Université Paris-Sud — L1 MPI S1 2019
Faculté des Sciences d'Orsay — Math 102 : Option de Géométrie

TD 10 : Frises, isométries et groupes

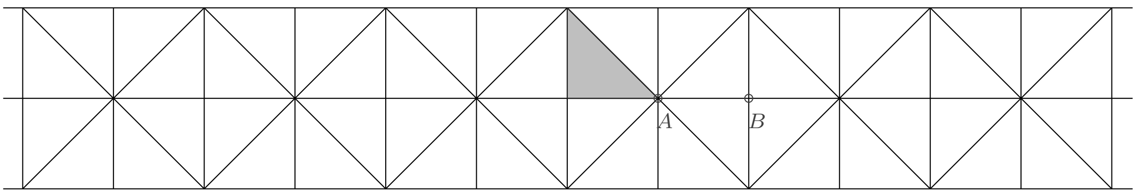
Dans toute la feuille, on considère une bande $\mathcal{B}$ de médiane $\mathcal{D}$, deux points A et B sur $\mathcal{D}$ et des frises dessinées dans la bande $\mathcal{B}$. Par définition, une frise doit être invariante par certaines translations, et plus précisément il doit exister un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ (appelé vecteur minimal) tel que la frise soit invariante par les translations de vecteur $k\overrightarrow{u}$ pour $k \in \mathbf{Z}$ et seulement celles-là.

On explore les "symétries" d'une frise $\mathcal{F}$, c'est-à-dire son groupe d'isométries $G(\mathcal{F})$: il s'agit de l'ensemble des isométries conservant la frise (de la même façon que l'on a défini le groupe des isométries conservant un polygone régulier).

Ce groupe $G(\mathcal{F})$ contient nécessairement des translations et peut contenir des symétries centrales dont le centre appartient à $\mathcal{D}$, des réflexions d'axe $\mathcal{D}$ ou perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et des symétries glissées d'axe $\mathcal{D}$. D'après les résultats du cours, ce sont les **seuls éléments possibles**.

Les règles du jeu : Pour dessiner une frise, on noircira des triangles dans la grille proposée, en transformant le triangle noir donné (motif de la frise) par les isométries imposées (voir un exemple au 5).

1. Dessiner une frise dont le groupe d'isométries ne contient que des translations. Préciser un vecteur minimal $\overrightarrow{u}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et le représenter.



Ecrire tous les éléments de $G(\mathcal{F})$ en fonction de $t_{\overrightarrow{u}}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

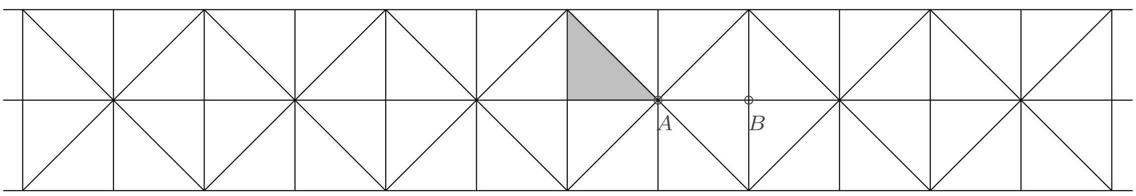
2. On suppose que $G(\mathcal{F})$ contient des translations et la symétrie centrale de centre A notée σ_A. Soit $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB}$ un vecteur minimal de $\mathcal{F}$.

a. Montrer que σ_B appartient à $G(\mathcal{F})$.

b. Utiliser le principe de conjugaison pour déterminer d'autres symétries centrales de $G(\mathcal{F})$. Préciser leurs centres (les décrire comme des translatés de A) et les représenter sur la grille ci-dessous.

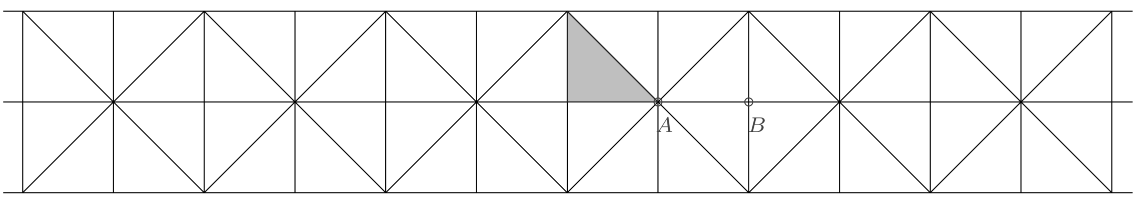
c. Existe-t-il d'autres centres de symétrie ?

d. Dessiner sur cette grille une frise dont le groupe d'isométries ne contient que des translations et des symétries centrales. Justifier le dessin.



3. Soit $\mathcal{F}$ une frise dont le groupe d'isométries contient $\sigma_{\mathcal{D}}$, la réflexion d'axe $\mathcal{D}$, mais aucune symétrie centrale.

a. Dessiner une telle frise et préciser un vecteur minimal $\overrightarrow{u}$.



b. Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}}$ est l'unique réflexion contenue dans $G(\mathcal{F})$.

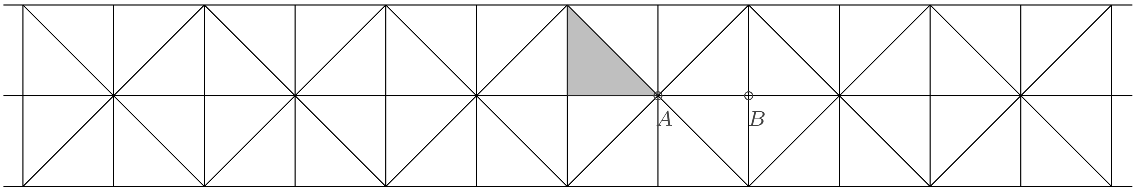
c. Décrire tous les éléments de $G(\mathcal{F})$. Le groupe $G(\mathcal{F})$ est-il commutatif ?

4. On cherche une frise $\mathcal{F}$ dont le groupe d'isométries ne contient que des translations et des réflexions. On suppose qu'une telle frise existe.

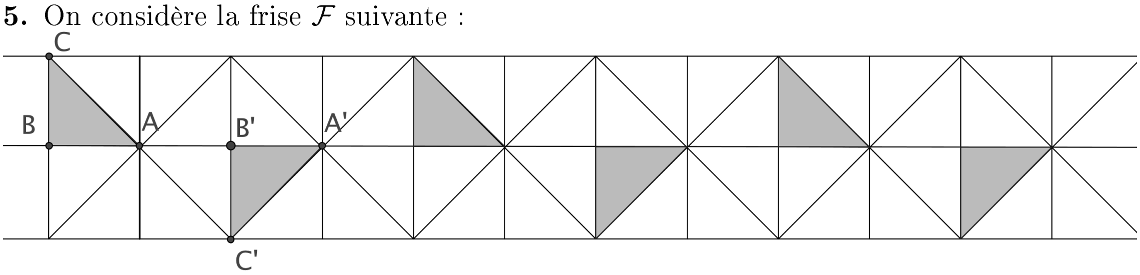
a. Montrer que, dans ce cas, les axes des réflexions qui conservent $\mathcal{F}$ sont perpendiculaires à $\mathcal{D}$.

b. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur minimal de $\mathcal{F}$ et Δ l'axe d'une réflexion appartenant à $G(\mathcal{F})$. Déterminer toutes les réflexions contenues dans $G(\mathcal{F})$.

c. Conclure à l'aide d'un dessin (choisir $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB}$).



5. On considère la frise $\mathcal{F}$ suivante :



a. Préciser un vecteur minimal $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{F}$.

b. Justifier que $G(\mathcal{F})$ ne contient aucune réflexion.

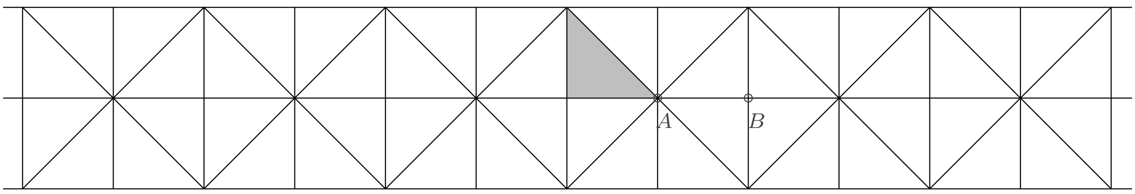
c. Déterminer l'isométrie φ qui transforme A en A', B en B' et C en C'.

d. Montrer : $t_{\overrightarrow{u}} = \varphi \circ \varphi$. En déduire que $t_{\overrightarrow{u}}$ et φ commutent, puis que φ est une isométrie de $\mathcal{F}$.

e. Décrire tous les éléments de $G(\mathcal{F})$ en fonction de φ.

6. Maintenant, on recherche une frise ayant le "plus" de "symétries", c'est-à-dire que son groupe d'isométries contient des éléments de toutes sortes : translations, réflexions (dont σ_{Δ_A}, où Δ_A est la droite verticale passant par A), symétries centrales (dont σ_A) et symétries glissées.

a. En dessiner une. On la nomme $\mathcal{F}$.



b. Préciser un vecteur minimal $\overrightarrow{u}$, les axes des réflexions et les centres de symétrie.

c. Ecrire en fonction de $t_{\overrightarrow{u}}$, $\sigma_{\mathcal{D}}$ et σ_{Δ_A}, toutes les symétries centrales et toutes les réflexions contenues dans $G(\mathcal{F})$.

7. Cette dernière frise a-t-elle le même groupe d'isométries que l'une des précédentes ? On étudiera les axes et centres de symétries.