Université Paris-Sud | L1 MPI S1 2019
Faculté des Sciences d'Orsay | Math 102 : Option de Géométrie

I. Complément de cours

Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe à n côtés. On admet que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) Les côtés de $\mathcal{P}$ et ses angles sont égaux ;
(b) Les côtés de $\mathcal{P}$ sont égaux et les sommets de $\mathcal{P}$ sont cocycliques ;
(c) Les sommets de $\mathcal{P}$ sont cocycliques et les angles au centre sont égaux (à $\frac{2\pi}{n}$).
Si ces conditions sont vérifiées, on dit que $\mathcal{P}$ est un polygone régulier.

II. TP 7 : Construction du pentagone régulier

— Placer deux points A et B.
— Tracer la droite $\mathscr{D} = (AB)$.
— Définir le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
— Définir le point O tel que $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{u}$.
— Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A.
— Tracer la perpendiculaire Δ à $\mathscr{D}$ passant par B.
— Introduire E un des deux points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.
— Construire le point F du segment $[BE]$ tel que $EF = AB$.
— Construire le point H du segment $[BO]$ tel que $BH = BF$.
— Construire le point P_1 tel que $\overrightarrow{BP_1} = 4\overrightarrow{u}$.
— Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre B et passant par P_1.
— Tracer la perpendiculaire Δ' à $\mathscr{D}$ passant par H.
— Noter P_2 et P_5 les deux points d'intersection de Δ' et $\mathscr{C}'$.
— Tracer le cercle $\mathscr{C}''$ de centre P_1 et de rayon P_2P_5.
— Noter P_3 et P_4 les deux points d'intersection des cercles $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$.
— Faire vérifier à Geogebra que le polygone $P_1P_2P_3P_4P_5$ est un pentagone régulier. Après avoir fait la figure réfléchir aux questions du paragraphe 2.

III. TD 7

1. **Calcul de** $\cos(\frac{2\pi}{5})$**.** On note $\omega := e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   a. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
   On pose $x := \omega^{-1} + \omega$.
   b. Calculer $x^2 + x$.
   c. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

2. **Étude du pentagone vu en TP.**
   a. Exprimer les longueurs BE, BF, BH, BP_1 en fonction de AB.
   b. Déterminer l'angle géométrique $\widehat{P_1BP_2}$.
   c. En déduire que le pentagone $P_1P_2P_3P_4P_5$ est régulier de centre B.

3. **Isométries stabilisant le pentagone.** On note $S := \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ l'ensemble des cinq sommets d'un pentagone régulier.

On note G l'ensemble des isométries laissant globalement invariant le pentagone régulier. On veut dire par là que si φ est une isométrie du plan, alors $\varphi \in G$ si et seulement si pour tout $P \in S$, alors $\varphi(P) \in S$.

a. Montrer que l'identité appartient à G et que si φ et ψ sont deux éléments de G, alors $\varphi \circ \psi \in G$.

b. Montrer que si $\varphi \in G$, alors $\varphi^{-1} \in G$.

(Comme dans l'exercice précédent, on note B le centre du pentagone régulier.) On note s la réflexion d'axe (BP_1) et r la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{5}$.

c. Montrer que s et r appartiennent à G.

d. Montrer que $r \circ s = s \circ r^{-1}$, puis que pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a $r^i \circ s = s \circ r^{-i}$.

e. Montrer que $Id, r, r^2, r^3, r^4, s, s{\circ}r, s{\circ}r^2, s{\circ}r^3, s{\circ}r^4$ sont dix éléments distincts de G.

f. Montrer que si $\varphi \in G$, alors $\varphi(B) = B$.

g. Montrer que G a exactement 10 éléments.

h. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des isométries $s \circ r^i$ pour $i \in \{0, \ldots, 4\}$.

i. Déterminer la loi de composition sur G sous la forme d'un tableau à deux entrées.

4. Généraliser le résultat de l'exercice précédent au cas d'un polygone régulier à n côtés avec n arbitraire.

5. Supposons que A, B et C soient des points distincts du plan d'affixes a, b et c tels que ABC soit un triangle équilatéral direct. Exprimer c en fonction de a et b.