I. TP 2

1. **Point de Vecten d'un triangle.**

1.1. Construire dans Geogebra la figure correspondant à la description suivante.

Soit ABC un triangle (que l'on supposera direct, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \in]0, \pi[$). On note $ACDE$, $BAFG$, $CBHI$ les trois carrés extérieurs à ABC s'appuyant sur les côtés du triangle ABC. On note O_A le centre du carré $CBHI$, O_B celui de $ACDE$ et O_C celui de $BAFG$. Tracer les droites (AO_A), (BO_B), (CO_C). Le point de Vecten V est le point d'intersection de ces trois droites qui s'avèrent être concourantes.

1.2. Tracer le triangle $O_AO_BO_C$. Les droites (AO_A), (BO_B), (CO_C) *semblent*-elles être des droites remarquables de ce triange ?

1.3.
- Construire le centre de gravité P du triangle ABC. (Une façon de le faire consiste à utiliser le champ de saisie et d'y taper $P = (A + B + C)/3$, ce qui sera justifié par un prochain résultat de cours selon lequel $3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.)
- Construire le centre de gravité Q du triangle $O_AO_BO_C$. Que constate-t-on ?

II. TD 2

1. **Point de Vecten.**

1.1. On reprend la construction de la figure du TP sur le point de Vecten. Notons a, b, c les affixes des points A, B, C.
- Déterminer les affixes des points D, E, puis O_B. On notera b' l'affixe de O_B.
- Déterminer de même les affixes a' et c' des points O_A et O_C.
- Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AO_A}$ et $\overrightarrow{O_BO_C}$.
- Calculer l'angle orienté $(\overrightarrow{O_BO_C}, \overrightarrow{AO_A})$.
- En déduire que les droites (AO_A), (BO_B) et (CO_C) sont concourantes.

1.2.
- Déterminer les affixes des points P et Q.
- Conclure.

2. **Théorème de Napoléon.** Soit ABC un triangle. On note D, E, F les points tels que CBD, ACE, BAF soient des triangles équilatéraux directs. On note A' le centre de gravité de CBD, B' celui de ACE et C' celui de BAF.
- Montrer que $A'B'C'$ est un triangle équilatéral.

3. **Concours des hauteurs d'un triangle.** Soit ABC un triangle. La perpendiculaire à (AC) passant par B intersecte (AC) en un point B' et de même la perpendiculaire à (AB) passant par C intersecte (AB) en un point C'.

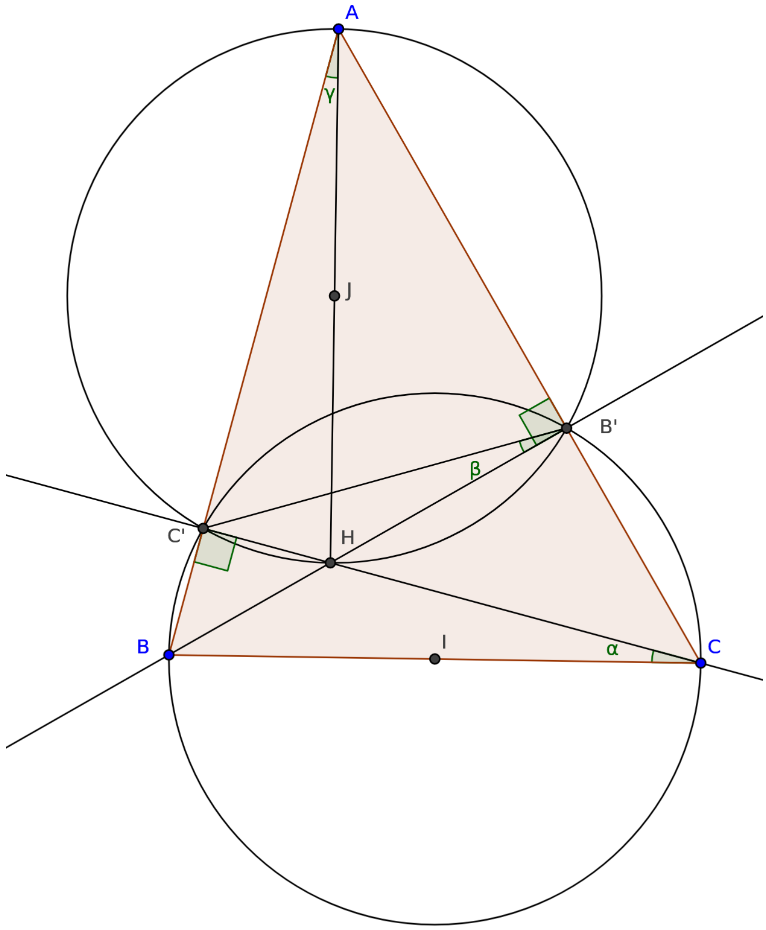
— Montrer que les points B, C, B', C' appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre I.

— Notons $\alpha := (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CB})$ et $\beta := (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B})$. En utilisant le théorème de l'angle inscrit montrer que $2\alpha = 2\beta$ (modulo 2π).

— Montrer que les points $C'HB'A$ appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on déterminera le centre J.

— On note $\gamma := (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AH})$. Montrer que $2\beta = 2\gamma$ (modulo 2π).

— Montrer que (AH) et (BC) sont perpendiculaires, puis que les trois hauteurs du triangle ABC sont bien concourantes.



(Cet exercice est inspiré d'un texte de Daniel Perrin `https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/hauteurs.pdf`.)