Correction TD 11 - Exercices 4, 5 et 6

Florian Livet

1. Correction exercice 4

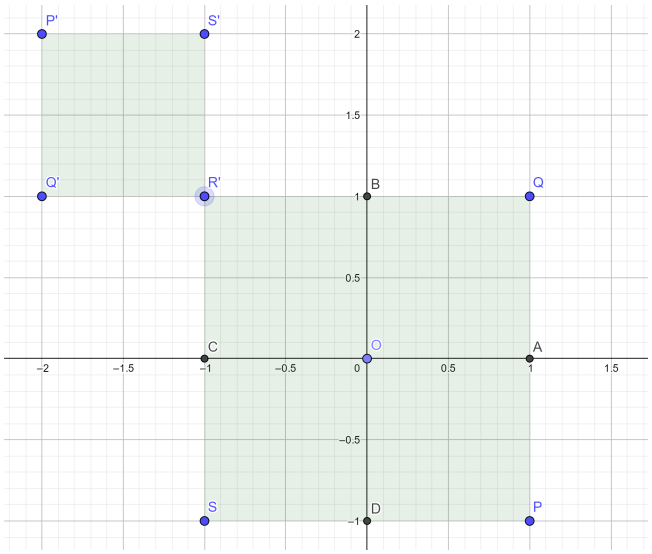

Figure 1: Figure Geogebra de l'exercice 4

a) On a $PQ = |z_Q - z_P| = |q - p| = |(1+i) - (1-i)| = |2i| = 2$.
De même, on montre que $QR = RS = SP = 2$.
Donc tous les côtés sont égaux (ce qui ne suffit pas pour conclure, il faut aussi montrer que les angles sont égaux).
On a $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}\right) = \arg\left(\frac{s-p}{q-p}\right) = \arg\left(\frac{(-1-i)-(1-i)}{(1+i)-(1-i)}\right) = \arg\left(\frac{-2}{2i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$.
De même, on montre que $\left(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}\right) = \left(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RQ}\right) = \left(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SR}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Donc $PQRS$ est un carré et son centre est le milieu d'une des diagonales qui a pour affixe : $\frac{z_R+z_P}{2} = \frac{r+p}{2} = \frac{(-1+i)+(1-i)}{2} = 0$. Ainsi, son centre est l'origine du repère O.

b) L'image de $PQRS$ par l'homothétie de centre R et de rapport $-\frac{1}{2}$ est tracée sur la Figure 1.

c) Soit r une rotation qui conserve $PQRS$. On connaît l'écriture complexe d'une rotation : $r(z) = az + b$ avec $|a| = 1$.
Comme r est une isométrie qui conserve $PQRS$ alors r conserve l'isobarycentre de $PQRS$ (c'est-à-dire le centre du carré) : $r(O) = O$. Donc le point O est le centre de cette rotation. On en déduit que $r(0) = 0 \iff b = 0$.
Maintenant,

- L'image du point P est P : $r(z) = z$.
- L'image du point P est Q : $r(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}z$.
- L'image du point P est R : $r(z) = -z$.
- L'image du point P est S : $r(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$.

d) Soit s une réflexion qui conserve $PQRS$. On connaît l'écriture complexe d'une réflexion : $s(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.
Comme s est une isométrie qui conserve $PQRS$ alors s conserve l'isobarycentre de $PQRS$ (c'est-à-dire le

centre du carré) : $s(O) = O$. Donc l'axe de réflexion de s passe par O.
Maintenant,

- L'image du point P est P : $r(z) = -i\bar{z}$.
- L'image du point P est Q : $r(z) = \bar{z}$.
- L'image du point P est R : $r(z) = i\bar{z}$.
- L'image du point P est S : $r(z) = -\bar{z}$.

e) On cherche $a, b \in (C)$ tels que $s_1(z) = az + b$ avec $s_1(O) = O$ et $s_1(A) = P$. On résout donc le système :

$$\begin{cases} a \times 0 + b = 0 \\ a \times \frac{p+q}{2} + b = p \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 - i \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $s_1(z) = (1 - i)z$ et on a :

- $s_1(A) = P$.
- $s_1(B) = (1 - i)\frac{q+r}{2} = (1 - i)i = 1 + i = Q$.
- $s_1(C) = (1 - i)\frac{r+s}{2} = (1 - i)(-1) = -1 + i = R$.
- $s_1(D) = (1 - i)\frac{s+p}{2} = (1 - i)\frac{-2i}{2} = -1 - i = S$.

f) s_2 est la similitude de centre Q de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ donc son écriture complexe est : $s_2(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_Q) + z_Q = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(z - 1 - i) + 1 + i = \frac{1+i}{2}z + 1$ et on a :

- $s_2(P) = \frac{1+i}{2}p + 1 = \frac{1+i}{2}(1 - i) + 1 = 1 + 1 = 2$.
- $s_2(Q) = Q$.
- $s_2(R) = \frac{1+i}{2}r + 1 = \frac{1+i}{2}(-1 + i) + 1 = -1 + 1 = O$.
- $s_2(S) = \frac{1+i}{2}s + 1 = \frac{1+i}{2}(-1 - i) + 1 = -i + 1 = P$.

g) On a $s_2 \circ s_1(z) = s_2((1 - i)z) = \frac{(1+i)(1-i)}{2}z + 1 = z + 1$.
Donc $s_2 \circ s_1$ est une translation de vecteur d'affixe 1.

2. Correction exercice 5

a) $\Phi(z) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 2(1 + i\sqrt{3})$

Calculons le module de a : $|\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})| = 1$. Donc c'est une isométrie et au vu de l'écriture complexe de Φ, c'est soit une réflexion, soit une symétrie glissée.

Pour savoir dans quel cas on est, on calcule $a\bar{b} + b$: $\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})2(1 - i\sqrt{3}) + 2(1 + i\sqrt{3}) = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0$. Donc c'est une réflexion.

Pour trouver l'axe d'une réflexion, on peut chercher l'ensemble des points fixes (c'est une droite) en résolvant $\Phi(z) = z$:

$\iff \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 2(1 + i\sqrt{3}) = z$

On écrit $z = x + iy$:

$\iff \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(x - iy) + 2(1 + i\sqrt{3}) = x + iy$

On regroupe les termes en partie réelle / partie imaginaire :

$\iff \left[\frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) + 2\right] + i\left[\frac{1}{2}(-y - \sqrt{3}x) + 2\sqrt{3}\right] = [x] + i[y]$

On identifie de chaque côté de l'égalité et on obtient le système :

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) + 2 \\ y = \frac{1}{2}(-y - \sqrt{3}x) + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) + 2 \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Le fait d'obtenir $x = x$ dans la première ligne n'est pas étonnant car on sait qu'il existe une infinité de points fixes car Φ est une réflexion.

Donc la droite de réflexion est caractérisée par l'équation $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\Psi(z) = i\sqrt{2}\bar{z} - 1 + i\sqrt{2}$

Calculons le module de a : $|i\sqrt{2}| = \sqrt{2} \neq 1$. Donc Ψ est la composée d'une homothétie h de rapport $\sqrt{2}$ et de centre I (déterminé ci-dessous) avec une réflexion s.

Dans un premier temps, cherchons son centre : $\Psi(z) = z$

$\iff i\sqrt{2}\bar{z} - 1 + i\sqrt{2} = z$

Comme au-dessus, on écrit $z = x + iy$:

$\iff i\sqrt{2}(x - iy) - 1 + i\sqrt{2} = x + iy$

On regroupe les termes en partie réelle / partie imaginaire :

$\iff \left[\sqrt{2}y - 1\right] + i\left[\sqrt{2}x + \sqrt{2}\right] = [x] + i[y]$

On identifie de chaque côté de l'égalité et on obtient le système :

$$\iff \begin{cases} x = \sqrt{2}y - 1 \\ y = \sqrt{2}x + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc son centre est I d'affixe -1 et on a l'équation complexe de $h(z) = \sqrt{2}(z + 1) - 1$.

On sait que Ψ est la composée de l'homothétie h avec la réflexion s : $\Psi = h \circ s$, on en déduit donc $s = h^{-1} \circ \Psi$.

Or l'inverse d'une homothétie est une homothétie de même centre et de rapport l'inverse du rapport de l'homothétie initiale, donc $h^{-1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z + 1) - 1$.

Donc $s(z) = h^{-1} \circ \Psi(z) = h^{-1}(i\sqrt{2}\bar{z} - 1 + i\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\sqrt{2}\bar{z} - 1 + i\sqrt{2} + 1) - 1 = i\bar{z} + i - 1$.

C'est bien l'équation d'une réflexion car $a\bar{b} + b = 0$. On cherche l'équation de la droite de réflexion en résolvant à nouveau $s(z) = z$.

On applique exactement ce qui a été fait en a) et on trouve la droite d'équation : $y = x + 1$.

Pour résumer, Ψ est la **composée d'une homothétie** de rapport $\sqrt{2}$ et de centre -1 **avec une réflexion** dont la droite a pour équation $y = x + 1$.

3. Correction exercice 6

On peut faire cet exercice de plusieurs manières, je vous renvoie au TD9 où nous avions traîté un exercice similaire. J'utilise ici les nombres complexes pour résoudre cet exercice.

a) (i) Dans le repère proposé par l'énoncé, on a : $z_O = 0$ et $z_A = 1$.
Comme $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O, on sait que l'angle au centre entre deux sommets consécutifs vaut $\frac{\pi}{3}$, donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$ et on en déduit $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $OA = OB = 1$ et comme $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{3}$ alors OAB est équilatéral.

(ii) De même, on a $z_F = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_A = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On constate alors immédiatement que B et F ont même partie réelle et que le milieu de BF a pour affixe $\frac{1}{2}$.
Or le milieu de OA est aussi le point d'affixe $\frac{1}{2}$.
Donc BF coupe perpendiculairement OA en son milieu, c'est bien la médiatrice.

(iii) A' est le point d'intersection des droites (AC) et (BF).
On vient de le voir, la droite (BF) a pour équation $x = \frac{1}{2}$.
Maintenant, la droite (AC) a pour équation $y = ax + b$ et passe par A et C donc on trouve $a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = y_C - ax_C = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Donc le point A' a pour affixe $z_{A'} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.
Finalement, A' est le centre de OAB si et seulement si $z_{A'} = \frac{z_O + z_A + z_B}{3}$.
Or $\frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{0+1+1/2+i\sqrt{3}/2}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6} = z_{A'}$.

(iv) On a $OA = |z_A - z_o| = 1$ et $OA' = |z_{A'} - z_O| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Donc $\sqrt{3}OA' = OA$.

b) s est la similitude directe de centre O qui envoie A sur A'. s est donc la composée d'une homothétie de centre O et de rapport $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ avec une rotation de centre O et d'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{6}$ car A' est le centre de OAB. L'écriture complexe de s est donc $s(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} z$.
Il est clair que l'image de B par s est B' ... Donc l'image de l'hexagone $ABCDEF$ est bien $A'B'C'D'E'F'$.

c) L'image du cercle de centre O et passant par A' par l'homothétie de centre O et de rapport 3 est un cercle de centre O et de rayon $3OA'$.

d) Les points A'', B'', C'', D'', E'' et F'' sont tous sur le cercle de centre O et de rayon $3OA'$ donc les points sont cocycliques. Montrons simplement que les angles au centre de deux sommets consécutifs vallent $\frac{\pi}{3}$.
On a vu que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{6}$ et de même on a $\left(\overrightarrow{OF'}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{6}$.
Or les points O, A' et A'' sont alignés et les points O, F' et F'' sont alignés, donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OF''}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{6}$.
Or $\left(\overrightarrow{OF''}, \overrightarrow{OA''}\right) = \left(\overrightarrow{OF''}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
On conclut par symétries que tous les angles au centre sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et donc $A''B''C''D''E''F''$ est régulier.

e) (i) s' est la similitude directe de centre O qui envoie A sur A''. s' est donc la composée d'une homothétie de centre O et de rapport $\frac{OA''}{OA} = \frac{OA''}{OA'}\frac{OA'}{OA} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ avec une rotation de centre O et d'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA''}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{6}$. L'écriture complexe de s' est donc $s'(z) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z$.

(ii) L'image du cercle de centre O et de rayon OA par la similitude s' est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}OA$. C'est donc le même cercle qu'en question c).

(iii) $s'(z_{A'}) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} z_{A'} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_B$ donc $s'(A') = B$.
De même, $s'(B') = C$.

(iv) On a, par construction, les points A, A', B' et C alignés.
On a également leur image : $s'(A') = B$, $s'(B') = C$, $s'(A) = A''$ et $s'(C) = C''$.
Or une similitude conserve l'alignement donc A'', B, C et C'' sont alignés.