ;

(b) Une rotation ;

(c) Une réflexion ;

(d) Une symétrie glissée.

Exercice

On considère un triangle quelconque ABC.

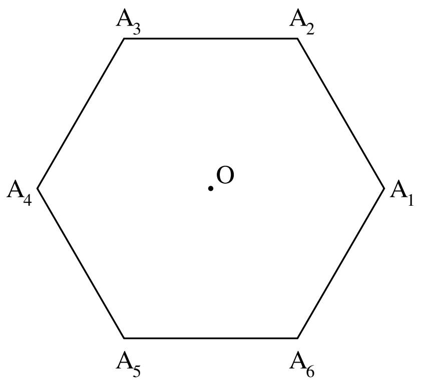
On note $D := Bary((B,1),(C,2))$, $E = Bary((A,2),(B,1))$, $F = Bary((A,2),(C,1))$.

On note I le milieu du segment $[DF]$.

(1) Écrire I comme barycentre des points A, B, C affectés de masses appropriées.
(2) Montrer que I est aussi le milieu du segment $[CE]$.
(3) En déduire que $CDEF$ est un parallélogramme.
(4) Montrer que le milieu G du segment $[DE]$ est le centre de gravité du triangle ABC.
(5) Faire une figure.

Problème

On considère un hexagone régulier (direct) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ comme dans la figure ci-dessous. On note O le centre de l'hexagone. On suppose que $OA_1 = 1$ et on considère le repère d'origine O tel que A_1 soit d'affixe $a_1 = 1$.



(1) *Étude de l'hexagone* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.
(1a) On note $\omega := exp(\frac{i\pi}{3})$. Déterminer l'écriture algébrique de ω (c'est-à-dire les réels x et y tels que $\omega = x + iy$).
(1b) On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'expression complexe de l'isométrie r.
(1c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r^3 = r \circ r \circ r$. Quelle est l'expression complexe de r^3 ?
(1d) Pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$, déterminer l'affixe a_i du point A_i. (On écrira ces nombres complexes sous forme algébrique.)

(2) *Étude d'une transformation* φ.
On note φ la transformation du plan complexe dont l'expression complexe est $z \longmapsto -\omega\overline{z} + \omega + 1$.
(2a) Justifier que φ est une isométrie et expliquer quelles sont *a priori* les possibilités pour la nature de l'isométrie φ ?
(2b) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. En déduire la nature de l'isométrie φ.
(2c) Déterminer $\varphi(A_1)$ et $\varphi(A_2)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ.

(3) *Étude de l'hexagone* $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, 6\}$, on note $B_i := \varphi(A_i)$.
On note $O' := \varphi(O)$. On introduit l'isométrie $r' := \varphi \circ r \circ \varphi$.
(3a) Déterminer $r'(O')$.
(3b) L'isométrie r' est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
(3c) Pour tout $i \in \{1, \ldots, 5\}$, montrer que $r'(B_i) = B_{i+1}$.
(3d) Déterminer l'expression complexe de r'.
(3e) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'.
(3f) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r'^{-1}.
(3g) Déduire de ce qui précède que $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$ est un hexagone régulier.

(4) Faire une figure dans laquelle on fera apparaître les axes du repère et les hexagones $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ et $B_6B_5B_4B_3B_2B_1$.