La troisième interrogation WIMS aura lieu en TP la semaine prochaine, elle pourra comporter des exercices parmi les cinq feuilles d'exercices WIMS.

Complément de cours : Si φ est une similitude du plan qui n'est pas une isométrie, alors elle possède un unique point fixe C et il existe une unique homothétie h de centre C et de rapport positif et une unique isométrie ψ tels que $\psi(C) = C$ et $\varphi = h \circ \psi = \psi \circ h$. (Si φ est une similitude directe, les éléments caractéristiques de φ sont le centre C, le rapport de l'homothétie h et l'angle de la rotation ψ.)

I. TP/TD 11 : Similitudes et polygones

En TP, commencer à réfléchir aux premiers exercices en faisant des observations dans Geogebra.

1. **Un théorème de Newton.** Dans le plan, on considère quatre points distincts B, B', C et C' tels que les droites (BC) et $(B'C')$ soient parallèles et les droites (BB') et (CC') (respectivement (BC') et (CB')) soient sécantes en A (resp. en G).
a. Faire la figure.
b. Soit h_A l'homothétie de centre A qui envoie B sur B'. Quelle est l'image de C par h_A ?
c. Soit h_G l'homothétie de centre G qui envoie B' sur C. Quelle est l'image de C' par h_G ?
d. Déterminer l'application $\phi = h_G \circ h_A$.
e. Montrer que la droite (AG) est invariante par ϕ. En déduire que la droite (AG) passe par les milieux D et D' de $[BC]$ et de $[B'C']$. Ainsi A, D et D' sont alignés.

2. Soit ABC un triangle direct. On construit, sur les côtés du triangle, extérieurement à celui-ci, les triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Soient P, Q et R leurs centres respectifs.
a. A l'aide d'un logiciel de géométrie, proposer une conjecture sur le triangle PQR.
b. Soit s la similitude directe de centre A qui transforme Q en C. Préciser son rapport et son angle. Même question pour la similitude directe s' de centre B qui transforme C en P.
c. Quelle est la nature de la transformation $s' \circ s$? Déterminer ses éléments caractéristiques. En déduire une démonstration de la conjecture émise en a.

3. Soit ABC un triangle. On construit sur les côtés de ABC, et à l'extérieur, des triangles $A'BC$, $B'CA$ et $C'AB$ isocèles et rectangles en A', B' et C' respectivement. On note M le milieu de $[BC]$.
a. A l'aide d'un logiciel de géométrie, proposer une conjecture sur le triangle $MB'C'$.
b. Déterminer la similitude directe s de centre C qui envoie B' sur A.
c. Déterminer la similitude directe s' de centre B qui envoie A sur C'.
d. On pose $\varphi = s' \circ s$.
(i) Déterminer $\varphi(B')$ et $\varphi(M)$.
(ii) Quels sont le type et les éléments caractéristiques de φ ?
(iii) En déduire une démonstration de la conjecture faite à la première question.

4. Examen 2013. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points P, Q, R et S d'affixes respectives $p = 1 - \mathrm{i}$, $q = 1 + \mathrm{i}$, $r = -1 + \mathrm{i}$ et $s = -1 - \mathrm{i}$. On note A, B, C et D les milieux respectifs de $[PQ]$, $[QR]$, $[RS]$ et $[SP]$ et a, b, c et d les affixes respectives de A, B, C et D.
a. Montrer que $PQRS$ est un carré de centre O.
b. Construire l'image de $PQRS$ par $h(R, -\frac{1}{2})$.
c. Donner la forme complexe des rotations qui conservent $PQRS$.
d. Donner la forme complexe des réflexions qui conservent $PQRS$.
e. Donner la forme complexe de la similitude directe s_1 de centre O qui envoie A sur P. Quelle est l'image de $ABCD$ par s_1 ?
f. Donner les affixes des images des sommets de $PQRS$ par la similitude s_2 de centre Q, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et les placer sur la figure.
g. Quelle est la nature de $s_2 \circ s_1$? Donner ses éléments caractéristiques.

5. Examen 2013. Déterminer la nature des similitudes suivantes et leurs éléments caractéristiques qu'on placera sur des figures.

$$\phi(z) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\overline{z} + 2(1 + i\sqrt{3}) \text{ et } \psi(z) = i\sqrt{2}\overline{z} - 1 + i\sqrt{2}$$

6. Examen 2014. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 1 et les hexagones convexes réguliers directs $\mathcal{H} = ABCDEF$ et $\mathcal{H}' = A'B'C'D'E'F'$ comme sur la figure : le point A' est l'intersection de (AC) et (FB), le point B' est l'intersection de (BD) et (AC), de même pour C', D', E' et F'. Le centre des hexagones est le point O. On note $\mathcal{C}(O, A)$ le cercle de centre O passant par A et $\mathcal{C}(O, A')$ le cercle de centre O passant par A'.

a. Montrer que

(i) le triangle OAB est équilatéral ;

(ii) la droite (BF) est la médiatrice de $[OA]$;

(iii) le point A' est le centre de OAB.

(iv) l'égalité : $OA = \sqrt{3}.OA'$.

b. Déterminer la similitude directe s de centre O qui envoie A sur A'. Donner sa décomposition canonique. Quelle est l'image de $\mathcal{H}$ par s ?

c. Placer l'image A'' du point A' par l'homothétie de centre O et de rapport 3 en justifiant la construction. En déduire l'image de $\mathcal{C}(O, A')$ par $h(O, 3)$.

d. Tracer l'hexagone $\mathcal{H}'' = A''B''C''D''E''F''$ image de $\mathcal{H}'$ par $h(O, 3)$ et montrer que $\mathcal{H}''$ est régulier.

e. Etude d'une similitude.

(i) Déterminer s', la similitude directe de centre O qui envoie A sur A''.

(ii) Quelle est l'image de C par s' ?

(iii) Déterminer $s'(A')$ et $s'(B')$.

(iv) En déduire que A'', B, C et C'' sont alignés.