Université Paris-Saclay | M2 Analyse, arithmétique, géométrie
Année universitaire 2021/2022 | Géométrie algébrique (E. Macrì, J. Riou)

Feuille d'exercices n°4

Exercice I (Anneaux de Dedekind)

Soit A un anneau de Dedekind. (A est noethérien intègre, intégralement clos dans son corps des fractions, et tout idéal premier non nul est maximal. Cela implique que les localisés de A en ses idéaux maximaux sont des anneaux de valuation discrète.)

Soit U un ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$.

(1) Montrer que le morphisme $U \to \mathrm{Spec}(A)$ est affine puis que U est affine.

(2) Donner un énoncé plus précis dans le cas particulier où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Exercice II (Catégories localement noétheriennes)

Soit X un schéma noethérien. On dira ici que X vérifie la propriété $(\star)$ si pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ il existe une famille $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ de sous-faisceaux cohérents de $\mathscr{F}$ telle que le morphisme évident $\oplus_{i\in I}\mathscr{F}_i \to \mathscr{F}$ soit un épimorphisme (i.e. surjectif).

(1) Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Montrer que toute suite croissante $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-faisceaux cohérents de $\mathscr{F}$ est stationnaire.

(2) Montrer que les schémas affines vérifient $(\star)$.

(3) Supposons que $U \to X$ soit une immersion ouverte et que X vérifie $(\star)$. Montrer que pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathscr{F}$ sur X et tout sous-faisceau cohérent $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}_{|U}$, il existe un sous-faisceau cohérent $\widetilde{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{F}$ tel que $\widetilde{\mathscr{G}}_{|U} = \mathscr{G}$.

(4) Supposons que X soit un schéma noethérien dont deux ouverts X_1 et X_2 forment un recouvrement. Montrer que si X_1, X_2 vérifient $(\star)$, alors X aussi.

(5) Montrer que tout schéma noethérien vérifie $(\star)$.

(6) Montrer que si U est un ouvert d'un schéma noethérien X, alors tout faisceau cohérent sur U peut s'étendre en un faisceau cohérent sur X.

Exercice III (Points de l'espace projectif)

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$. Pour tout schéma T, on note $\mathscr{P}_n(T)$ l'ensemble des sous-faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}_T^{n+1}$ tels que le quotient $\mathscr{L} := \mathscr{O}_T^{n+1}/\mathscr{H}$ soit localement libre de rang 1.

(1) Montrer que $T \longmapsto \mathscr{P}_n(T)$ est un foncteur contravariant.

(2) Soit T un schéma. Soit $\underline{t} = (t_0, \dots, t_n) \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T)^{n+1}$ tel que le morphisme correspondant $\theta\colon T \to \mathbf{A}^{n+1} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T_0, \dots, T_n])$ se factorise par l'ouvert $\mathbf{A}^{n+1} - O$ où $O = V(T_0, \dots, T_n)$.

(2a) Montrer que $\mathscr{H}_{\underline{t}}$ défini comme le noyau du morphisme évident $\underline{t}\colon \mathscr{O}_T^{n+1} \to \mathscr{O}_T$ est un élément de $\mathscr{P}_n(T)$, que l'on notera $[t_0 : \cdots : t_n]$.

(2b) Montrer que si $\lambda \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T)^\times$, alors $[\lambda t_0 : \cdots : \lambda t_n] = [t_0 : \cdots : t_n]$.

(2c) Montrer que si $\underline{t}'$ vérifie les mêmes hypothèses, alors on a l'égalité de morphismes $[t_0 : \cdots : t_n] = [t'_0 : \cdots : t'_n]$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \Gamma(T, \mathscr{O}_T)^\times$ tel que pour tout i, $t'_i = \lambda t_i$.

(3) Pour tout schéma T, on note $\mathscr{P}_n^{\text{naïf}}(T) \subset \mathscr{P}_n(T)$ l'ensemble des $\mathscr{H}$ tels que $\mathscr{O}_T^{n+1}/\mathscr{H}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_T$. Montrer que $\mathscr{P}_n^{\text{naïf}}(T)$ est exactement l'ensemble des $\mathscr{H}_{\underline{t}}$ définis précédemment.

(4) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Soit T un schéma. On note $\mathscr{U}_i(T)$ l'ensemble des $\mathscr{H} \in \mathscr{P}_n(T)$ tels que si on note $\iota_i\colon \mathscr{O}_T \to \mathscr{O}_T^{n+1}$ l'inclusion du i-ème facteur, alors le morphisme composé $\mathscr{O}_T \xrightarrow{\iota_i} \mathscr{O}_T^{n+1} \to \mathscr{O}_T^{n+1}/\mathscr{H}$ est un isomorphisme.

(4a) Montrer que $\mathscr{U}_i(T) \subset \mathscr{P}_n^{\text{naïf}}(T)$ et décrire très concrètement son image.

(4b) Montrer que $T \longmapsto \mathscr{U}_i(T)$ est représentable par un schéma, que l'on notera U_i.

(5) Montrer que si $i \neq j$, alors $T \longmapsto \mathscr{U}_i(T) \cap \mathscr{U}_j(T)$ est représentable par un schéma U_{ij} que l'on peut identifier à la fois à un ouvert de U_i et à un ouvert de U_j.

(6) On note $\mathbf{P}^n$ le schéma obtenu par recollement des schémas affines U_i pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

(6a) Soit T un schéma. Montrer que les préfaisceaux sur T qui à un ouvert V de T associent $\mathbf{P}^n(V) := \mathrm{Hom}(V, \mathbf{P}^n)$ (resp. $\mathscr{P}_n(V)$) sont des faisceaux.

(6b) Montrer que l'on a une bijection fonctorielle $\mathbf{P}^n(T) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}_n(T)$ pour tout schéma T.

(7) Notons $K := \mathbf{Q}[\alpha]$ avec $\alpha := \sqrt{-5}$. Montrer que le point $[1 + \alpha : 2] \in \mathbf{P}^1(K)$ s'étend en un élément de $\mathbf{P}^1(\mathscr{O}_K)$ qui ne peut pas s'écrire globalement sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ en termes de coordonnées homogènes.

Exercice IV (Cubique de Fermat)

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 3. On note C la cubique dans $\mathbf{A}^3_k$ définie par l'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 1 = 0$$

(1) Montrer que C est un schéma régulier.
(2) On note $\overline{C} \subset \mathbf{P}^3_k$ la cubique projective définie par l'équation homogène $X^3 + Y^3 + Z^3 + T^3 = 0$. Montrer que $\overline{C}$ est un schéma régulier.

Exercice V (Constructibilité)

Si S est un schéma noethérien, une partie constructible de S est une réunion finie de parties localement fermées de S. Les parties constructibles sont stables par intersections finies, réunions finies, passage au complémentaire. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de constructibilité de Chevalley selon lequel si $f\colon X \to S$ est un morphisme de type fini entre schémas noethériens, alors l'image d'une partie constructible de X est une partie constructible de S.
(1) Soit B une algèbre de type fini sur un anneau noethérien A. On suppose que A et B sont intègres, et que $A \to B$ est injectif.
(1a) Rappeler pourquoi, si A est un corps, alors il existe un sous-anneau $B' \simeq A[X_1, \ldots, X_n]$ et tel que B soit fini sur B'.
(1b) En général, montrer qu'il existe $f \in A - \{0\}$, et B' une sous-$A[1/f]$-algèbre de $B[1/f]$ telle que $B' \simeq A[1/f][X_1, \ldots, X_n]$ et que $B[1/f]$ soit finie sur B'.
(1c) En déduire que l'image du morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ contient un ouvert dense.
(2) Montrer que si $f\colon X \to S$ est un morphisme de type fini dominant entre schémas noethériens intègres, alors $f(X)$ contient un ouvert dense de S.
(3) Soit S un schéma noethérien. Soit $\mathscr{X}$ un ensemble de fermés de S. On suppose que si Z est un fermé de S tel que pour tout fermé $Z' \subsetneq Z$, on a $Z' \in \mathscr{X}$, alors $Z \in \mathscr{X}$. Montrer que tout fermé de S appartient à $\mathscr{X}$. (C'est le principe de la récurrence noethérienne.)
(4) Montrer que si $f\colon X \to S$ est un morphisme de type fini entre schémas noethériens, alors $f(X)$ est contructible.
(5) Montrer que si $f\colon X \to S$ est un morphisme de type fini dominant entre schémas noethériens, alors l'image d'une partie constructible de X est une partie constructible de S.