Université Paris-Saclay — M2 Analyse, arithmétique, géométrie
Année universitaire 2021/2022 — Géométrie algébrique (E. Macrì, J. Riou)

Feuille d'exercices n°6

Exercice I (Recouvrement de Proj)

Soit $S_\star$ un anneau gradué. Soit $(f_a)_{a\in A}$ une famille d'élément homogènes de degrés strictement positifs. On note I l'idéal engendré par les éléments f_a pour tout $a \in A$.

(1) Déterminer le complémentaire de $\cup_{a\in A} D_+(f_a)$.

(2) À quelle condition nécessaire et suffisante est-ce que $\mathrm{Proj}(S_\star) = \cup_{a\in A} D_+(f_a)$?

Exercice II (Points de l'espace projectif)

(1) Soit $B_\star$ un anneau gradué. Soit $f\colon \mathbf{Z}[X_0,\dots,X_n] \to B_\star$ un morphisme d'anneaux gradués (c'est-à-dire que les images des X_i sont dans B_1). Est-il toujours vrai que f induit un morphisme de schémas $\mathrm{Proj}(B_\star) \to \mathrm{Proj}(\mathbf{Z}[X_0,\dots,X_n]) = \mathbf{P}^n$? Si ce n'est pas le cas, quel est le bon énoncé ?

(2) Soit A un anneau. Soit $\underline{x} = (x_0,\dots,x_n) \in A^{n+1}$. On définit la A-algèbre graduée $B_\star := A[T]$ (avec $T \in B_1$) et le morphisme $f\colon \mathbf{Z}[X_0,\dots,X_n] \to B_\star$ tel que $f(X_i) = x_iT$. À quelle condition $(\star)$ le morphisme f induit-il un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(A) \simeq \mathrm{Proj}(B_\star) \to \mathbf{P}^n$?

(Pour faire le lien avec une autre construction de $\mathbf{P}^n$, si la condition $(\star)$ est vérifiée, on peut noter $[x_0 : \dots : x_n]$ le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{P}^n$ associé.)

Exercice III (Éclatement)

Soit $d \geq 1$. On note $A := \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_d]$ et $I := (X_1,\dots,X_d)$. On définit $B := \oplus_{n\in\mathbf{N}} I^nT^n \subset A[T]$. L'anneau B est gradué, la partie de degré n étant I^nT^n. On note $X := \mathrm{Proj}(B)$: c'est l'éclatement de l'origine dans l'espace affine de dimension d.

Montrer que X peut être recouvert par des ouverts affines isomorphes à $\mathrm{Spec}(A)$.

Exercice IV (Éclatement)

On note $A := \mathbf{C}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ et $I := (X,Y) \subset A$. Déterminer l'éclatement de $\mathrm{Spec}(A)$ en l'idéal I.

Exercice V (Fonctions invariantes par similitude)

(1) Montrer que la transformation naturelle $\mathrm{GL}_n(A) \times M_n(A) \to M_n(A)$ qui à (P, M) associe PMP^{-1} pour tout anneau A est représentable par un morphisme de schémas $c\colon \mathrm{GL}_n \times M_n \to M_n$.

On appellera fonction invariante par conjugaison (sur les matrices de taille n) tout morphisme $f\colon M_n \to \mathbf{A}^1$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n \times M_n \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "c"] & M_n \arrow[d, "f"] \\ M_n \arrow[r, "f"] & \mathbf{A}^1 \end{tikzcd}$$

(2) Soit f une fonction invariante par conjugaison. Notons D la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(X_1,\dots,X_n) \in M_n(\mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n])$. Montrer que $f(D) \in \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$ est un polynôme symétrique.

(3) Montrer que tout polynôme symétrique de $\mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]$ est de la forme $f(D)$ pour une unique fonction invariante par conjugaison $f\colon M_n \to \mathbf{A}^1$.

Exercice VI (Grassmanniennes)

Soit S un schéma. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_S$-Module localement libre de rang n. Soit $r \in \{0,1,\dots,n\}$.

On note ici $\mathrm{Gr}_{r,\mathscr{E}}$ le S-schéma tel que pour tout S-schéma $p\colon X \to S$, on ait une bijection fonctorielle entre $\mathrm{Gr}_{r,\mathscr{E}}(X)$ et l'ensemble des sous-faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{F} \subset p^\star\mathscr{E}$ tels que $p^\star\mathscr{E}/\mathscr{F}$ soit localement libre de rang $n-r$.

(1) Construire un isomorphisme canonique de S-schémas $\mathrm{Gr}_{r,\mathscr{E}} \simeq \mathrm{Gr}_{n-r,\mathscr{E}^\star}$ où $\mathscr{E}^\star := \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{O}_X)$.

(2) Montrer que $\mathrm{Gr}_{1,\mathscr{E}} \simeq \mathbf{P}(\mathscr{E}^\star) := \mathrm{Proj}(\oplus_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{S}^n\mathscr{E}^\star)$.

(3) Montrer que l'application $\mathscr{F} \longmapsto \wedge^r\mathscr{F}$ définit un morphisme de schémas $\mathrm{Gr}_{r,\mathscr{E}} \to \mathrm{Gr}_{1,\wedge^r\mathscr{E}}$ qui est une immersion fermée.

(4) Montrer que si $\mathscr{E} := \mathscr{O}_S^n$, alors $\mathrm{Gr}_{r,\mathscr{E}}$ s'identifie à un sous-schéma fermé d'un espace projectif sur S.