TP 4 : Recherche de droites invariantes

Si φ est une isométrie et Δ une droite, on sait que $\varphi(\Delta)$ est aussi une droite, et on dit que Δ est invariante par φ si $\varphi(\Delta) = \Delta$.

Le but de cet exercice est de conjecturer des conditions pour qu'une droite soit invariante par une isométrie de nature donnée.

Dans un nouveau fichier sans axes, ni grille, on se donne une droite (AB). Les images de (AB) par les isométries sont nommées Δ_i dans l'énoncé mais on peut garder le nom des droites donné par GeoGebra. Par contre, il est conseillé de leur donner des couleurs. Quand on étudie une droite image, on peut cacher les autres.

1. **par une translation.** Soit un vecteur $\vec{u}$ d'origine A.
A l'aide de l'outil `translation`, construire la droite Δ_1 image de (AB) par $t_{\vec{u}}$ et le point $A_1 = t_{\vec{u}}(A)$. La droite Δ_1 est-elle parallèle à (AB) ?
Faire varier B et conjecturer à quelle condition (AB) et son image Δ_1 sont confondues.

2. **par une symétrie centrale.** Soit un point C. A l'aide de l'outil `symétrie centrale`, construire la droite Δ_2 image de (AB) par σ_C et le point $A_2 = \sigma_C(A)$.
La droite Δ_2 est-elle parallèle à (AB) ?
Faire varier B et conjecturer à quelle condition (AB) et son image Δ_2 sont confondues.

3. **par une réflexion.** Soit une droite $\mathcal{D}$. A l'aide de l'outil `symétrie axiale`, construire la droite Δ_3 image de (AB) par $\sigma_{\mathcal{D}}$ et $A_3 = \sigma_{\mathcal{D}}(A)$.
La droite Δ_3 est-elle parallèle à (AB) ?
Faire varier B et conjecturer à quelle condition (AB) et son image Δ_3 sont confondues. Mettre A sur $\mathcal{D}$ avec l'outil `lier/libérer le point` et compléter la conjecture.

TD 4

4. **Prolongement du TP.**

a. Démontrer les conjectures faites en TP concernant les droites invariantes par une translation, une symétrie centrale ou une réflexion.

b. Inversement, si on fixe la droite (AB), quelles sont les translations (resp. symétries centrales, réflexions) qui la laissent invariante ?

5. **Expression complexe de réflexions.** On considère dans le plan $\mathcal{P}$ un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Donner l'expression complexe de la réflexion $\sigma_{(Ox)}$ d'axe l'axe des abcisses et de la réflexion $\sigma_{(Oy)}$ d'axe l'axe des ordonnées.

6. **Composée de réflexions d'axes perpendiculaires.** Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites perpendiculaires en un point A dans $\mathcal{P}$. On veut déterminer le type et les éléments caractéristiques de $\sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2}$.

a. **Choix du repère.** Donner un repère dans lequel les expressions complexes de $\sigma_{\mathcal{D}_1}$ et $\sigma_{\mathcal{D}_2}$ sont les plus simples possibles.

b. On pose $f = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2}$. Donner l'expression complexe de f. En déduire le type et les éléments caractéristiques de f. Comparer cette transformation à $\sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \sigma_{\mathcal{D}_1}$.

c. On pose $g = \sigma_A \circ \sigma_{\mathcal{D}_1}$. Déduire de ce qui précède le type et les éléments caractéristiques de g. Faire de même pour $h = \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_A$. Que constate-t-on ?

7. **Composée de réflexions d'axes parallèles.** Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles distinctes dans $\mathcal{P}$. On veut déterminer le type et les éléments caractéristiques de $\sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \sigma_{\mathcal{D}_1}$.

a. **Choix du repère.** On fixe un point O de $\mathcal{D}_1$ comme origine du repère et on choisit $\mathcal{D}_1$ comme axe des ordonnées. Donner l'expression complexe de $\sigma_{\mathcal{D}_1}$ dans ce repère.

b. Dans le repère choisi, la droite $\mathcal{D}_2$ a pour équation $x = w$, où w est un nombre *réel.* On note $\vec{u}$ le vecteur d'affixe w et on pose $\phi = t_{\vec{u}} \circ \sigma_{\mathcal{D}_1} \circ t_{-\vec{u}}$. Soit M un point du plan, $M' = \phi(M)$, $P = t_{-\vec{u}}(M)$ et $P' = \sigma_{\mathcal{D}_1}(P)$.

- **(i)** Montrer que (PP') est orthogonale à $\mathcal{D}_2$. En déduire que (MM') est également orthogonale à $\mathcal{D}_2$.
- **(ii)** Soit Q le milieu de $[PP']$, montrer que $t_{\vec{u}}(Q)$ est le milieu de $[MM']$.
- **(iii)** En utilisant ce qui précède, montrer que $\phi = \sigma_{\mathcal{D}_2}$. En déduire l'expression complexe de $\sigma_{\mathcal{D}_2}$.

c. Déduire de ce qui précède le type et les éléments caractéristiques de $\sigma_{\mathcal{D}_2} \circ \sigma_{\mathcal{D}_1}$. Comparer cette transformation à $\sigma_{\mathcal{D}_1} \circ \sigma_{\mathcal{D}_2}$.