Feuille d'exercices n°8

Exercice I (Automorphismes de $\mathbf{P}^n$)

Soit $n \geq 0$. On rappelle que $\mathbf{P}^n$ est le schéma dont le foncteur des points est tel que pour tout schéma X, $\mathbf{P}^n(X)$ soit l'ensemble des sous-faisceaux quasi-cohérents $\mathscr{H} \subset \mathscr{O}_X^{n+1}$ tels que le quotient $\mathscr{O}_X^{n+1}/\mathscr{H}$ soit localement libre de rang 1.

Soit A un anneau. On note $\mathbf{P}^n_A := \mathbf{P}^n \times \mathrm{Spec}(A)$. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}_{n+1}(A)$.

(1) Expliquer comment φ induit naturellement un automorphisme φ_X de $\mathscr{O}_X^{n+1}$ pour tout A-schéma X.

Pour tout A-schéma X, on définit une transformation naturelle $f\colon \mathbf{P}^n(X) \to \mathbf{P}^n(X)$ en posant $f(\mathscr{H}) := \varphi_X(\mathscr{H})$.

(2) Montrer que f est un automorphisme du schéma $\mathbf{P}^n$ et que cette construction induit un morphisme de groupes $\mathrm{GL}_{n+1}(A) \to \mathrm{Aut}_A(\mathbf{P}^n_A)$.

(3) Déterminer le noyau du morphisme $\mathrm{GL}_{n+1}(A) \to \mathrm{Aut}_A(\mathbf{P}^n_A)$.

Exercice II (Fibrés en droites sur $\mathbf{P}^n$)

On fixe k un corps [1].

Soit $n \geq 1$. On considère l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k := \mathrm{Proj}(k[X_0, \dots, X_n])$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on note U_i l'ouvert $D_+(X_i)$ que l'on identifie au spectre de la k-algèbre A_i de polynômes dont les indéterminées sont notées $\frac{X_j}{X_i}$ pour $j \neq i$. Pour $i \neq j$, on notera $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $\mathbf{P}^n_k$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on note L_i le A_i-module associé à $\mathscr{L}$.

On note $u\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathbf{P}^n_k$ le morphisme correspondant au point de coordonnées homogènes $[1 : \cdots : 1]$.

(1) Montrer que le faisceau inversible $u^\star \mathscr{L}$ est trivial. On notera t_u une trivialisation.

(2) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Montrer qu'il existe une unique trivialisation t_i de $\mathscr{L}_{|U_i}$ qui soit compatible à t_u.

(3) Pour $i \neq j$, montrer qu'il existe un unique $s_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathscr{O})$ tel que $t_{i|U_{ij}} = s_{ij} t_{j|U_{ij}}$. De quelle forme particulière s_{ij} peut-elle être ?

(4) Calculer les s_{ij} dans le cas particulier où $\mathscr{L} = \mathscr{O}(k)$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

(5) Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathscr{L}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}(k)$.

Exercice III (Automorphismes de $\mathbf{P}^n$)

Dans un précédent exercice, il a été construit un morphisme injectif de groupes $\gamma_A\colon\ \mathrm{GL}_{n+1}(A)/A^\times \to \mathrm{Aut}_A(\mathbf{P}^n_A)$. On voudrait montrer que c'est un isomorphisme si A est un anneau local.

(1) Soit $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathbf{P}^n_A)$. Montrer que si $f^\star\mathscr{O}(1) \simeq \mathscr{O}(1)$, alors f est dans l'image de γ_A.

(2) Dans le cas où $A = k$ est un corps, montrer que γ_A est un isomorphisme.

(3) On suppose que A est un anneau local et que I est un idéal de A tel que $I^2 = 0$. On note $A' = A/I$.

(3a) Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur $\mathbf{P}^n_A$. On note $\mathscr{L}'$ l'image inverse de $\mathscr{L}$ sur $\mathbf{P}^n_{A'}$. Montrer que si $\mathscr{L}'$ est le fibré trivial, alors $\mathscr{L}$ aussi. (Indication : construire une suite exacte $0 \to \mathscr{L}'' \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}' \to 0$ de faisceaux quasi-cohérents sur $\mathbf{P}^n_A$ et considérer la suite exacte de cohomologie associée.)

(3b) En déduire que si $\gamma_{A/I}$ est bijective, alors γ_A aussi.

(3c) Montrer que si A est un anneau local artinien, alors γ_A est bijective.

(4) Montrer que γ_A est bijective si A est un anneau local noethérien complet.

(5) Montrer que γ_A est bijective si A est un anneau local noethérien.

(6) Montrer que γ_A est bijective si A est un anneau local.

(7) L'application γ_A est-elle bijective pour un anneau A quelconque ? (Indication : utiliser la question (3) de l'exercice IV.)

Exercice IV (PGL_n)

Si $n \geq 1$, on note $\mathbf{PGL}_n$ l'ouvert $D_+(\det)$ du schéma $\mathrm{Proj}(\mathbf{Z}[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n])$.

(1) Construire un morphisme $\mathbf{PGL}_n \times \mathbf{PGL}_n \to \mathbf{PGL}_n$ qui induise pour tout schéma T, une structure de groupe sur l'ensemble $\mathbf{PGL}_n(T)$.

(2) Montrer que pour tout anneau A, on a une bijection $\mathbf{PGL}_{n+1}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_A(\mathbf{P}^n_A)$ et plus généralement que pour tout schéma T, on a un isomorphisme $\mathbf{PGL}_{n+1}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_T(\mathbf{P}^n_T)$.

(3) Montrer que le morphisme canonique de schémas $\mathbf{GL}_n \to \mathbf{PGL}_n$ n'admet pas de section si $n \geq 2$.

[1] Le résultat de l'exercice pourrait être généralisé au cas d'un anneau factoriel.