Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

L1 MPI S1 2019
Math 102 : Option de Géométrie

Devoir 1 et TD 5

Le TP 5 consiste en la première interrogation WIMS et dans le début de la préparation de la figure Geogebra pour le premier devoir.

La première partie *Constructions et observations* est commencée lors du TP du 15/16 octobre. Votre copie incluant vos observations lors de la première partie et des réponses rigoureuses à la seconde partie *Démonstrations* devra être rendue en TD le **5/6 novembre 2019.** Votre figure Geogebra (fichier `.ggb`) devra être déposée avant cette date sur *ecampus* (Cours Math102, rubrique Devoirs, *Devoir 1* ; en cas de problème, envoyer un mail `joel.riou@math.u-psud.fr`). Attendez de préférence d'avoir bien compris l'ensemble du devoir avant de soumettre votre figure Geogebra.

Devoir 1 : Constructions et observations

Au cours du TP 5, vous devez commencer à travailler sur cette partie qui consiste principalement à faire des constructions (questions 1 à 4) et *à faire des observations qui devront être décrites précisément sur votre copie (questions 5 et 6).*

On fixe deux points distincts A et B. On note s la réflexion d'axe la droite (AB). La rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est notée r_A^- et la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est notée r_B^+. Le but du devoir est l'étude de la transformation $\varphi := r_B^+ \circ s \circ r_A^- \circ s$.
(1) Placer des points A, B et M.
(2) Construire $M_1 := s(M)$, $M_2 := r_A^-(M_1)$, $M_3 := s(M_2)$, $M_4 := r_B^+(M_3)$.
(3) Faire apparaître sur la figure les propriétés caractérisant les points M_1, M_2, M_3, M_4 : matérialiser le fait que certains angles sont droits, certaines distances égales, etc.
(4) Activer la trace des points M et M_4. Déplacer le point M et observer comment se déplace le point M_4.
(5) Désactiver les traces de M et M_4. Construire le milieu I du segment $[MM_4]$. Que constatez-vous quand vous déplacez le point M ? Que cela suggère-t-il sur la nature de la transformation φ ?
(6) Tracer le triangle ABI. Quelles propriétés remarquables ce triangle semble-t-il avoir ? Vérifier si possible ces propriétés dans Geogebra ?

Devoir 1 : Démonstrations

On note r la distance AB.
(7) Expliquer pourquoi il existe un repère orthonormal du plan dans lequel l'affixe du point A soit 0 et celle de B soit r.
On fixe un tel repère jusque l'avant-dernière question.
(8) Déterminer l'expression complexe des transformations s, r_A^- et r_B^+.

(9) Soit M un point du plan d'affixe z. Exprimer en fonction de z les affixes z_1, z_2, z_3, z_4 respectifs des points M_1, M_2, M_3, M_4 où $M_1 := s(M)$, $M_2 := r_A^-(M_1)$, $M_3 := s(M_2)$ et $M_4 := r_B^+(M_3)$.
(10) Quelle est l'expression complexe de la transformation φ ?
(11) Montrer que φ est une symétrie centrale. Déterminer l'affixe c du centre C de la symétrie φ.
(12) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$. En déduire que $BC = AC$ et déterminer l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.
(13) Montrer que le point I milieu de $[MM_4]$ est égal à C. Déduire des résultats précédents que le triangle IAB est rectangle en I.
(14) Dans cette question, on ne suppose plus que A et B ont pour affixes 0 et r. On suppose au contraire que l'on a fixé un autre repère et que les points A et B ont pour affixes respectifs 1 et $2+i$. Déterminer l'affixe du centre C de la symétrie φ dans ce repère.

TD 5

1. **Expression complexe de rotations.**

1.1. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre le point A d'affixe 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1.2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie d'expression complexe $z \longmapsto jz + j + 2$.

2. **Principe de conjugaison.** Soit A un point. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On note $r_{A,\theta}$ la rotation de centre A et d'angle θ. Soit $\vec{u}$ un vecteur. On note t la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\varphi = t \circ r_{A,\theta} \circ t^{-1}$.

2.1. Déterminer un point A' qui soit fixé par φ.

2.2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3. Soit D une droite. Soit $\vec{u}$ un vecteur. On note s la réflexion d'axe D et t la translation de vecteur $\vec{u}$.

3.1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s \circ t^{-1}$.

3.2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t \circ s = s \circ t$.

4. Composition de réflexions. On note D_1 la réflexion d'axe (Ox). Soit θ un réel. On note D_2 la droite passant par O et telle que l'angle orienté de droites (D_1, D_2) soit égal à θ. On note s_1 et s_2 les réflexions d'axes respectifs D_1 et D_2.

4.1. Si $r \in \mathbf{R}_+$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer l'affixe de $s_1(M)$ où M est d'affixe $re^{i\alpha}$.

4.2. Si $r \in \mathbf{R}_+$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer l'affixe de $s_2(M)$ où M est d'affixe $re^{i(\theta+\alpha)}$.

4.3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_2 \circ s_1$.

5. Isométries du carré. On considère un carré direct $ABCD$. On dit qu'une isométrie φ conserve le carré $ABCD$ si pour tout $P \in \{A, B, C, D\}$, on a $\varphi(P) \in \{A, B, C, D\}$. Parmi les isométries appartenant aux types introduits en cours, quelles sont celles qui conservent le carré $ABCD$? (On admettra pour le moment qu'une telle isométrie φ doit fixer le centre du carré.)