Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2019
Math 102 : Option de Géométrie

Corrigé du partiel du 18 novembre 2019

Le sujet est assez long. Le barême sera donc sur un peu plus que 20 points. Il est donc plus important de répondre le plus correctement possible aux questions plutôt que de vouloir à tout prix traiter le maximum de questions. En particulier, prenez soin de vérifier vos calculs et la cohérence entre vos calculs et les figures que vous construisez.

QCM

Pour chacune des questions suivantes concernant la géométrie du plan, une ou plusieurs réponses sont correctes. Recopiez sur votre copie les lettres correspondant aux réponses correctes. (On ne demande aucune justification.)

(1) Supposons que τ soit une translation et φ une rotation (*différente de l'identité*). Alors $\tau \circ \varphi$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

| (b).

(2) Supposons que r soit une rotation et s soit une réflexion. Alors, $r \circ s$ peut être :

(a) Une translation ;
(b) Une rotation ;
(c) Une réflexion ;
(d) Une symétrie glissée.

| (c), (d).

Exercice I

On note φ la transformation plane d'expression complexe $z \longmapsto iz + 3$.

(1) Sans faire de calcul, que peut-on dire sur φ ? en particulier, quelle est la nature de φ ?

| Comme $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, φ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note A le centre de la rotation φ.

(2) Déterminer l'expression complexe de $\psi := \varphi \circ \varphi$.

Par abus de notation, on identifie un point à son affixe. Si $z \in \mathbf{C}$, on a $\psi(z) = \varphi(\varphi(z)) = i(iz+3)+3 = -z+3+3i$.

(3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de ψ.

Par composition de rotations de même centre, on obtient que ψ est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, c'est-à-dire que ψ est la symétrie centrale de centre A. Si on note a l'affixe de A, on sait que la symétrie centrale de centre A a pour expression complexe $z \longmapsto -z+a$, donc $2a = 3+3i$. Finalement, A est le point d'affixe $a = \frac{3+3i}{2}$.

(4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

D'après ce qui précède, φ est la rotation de centre A (d'affixe $a = \frac{3+3i}{2}$) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice II

Soit ABC un triangle quelconque.
— On note P le milieu de $[AB]$;
— On note $Q := \mathrm{Bary}((B,2),(C,1))$;
— On note $R := \mathrm{Bary}((C,2),(P,1))$;
— On note $S := \mathrm{Bary}((A,2),(C,1))$.

(1) Exprimer le point R comme barycentre des points A, B et C affectés de coefficients à déterminer.

Comme $P = \mathrm{Bary}((A,\frac{1}{2}),(B,\frac{1}{2}))$, le théorème des barycentres partiels montre que $\mathrm{Bary}((A,\frac{1}{2}),(B,\frac{1}{2}),(C,2)) = \mathrm{Bary}((P,1),(C,2)) = R$.

(2) Exprimer le milieu G du segment $[PR]$ comme barycentre des points A, B et C affectés de coefficients à déterminer.

D'après la question précédente, vu que $3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2$, on a $3\overrightarrow{GR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}$. On a aussi $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GR}+3\overrightarrow{GP} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}\right)+\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{GB} \\ &= 3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC} \end{aligned}$$

Comme G est le milieu de $[PR]$, on a $\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GP} = \vec{0}$. On en déduit donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ceci montre que $G = \mathrm{Bary}((A,1),(B,1),(C,1))$, autrement dit G est l'isobarycentre des points A, B et C.

(Alternativement, $G = \mathrm{Bary}((P,3),(R,3))$. Or, $R = \mathrm{Bary}((C,2),(P,1))$, donc d'après le théorème des barycentres partiels, $G = \mathrm{Bary}((P,3),(C,2),(P,1)) = \mathrm{Bary}((P,4),(C,2)) = \mathrm{Bary}((P,2),(C,1))$.

Comme $P = \mathrm{Bary}((A,1),(B,1))$, on obtient aussi $G = \mathrm{Bary}((A,1),(B,1),(C,1))$.)

(3) Montrer que G est le milieu du segment $[QS]$.

Le milieu du segment $[QS]$ est $\mathrm{Bary}((Q,3),(S,3))$. En utilisant les définitions de S et Q, et le théorème des barycentres partiels, on obtient que ce milieu est $\mathrm{Bary}((B,2),(C,1),(A,2),(C,1)) = \mathrm{Bary}((A,2),(B,2),(C,2))$, c'est-à-dire l'isobarycentre des points A, B et C, c'est-à-dire G d'après la question précédente. Ainsi, G est bien le milieu de $[QS]$.

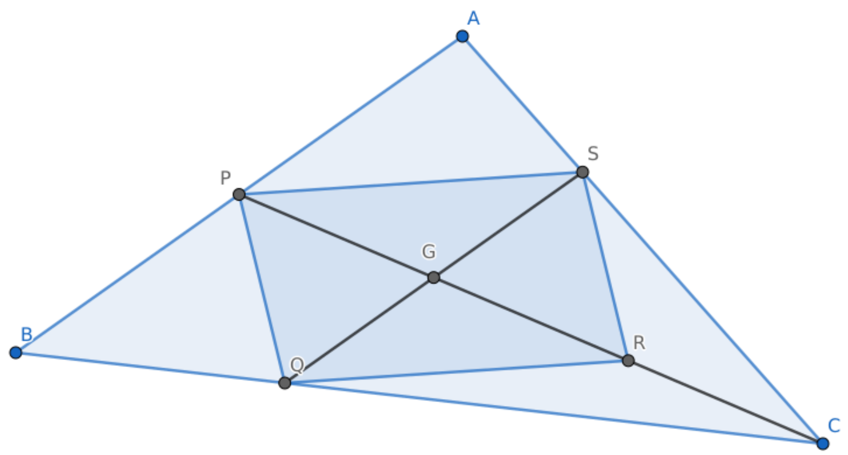
(4) Déduire des questions précédentes que $PQRS$ est un parallélogramme.

On vient de montrer que G est à la fois le milieu de $[PR]$ et $[QS]$, ainsi les diagonales de $PQRS$ se coupent en leur milieu, donc $PQRS$ est un parallélogramme.

(5) Montrer que les diagonales de $PQRS$ se coupent en l'isobarycentre des points A, B et C.

Les questions précédentes montrent que le point G est le point d'intersection des diagonales et l'isobarycentre des points A, B et C.

(6) Faire une figure.



Exercice III

Soit A le point d'affixe $a := 1$ et B le point d'affixe $b := 2i$. Le but de l'exercice est de déterminer l'expression complexe de la réflexion s de l'axe (AB).
(1) Expliquer pourquoi il est vrai que $s(A) = A$ et $s(B) = B$.

L'axe de s étant la droite (AB), tous les points de (AB) sont fixes par s. En particulier, $s(A) = A$ et $s(B) = B$.

On sait que l'expression complexe de s doit être de la forme $z \longmapsto \alpha\bar{z} + \beta$ pour α un nombre complexe de module 1 et β un nombre complexe. Il s'agit de déterminer α et β.
(2) En utilisant le fait que $s(A) = A$, déterminer une équation reliant α et β et exprimer β en fonction de α.

L'affixe de $s(A)$ est $\alpha\bar{a} + \beta = \alpha + \beta$. L'identité $s(A) = A$ implique donc que $\alpha + \beta = 1$, donc $\beta = 1 - \alpha$.

(3) En utilisant le fait que $s(B) = B$, déterminer une équation satisfaite par α, puis calculer α, et β.

L'affixe de $s(B)$ est $\alpha\bar{b}+\beta = \alpha\cdot\overline{(2i)}+\beta = -2i\alpha+\beta = -2i\alpha+(1-\alpha)$. Comme $s(B)=B$, on a donc $(-2i-1)\alpha+1=2i$, donc $(1+2i)\alpha = 1-2i$, donc $\alpha = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-3-4i}{5}$. Par conséquent, $\beta = 1-\alpha = \frac{8+4i}{5}$.

(4) Finalement, quelle est l'expression complexe de s ?

L'expression complexe de s est $z \longmapsto \frac{(-3-4i)\bar{z}+8+4i}{5}$.

On note C le point d'affixe $c := -2+i$.

(5) Déterminer l'affixe d du point $D := s(C)$.

On utilise la formule précédente avec $z := c = -2+i$. On a $(-3-4i)(-2-i) = 2+11i$, donc l'affixe de D est $d = \frac{(2+11i)+(8+4i)}{5} = \frac{10+15i}{5} = 2+3i$.

(6) Déterminer le milieu du segment $[CD]$.

Le milieu du segment $[CD]$ a pour affixe $\frac{c+d}{2} = 2i = b$. On en déduit que B est le milieu du segment $[CD]$.

On note s' la réflexion d'axe (CD).

(7) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'isométrie $s' \circ s$.

Comme D est le symétrique de C par rapport à (AB), la droite (AB) est la médiatrice de $[CD]$. En particulier (CD) et (AB) sont deux droites perpendiculaires. D'après la question précédente, leur point d'intersection est le point B. Comme composé de réflexions d'axes sécants, $s' \circ s$ est une rotation de centre B et son angle est le double de l'angle entre les droites (AB) et (CD), qui sont perpendiculaires. On en déduit que $s' \circ s$ est la rotation de centre B et d'angle π, c'est-à-dire que $s' \circ s$ est la symétrie centrale de centre B.

(8) Faire une figure, et y ajouter un point quelconque M, $M' := s(M)$ et $M'' := (s' \circ s)(M)$.