I. TP 8 : Barycentres, dodécagone

1. Soit une droite (AB).

a. A l'aide de l'outil curseur, définir un nombre k variant entre -5 et 5.

b. Dans le champ de saisie, utiliser la commande `Barycentre` pour définir le point M barycentre de $\{(A,k),(B,1-k)\}$: `M=Barycentre[{A,B},{k,1-k}]`. On peut aussi écrire dans le champ de saisie : `M=k*A+(1-k)*B`.

c. Faire varier k et caractériser, en fonction des signes de k et $1-k$, les parties suivantes de (AB) : le segment $[AB]$, la demi-droite d'origine A ne contenant pas B, la demi-droite d'origine B ne contenant pas A. On notera le résultat sous forme d'un énoncé précis.

2. Soit un triangle ABC.

— A l'aide de curseurs, définir deux nombres m et n variant entre -5 et 5.

— Utiliser la commande `Barycentre` pour définir le point M barycentre de $\{(A,m),(B,n),(C,1-m-n)\}$.

— Définir $p=1-m-n$ dans le champ de saisie. Utiliser l'outil `Texte` pour afficher :

Masse de C : $1-m-n=p$

où p est la valeur numérique du nombre p qu'on choisira en déroulant le menu `Objets` dans la fenêtre du texte.

— Fixer m et faire varier n. Décrire géométriquement l'ensemble auquel M appartient. Donner plusieurs valeurs à m, que peut-on énoncer ?

— Pour quelles valeurs de m le point M peut-il se situer à l'intérieur du triangle ABC ? Si m est l'une de ces valeurs, à quelle condition sur n le point M est-il à l'intérieur du triangle ABC ? Exprimer cette condition en fonction de m. On pourra donner plusieurs valeurs à m.

— Caractériser les points M intérieurs à ABC par les signes de m, n et $(1-m-n)$.

— Procéder de même pour les diverses zones du plan délimitées par les droites (AB), (AC) et (BC).

3. Dodécagone. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier.

— Construire, à l'extérieur de $ABCDEF$, et sur chacun de ses côtés un carré.

— Tracer le dodécagone $\mathcal{P}$ dont les sommets sont les sommets extérieurs des carrés.

— Faire apparaître sur la figure des éléments qui permettent d'affirmer que $\mathcal{P}$ est régulier.

II. TD 8 : Barycentres

1. Examen 2013. Soit un quadrilatère convexe quelconque $ABCD$ et soient I et J les points définis par les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}.$$

a. Écrire I et J comme barycentres de A, B, C et D.

b. Écrire le milieu K de $[IJ]$ comme barycentre de A, B, C et D.

c. Soient L et M les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$. Montrer que K appartient à $[LM]$.

d. Déterminer λ tel que $\overrightarrow{LK} = \lambda\overrightarrow{LM}$.

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère les points suivants :
— le barycentre E de $\{(A,2),(B,1)\}$;
— le barycentre F de $\{(B,2),(C,1)\}$;
— le barycentre G de $\{(C,2),(D,1)\}$;
— le barycentre H de $\{(D,2),(A,1)\}$.

a. Écrire E et G comme des barycentres de A, B, C et D de masse totale $\frac{1}{2}$.

b. Montrer que le milieu M de $[EG]$ est le centre du parallélogramme $ABCD$.

c. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

3. Soit ABC un triangle quelconque et soit G le barycentre de $\{(A,1),(B,-2),(C,4)\}$.

a. Construire le barycentre E de $\{(A,1),(B,-2)\}$.

b. Construire le barycentre F de $\{(B,-2),(C,4))\}$.

c. Montrer que G est l'intersection de (CE) et (AF).

4. Soit un triangle quelconque ABC. Écrire les points suivants comme barycentre des points A, B et C avec, dans chaque cas, une masse totale 1 :
— M est le milieu de $[AB]$;
— P est le milieu de $[AC]$;
— E est le milieu de $[CM]$;
— F est le point d'intersection de (AE) et (BC) ;
— R est le milieu de $[BE]$;
— Q est le milieu de $[MF]$;

Montrer que P, Q et R sont alignés. On écrira $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$ en fonction de $\overrightarrow{QA}$ et $\overrightarrow{QC}$.

5. Examen 2013 (2ème session). Soit $ABCD$ un rectangle. On note I le milieu de $[AB]$ et E le centre de gravité du triangle ABC.

a. Construire le barycentre F de $\{(C,1),(D,3)\}$.

b. Démontrer que le milieu G de $[ED]$ est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,3)\}$.

c. En déduire que G appartient à (IF) et déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IG} = k.\overrightarrow{IF}$.

d. Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}.\overrightarrow{AD}$. Montrer que le milieu de $[BC]$ appartient à la droite (GK).