TP 6 : Triangles isométriques

- Construire un triangle ABC.
- Définir un point D arbitraire.
- En utilisant notamment l'outil compas, construire un point E tel que $DE = AB$.
- Définir l'angle orienté $\alpha := (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Tracer la demi-droite $[DE)$.
- Tracer l'image Δ de la demi-droite $[DE)$ par la rotation de centre D et d'angle α.
- Construire le point F de Δ tel que $DF = AC$.
- Construire le triangle DEF.

On remarque que les deux triangles ABC et DEF ont deux côtés égaux ($AB = DE$ et $AC = DF$) et un angle orienté égal ($(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF})$).

On veut montrer qu'il existe une (unique) isométrie φ telle que $D = \varphi(A)$, $E = \varphi(B)$, $F = \varphi(C)$. Sauf cas très particulier, φ sera une rotation. La suite du TP vise à construire la rotation φ.

- Rendre invisible les constructions intermédiaires ayant servi à construire DEF de façon à ce qu'on ne voie plus que les triangles ABC et DEF.
- Construire le centre O de la rotation φ.
- Tracer les demi-droites $[OA)$ et $[OD)$.
- Définir l'angle $\beta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$.
- Définir un curseur k parcourant l'intervalle $[0, 1]$.
- On note φ_k la rotation de centre O et d'angle $k\beta$. Construire le triangle $A'B'C'$ image de ABC par la rotation φ_k.
- Faire varier k et constater que le triangle $A'B'C'$ passe par diverses positions intermédiaires entre ABC et DEF.
- Activer l'animation du curseur k.
- Modifier les triangles ABC et DEF. Constater que l'animation fonctionne encore.

TD 6

1. Supposons que A, B, A', B' soient des points tels que $AB = A'B' \neq 0$.

a. Montrer qu'il existe une unique translation-ou-rotation φ telle que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$. (Utiliser les nombres complexes, et choisir éventuellement un repère adapté à la situation.)

b. À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une translation ?

À partir de maintenant, on suppose que φ est une rotation. On note P le centre et θ l'angle de φ.

c. Déterminer θ.

d. Caractériser géométriquement le point P.

Supposons que C et C' soient deux points tels que $AC = A'C' \neq 0$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

e. Montrer que $\varphi(C) = C'$.

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations ont les expressions complexes suivantes :

(i) $z \longmapsto z + 2$.

(ii) $z \longmapsto -z + 2 + 2i$.

(iii) $z \longmapsto iz + 2$.

(iv) $z \longmapsto -i\overline{z}$.

(v) $z \longmapsto i\overline{z} + 2$.

3. **Expression complexe d'une réflexion générale dont l'axe contient l'origine.** Soit $\mathcal{D}$ une droite passant l'origine O d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. On note $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$. On note r_θ la rotation de centre O et d'angle θ.

En utilisant le principe de conjugaison [1], déterminer l'expression complexe de la réflexion d'axe $\mathcal{D}$.

4. **Expression complexe d'une réflexion quelconque.** Supposons que A et B sont deux points distincts du plan dont on note a et b les affixes. On note θ l'argument du nombre complexe $b - a$.

a. Déterminer l'expression complexe d'une rotation-ou-translation φ telle que $\varphi((Ox)) = (AB)$.

b. Déterminer l'expression complexe de φ^{-1}.

c. Déterminer l'expression complexe de la réflexion d'axe (AB).

---

1. On rappelle que si $\mathcal{D}$ est une droite, que s est la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et que φ une isométrie du plan, alors $\varphi \circ s \circ \varphi^{-1}$ est la réflexion d'axe $\varphi(\mathcal{D})$.