I. TP 3

Si A est un point, on note σ_A la symétrie centrale de centre A. Si $\vec{u}$ est un vecteur, on note $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. **Composée de deux symétries centrales.**
   - Construire trois points A, B, M.
   - Construire $M' := \sigma_A(M)$. (Utiliser l'outil « symétrie centrale ».)
   - Mettre en évidence sur la figure le fait que A est le milieu de $[MM']$.
   - Construire $M'' := \sigma_B(M')$ (sous forme de point d'intersection d'un cercle et d'une droite.)
   - Mettre en évidence sur la figure le fait que B est le milieu de $[M'M'']$.
   - Activer la trace des points M et M''. Quand on déplace le point M, que remarque-t-on ? Formuler une conjecture sur la nature de la transformation $\sigma_B \circ \sigma_A$ qui à M associe M''.
   - Représenter le vecteur $\vec{u} := \overrightarrow{MM''}$.
   - Quand on déplace M, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ changent-elles ?
   - Déplacer le point M pour qu'il se confonde avec le point A. Exprimer le $\vec{u}$ dans ce cas.
   - Préciser la conjecture formulée précédemment sur la transformation $\sigma_B \circ \sigma_A$.

2. **Composée d'une translation et d'une symétrie centrale.**
   - Dans une nouvelle figure, construire un point A et un vecteur $\vec{u}$.
   - Placer un point M. Construire $M' := \sigma_A(M)$ et $M'' := t_{\vec{u}}(M')$.
   - En affichant la trace des points M et M'', proposer une conjecture sur la nature de la transformation $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$.
   - Construire le milieu B du segment $[MM'']$. Que constate-t-on quand on déplace le point M ?
   - Quelle identité vectorielle lie les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ quand $M = A$?
   - Préciser la conjecture formulée précédemment sur la transformation $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$.

3. **WIMS. Une interrogation WIMS de quinze minutes aura lieu pendant le TP du 15/16 octobre. Elle portera sur les deux premières feuilles d'exercices WIMS : *Nombres complexes*, et *Translations, symétries centrales, réflexions*.**

Pour vous connecter à WIMS, le plus simple est d'y accéder par le lien depuis `ecampus`. Une autre façon est d'y accéder depuis `http://wims.u-psud.fr/`. Vérifiez bien que vous avez accès à la classe *Math102/Géométrie - Mardi* ou *Math102/Géométrie - Mercredi* qui corresponde à votre groupe de TD, et signalez-le à votre responsable de TD si ce n'est pas le cas (si les deux s'affichent, ce n'est pas un problème, sélectionnez celle qui vous correspond).

- Dans la rubrique *Documents*, vous avez accès à des documents de cours qui correspondent plus ou moins au cours du vendredi.
- Dans la rubrique *Feuilles*, vous avez accès à des exercices. Pour chaque exercice, le serveur Wims choisit aléatoirement des nombres ou des configurations géométriques nouvelles à chaque fois.
- Une rubrique *Examens* contiendra les trois interrogations Wims (de quinze minutes) qui seront faites en TP. Les exercices seront choisis parmi les feuilles que vous aurez pu faire les semaines précédentes.

Exercez-vous sur des exercices des deux premières feuilles (« Nombres complexes », « Translations, symétries centrales, réflexions »). N'hésitez-pas à poser des questions cette semaine ou la semaine prochaine si vous éprouvez des difficultés.

II. TD 3 : Composées de translations et de symétries centrales

1. **Composition de symétries centrales.** On suppose donnés deux points du plan A et B.

(a) Démontrer les conjectures formulées en TP sur la transformation $\sigma_B \circ \sigma_A$ en utilisant des identités vectorielles.

(b) Notons a et b les affixes des points A et B. Soit M un point d'affixe z. Déterminer l'affixe z'' du point $M'' := \sigma_B(\sigma_A(M))$. Retrouver le résultat de la question précédente.

2. **Composé d'une translation et d'une symétrie centrale.**

(a) Montrer que si A et B sont des points et $\vec{u}$ un vecteur tels que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$, alors $\sigma_B = t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$.

(b) On fixe un point A et un vecteur $\vec{u}$. Démontrer que $t_{\vec{u}} \circ \sigma_A$ est une symétrie centrale et déterminer son centre.

(c) De même, déterminer la transformation $\sigma_A \circ t_{\vec{u}}$.

3. Soit ABC un triangle. On définit les angles orientés $\alpha := (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta := (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma := (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

En utilisant notamment la relation de Chasles sur les angles orientés, montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (On pourra noter $\vec{u} := \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} := \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} := \overrightarrow{BC}$.).

4. Applications du plan complexe. Soient a non nul et b deux nombres complexes on définit les transformation $R_{a,b}$ et $S_{a,b}$ du plan complexe par, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$R_{a,b}(z) = az + b \quad \text{et} \quad S_{a,b}(z) = a\bar{z} + b\,.$$

À quelle condition $R_{a,b}$ et $S_{a,b}$ sont-elles des isométries ?

5. Points fixes des transformations $R_{a,b}$.

5.1. Décrire géométriquement $R_{1,b}$, $R_{-1,b}$, $R_{\mathrm{i},0}$.

5.2. A quelle condition $R_{a,b}$ admet-elle au moins un point fixe ? Dans ce cas déterminer tous ses points fixes. (Note : $z \in \mathbf{C}$ est un point fixe si $R_{a,b}(z) = z$.)

6. Points fixes des transformations $S_{a,b}$.

6.1. Décrire géométriquement $S_{1,0}$, $S_{-1,0}$.

6.2. Donner une condition pour que $S_{a,b}$ soit involutive. Dans la suite de cette question, on suppose que cette condition est réalisée.

(a) Écrire z en fonction de z'.

(b) Montrer que le point d'affixe $\frac{b}{2}$ est un point fixe de $S_{a,b}$.

(c) Montrer que, pour tout complexe z, le milieu de $[zS_{a,b}(z)]$ est aussi point fixe de $S_{a,b}$.

6.3. Montrer que si c est un point fixe de $S_{a,b}$, alors c est un point fixe de $S_{a,b} \circ S_{a,b}$. Donner un exemple de transformation ϕ telle qu'il existe un point fixe de $\phi \circ \phi$ qui n'est pas un point fixe de ϕ.

6.4. Dans le cas où $S_{a,b} \circ S_{a,b}$ admet un unique point fixe c, calculer son affixe et vérifier que c est point fixe de $S_{a,b}$.