UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
U.F.R. de Mathématiques

Thèse de Doctorat de Mathématiques

présentée par
M. JOËL RIOU

pour obtenir le grade de docteur
de l'Université Paris 7 — Denis Diderot

Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs *via* la théorie homotopique des schémas

Soutenue le 7 juillet 2006 devant le jury composé de :

M. Jean-Benoît BOST (Université Paris 11)
M. Bruno KAHN (Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS) Directeur
M. Damian RÖSSLER (Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS)
M. Christophe SOULÉ (IHÉS, CNRS)
M. Burt TOTARO (University of Cambridge)
M. Jörg WILDESHAUS (Université Paris 13)

Rapporteurs (absents à la soutenance) :

M. Michael HOPKINS (Harvard University)
M. Marc LEVINE (Northeastern University)

यत्स्वयं कर्मणा किंचित्फलमाप्नोति पूरुषः
प्रत्यक्षं चक्षुषा दृष्टं तत्पौरुषमिति स्मृतम्

Mahābhārata, la forêt, livre 3,
Pune 3, 33, 16.

Remercîments

Je voudrais tout d'abord exprimer ma reconnaissance envers Bruno Kahn pour m'avoir introduit à la théorie homotopique des schémas ; tout en me laissant une grande autonomie, il a su me guider pour mener à bien ce travail.

Je suis très heureux de pouvoir remercier Jean-Benoît Bost, Damian Rössler, Christophe Soulé, Burt Totaro et Jörg Wildeshaus d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse, ainsi que les rapporteurs Michael Hopkins et Marc Levine de m'avoir fait l'honneur d'étudier le présent manuscrit.

Je remercie très chaleureusement Yves André, Florence Lecomte et Christophe Soulé pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et leur aide pour résoudre quelques problèmes. C'est avec grand plaisir que je remercie Hinda Hamraoui, qui a suscité mon questionnement sur les anneaux de représentations. Je remercie Joseph Ayoub, Omid Amini, Denis-Charles Cisinski, Frédéric Déglise, Florian Ivorra, Georges Maltsiniotis, Alban Moreau, Fabien Morel et Jörg Wildeshaus auprès desquels j'ai beaucoup appris depuis mon DEA. Je suis aussi très heureux de mes dialogues avec Dennis Eriksson sur nos travaux respectifs, nous enrichissant l'un l'autre. Au cours de ces dernières années, j'ai également pu bénéficier de discussions mathématiques très intéressantes avec notamment David Blottière, François Brunault, Xavier Caruso, François Charles, David Madore, Fabrice Orgogozo, Benoît Stroh et Olivier Wittenberg ; je leur en sais beaucoup de gré.

Je souhaite en outre reconnaître la contribution de tous mes professeurs à l'accomplissement de ce travail, et tout particulièrement celle de M$^{\text{me}}$ Michel dont l'enseignement a initié mon inclination pour les mathématiques. Mes années d'études à l'École normale supérieure m'ont permis de me faire une culture mathématique et de bénéficier des conseils et de l'encadrement bienveillants de Frédéric Paulin.

J'ai beaucoup apprécié l'excellence des conditions de travail au sein de l'équipe de théorie des nombres de l'Institut de Mathématiques de Jussieu et à l'Université Denis Diderot. Je loue le formidable travail de M$^{\text{me}}$ Wasse et M. Gérardin qui ont su prévenir toutes les difficultés administratives.

Je voudrais aussi saluer les doctorants du plateau 7C de l'Institut pour le charme de leur conversation et l'ambiance de travail décontractée à laquelle ils contribuent : Cécile, Olivier, François, Fabien, Antonella, Manuel, Esther, Benoît, Nicolas, etc.

Je remercie enfin mes parents et mes amis pour leur soutien.

Table des matières

Introduction

Le contexte de cette thèse est la théorie homotopique des schémas de Fabien Morel et Vladimir Voevodsky (cf. [76], [57] et [56]) : si $\mathscr{S}$ est un site, on peut considérer la catégorie des préfaisceaux (ou faisceaux) simpliciaux sur $\mathscr{S}$ et définir la notion d'équivalence faible (locale) ; en inversant formellement ces équivalences faibles, on obtient la catégorie homotopique $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ de $\mathscr{S}$ (cf. [39] et [40]). En théorie homotopique des schémas, on applique cette construction au grand site $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ formé de la catégorie Sm/S des schémas lisses sur une base noethérienne S munie de la topologie de Nisnevich, dite aussi « topologie hensélienne » (cf. [47]) ; la nouveauté réside dans la $\mathbb{A}^1$-localisation de la catégorie homotopique $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$: par localisation à la Bousfield, on obtient la notion de $\mathbb{A}^1$-équivalence faible en forçant les projections $\mathbb{A}^1_X \to X$ à en être, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$. Morel et Voevodsky obtiennent ainsi une nouvelle catégorie homotopique $\mathscr{H}(S)$ en inversant formellement les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles. Cette catégorie a contribué à la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky (cf. [81] et [45]).

Cette thèse est divisée en deux parties. La première comporte un unique chapitre « Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle » qui prolonge la ligne tracée dans l'article [57] en donnant un sens à la catégorie $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ pour tout « site suspendu avec intervalle » c'est-à-dire un site avec intervalle $(\mathscr{S}, I)$ muni d'un objet T (préfaisceau ou faisceau simplicial pointé arbitraire). Dans le cas de la théorie homotopique des schémas, on obtient des catégories homotopiques stables $\mathcal{SH}(S)$ équivalentes à celles définies par Jardine dans [41]. C'est la volonté de définir rigoureusement le foncteur « points complexes » $\mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ associé à un point complexe $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to S$ qui m'a conduit à faire ce travail de fondements consistant à donner une définition de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ sans les hypothèses restrictives qui surviennent lorsque l'on suit la construction de [*ibid.*]. Les résultats de cette première partie utilisés dans la deuxième seront mentionnés au fur et à mesure dans la suite de cette introduction. Une introduction spécifique à cette partie est donnée au début du chapitre I.

La deuxième partie de cette thèse est principalement consacrée aux opérations sur la K-théorie algébrique. Le point de départ sera le théorème suivant :

Théorème 1 (Morel-Voevodsky) *Soit S un schéma régulier. Pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ et tout entier naturel n, il existe une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \cong K_n(X)$$

où $K_\star(-)$ désigne la K-théorie algébrique de Quillen, $\mathscr{H}_\bullet(S)$ la version pointée de $\mathscr{H}(S)$ et Gr *la grassmannienne infinie.*

La même « formule » vaut en K-théorie topologique : ceci constitue à mes yeux un des faits montrant de façon éclatante que la catégorie $\mathscr{H}(S)$ est un bon analogue en géométrie algébrique de la catégorie homotopique usuelle $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$. Disons tout de suite que les résultats de cette thèse ne s'appliquent qu'aux schémas réguliers : on utilise de façon essentielle l'invariance par homotopie de la K-théorie algébrique pour ces schémas.

On se propose d'étudier les morphismes $f\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$. Avoir un tel morphisme est intéressant puisque si f préserve de plus le point-base, f est un endomorphisme de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$; d'après le théorème 1, il induit des applications $K_n(X)\to K_n(X)$ pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$ et $n\in\mathbb{N}$. L'énoncé sur lequel est bâtie cette partie est le suivant (théorème III.29) :

Théorème 2 *Soit S un schéma régulier. Notons $K_0(-)$ le préfaisceau d'ensembles sur la catégorie Sm/S qui à $X\in\mathrm{Sm}/S$ associe $K_0(X)$. L'application évidente*

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))$$

est bijective.

Autrement dit, si $\tau\colon K_0(-)\to K_0(-)$ est une transformation naturelle de foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\to\mathbf{Ens}$, il existe un unique morphisme $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ qui induise la transformation naturelle τ *via* les bijections du théorème 1. Par conséquent, si $\tau\colon K_0(-)\to K_0(-)$ est pointée (*i.e.* $\tau(0)=0\in K_0(S)$), τ donne naturellement naissance à des transformations naturelles $K_n(-)\to K_n(-)$ pour tout entier naturel n. Ajoutons que l'ensemble de ces transformations naturelles est complètement déterminé : il s'identifie à un produit infini (indexé par $\mathbb{Z}$) de copies de l'anneau de séries formelles $K_0(S)\,[[c_1,\dots,c_n,\dots]]$ en une infinité de variables où chaque opération c_n s'exprime naturellement comme un polynôme en les coefficients de la série λ_t constitutive de la structure de λ-anneau sur les groupes $K_0(-)$.

La démonstration de ce théorème est étonnamment simple. La suite exacte de Milnor, l'astuce de Jouanolou et le calcul de la K-théorie algébrique des grassmanniennes en sont les ingrédients techniques principaux, des rappels les concernant sont faits au chapitre II. C'est une vertu très particulière de la K-théorie algébrique qui permet d'obtenir ce résultat, il s'agit de la propriété (ii) (cf. définition III.8) qui est réexaminée sous un angle beaucoup plus abstrait à l'annexe B. Cette propriété permet en fait d'étudier à la manière du théorème 2 les morphismes $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to E$ dans $\mathscr{H}(S)$ où E est un objet arbitraire (pour ne pas avoir de problèmes, je suppose néanmoins que E est un H-groupe), la conclusion analogue étant vraie (cf. théorème III.27) sous une hypothèse que j'appelle « propriété (K) » : il s'agit d'une condition d'annulation sur un groupe $\mathrm{R}^1\lim$. Si E représente une théorie cohomologique et que les inclusions évidentes entre grassmanniennes induisent des surjections en cohomologie (ce qui est souvent le cas), la propriété (K) sera satisfaite.

Une des idées importantes du chapitre III est donc de relever canoniquement en des opérations sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ les constructions de SGA 6 au niveau des groupes $K_0(-)$. Comme le théorème 2 admet des variantes « à n variables » étudiant les morphismes $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$, on peut relever canoniquement la structure de λ-anneau spécial sur les ensembles $K_0(X)$ pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$ en une structure de λ-Anneau spécial sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$.

On définit dans la section 8 du chapitre III un morphisme de λ-anneaux spéciaux

$$\mathrm{R}_k\, G \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$$

pour tout groupe algébrique linéaire lisse G sur k, où $\mathrm{R}_k\, G$ désigne le groupe des représentations algébriques de G et $\mathbf{B}G$ le classifiant de G. On vérifie que si $G = \mathrm{GL}_r$, alors le but de ce morphisme est le complété de la source par rapport à son idéal d'augmentation. On obtient finalement un morphisme

$$(\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{GL})^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$$

pour tout schéma régulier S. Dans [70], Soulé associe aux éléments de $\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{GL}$ des opérations sur la K-théorie algébrique (par exemple les opérations d'Adams Ψ^k). Il convient de comparer cette construction à celle qui résulte du morphisme ci-dessus. De même, il faudrait vérifier que la structure multiplicative sur les groupes gradués $K_\star(X)$ déduite de l'unique morphisme $(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})^2 \to \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}$ induisant le produit sur les groupes $K_0(X)$ pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ coïncide avec les constructions de Quillen, Loday et Waldhausen là où elles sont définies. La première chose à faire pour comparer ces constructions consiste à donner un sens précis à cette question : pour montrer l'égalité entre deux applications, encore faut-il que ce soit des applications entre les mêmes ensembles ! Comme les constructions d'opérations peuvent utiliser des définitions différentes de la K-théorie algébrique supérieure, il s'agit donc dans un premier temps de préciser les identifications entre les différentes constructions de la K-théorie algébrique (rassurons tout de suite le lecteur : il sera possible de le faire « sans se salir les mains »). La section 5 du chapitre III donne un cadre naturel pour procéder à ces identifications : on y définit la notion de modèle authentique de la K-théorie algébrique, on montre que le théorème 2 implique que deux modèles authentiques de la K-théorie algébrique sont canoniquement isomorphes et que les constructions classiques (notamment celles de Quillen et Waldhausen) donnent naissance à des modèles authentiques de la K-théorie algébrique. La comparaison entre deux constructions de la « même » opération acquiert donc un sens précis, la vérification de l'égalité entre ces deux morphismes ne pose en général plus de très grande difficulté : il s'agit de montrer que les deux constructions sont suffisamment fonctorielles pour provenir de morphismes $(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})^n \to \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$; en vertu du théorème 2, la coïncidence de ces morphismes (et donc l'égalité des opérations sur les groupes $K_n(-)$) se déduit de leur coïncidence sur les seuls groupes $K_0(-)$, ce qui est la moindre des choses.

Au chapitre V, on étudie les morphismes $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ dans $\mathscr{H}(k)$ où k est un corps parfait et $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ un espace d'Eilenberg-MacLane motivique. Ceci est possible grâce à une généralisation du théorème 2 permettant d'étudier les morphismes de source $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$. Les morphismes $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ correspondent aux transformations naturelles $K_0(-) \to CH^n(-)$ de préfaisceaux d'ensembles sur Sm/k où $CH^n(-)$ est le préfaisceau d'ensembles qui à X associe le n-ième groupe de Chow $CH^n(X)$. On peut procéder comme pour les opérations sur la K-théorie algébrique : la construction par Grothendieck des classes de Chern (ou du caractère de Chern) définit des transformations naturelles $K_0(-) \to CH^n(-)$, celles-ci proviennent de morphismes $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ uniquement définis dans $\mathscr{H}(k)$ et induisent à leur tour des morphismes « classes de Chern » ou « caractère de Chern » sur les groupes de K-théorie supérieurs, à valeurs dans la cohomologie motivique. À la différence de [23] qui utilisait des schémas simpliciaux, on a utilisé un modèle « géométrique » de la K-théorie algébrique. On s'est limité ici à la cohomologie motivique, mais le résultat et les démonstrations seraient les mêmes pour d'autres théories cohomologiques « ordinaires », pourvu qu'elles soient représentées par des objets de $\mathscr{H}(k)$ de la même manière que les espaces d'Eilenberg-MacLane motiviques représentent la cohomologie motivique.

⋆
⋆ ⋆

Dans les résultats énoncés jusqu'à présent, on ne s'intéressait qu'à des morphismes « à homotopie près ». Il est possible d'aller au délà en ne s'autorisant à identifier deux morphismes ayant la même classe d'homotopie qu'à partir du moment où l'on a fixé l'homotopie (ou plutôt la classe d'homotopie d'homotopies) reliant ces deux morphismes. On montre ainsi dans la section 10 du chapitre III que si $\tau\colon K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right] \to K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right]$ est une transformation naturelle définie sur la catégorie des schémas réguliers, alors on peut relever τ en une famille de foncteurs $\mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X) \to \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X)$ définis à des isomorphismes *uniques* près et fonctoriels en le schéma régulier X, où $\mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X)$ est une variante à coefficients $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ de la catégorie virtuelle $\mathscr{V}(X)$ définie par Deligne dans [17]. Il est nécessaire d'inverser 2 pour obtenir des isomorphismes canoniques.

⋆
⋆ ⋆

Pour le moment, on s'est intéressé à tous les morphismes $K_0(-) \to K_0(-)$ (resp. $K_0(-) \to CH^n(-)$) dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, autrement dit aux opérations *ensemblistes*. Afin de tenter de faire passer ces résultats à la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(S)$, il est intéressant de se focaliser sur les opérations *additives* $K_0(-) \to K_0(-)$. C'est alors que le principe de scindage entre en scène au chapitre IV : si deux opérations additives $K_0(-) \to K_0(-)$ coïncident sur les classes de fibrés en droites, elles sont égales. On peut faire mieux (cf. théorème IV.13) :

Théorème 3 *Soit S un schéma régulier. L'application*

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-)) \to K_0(S)[[U]]$$

qui à une opération additive $\tau\colon K_0(-) \to K_0(-)$ associe $\tau([\mathscr{O}(1)]) \in K_0(\mathbb{P}^\infty_S) = K_0(S)[[U]]$ est bijective. L'opération d'Adams $\Psi^k\colon K_0(-) \to K_0(-)$ correspond à la série formelle $(1+U)^k$.

Remarquons que les opérations additives sur $K_0(-)$ se composent : *via* l'isomorphisme du théorème 3, cela définit une loi de composition interne $\bigstar$ sur $K_0(S)[[U]]$. On la détermine complètement dans le corollaire IV.22. Cette étude, dont je dois bien admettre qu'elle m'a beaucoup amusé, m'a fait prendre conscience de l'importance de la topologie « faible » sur l'ensemble des opérations (additives). Cela a quelque importance dans la suite.

De la même façon, on montre que les transformations naturelles additives $K_0(-) \to CH^n(-)$ forment un groupe abélien libre de rang un engendré par un élément que je note χ_n : cet élément est construit en évaluant le n-ième polynôme de Newton sur les classes de Chern (cf. théorème V.15).

⋆
⋆ ⋆

On veut ensuite définir un objet **BGL** de $\mathcal{SH}(S)$ représentant la K-théorie algébrique. La multiplication par $u = [\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$ définit un morphisme

$$\sigma \colon \mathbb{P}^1 \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ (on pointe $\mathbb{P}^1$ par ∞), le morphisme qui lui est adjoint

$$\sigma' \colon \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est un isomorphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$: il s'agit d'un analogue algébrique du théorème de périodicité de Bott qui se démontre en utilisant la formule du fibré projectif. On n'est alors pas loin d'obtenir un $\mathbb{P}^1$-spectre (représentant la K-théorie algébrique), le problème est que le morphisme σ n'est défini qu'à homotopie près. On utilise alors la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ introduite dans la section 6 du chapitre I : un objet de $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ consiste en la donnée d'une suite d'objets $(\mathbf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et d'isomorphismes $\sigma'_n \colon \mathbf{E}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathbf{E}_{n+1})$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. On obtient un objet $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ de cette catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ en posant $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}_n = \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ pour tout entier naturel n et en prenant pour « morphismes d'assemblages » le morphisme σ' sus-défini. Les endomorphismes de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ sont simplement des familles de morphismes $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ compatibles en un certain sens qui leur impose en particulier de définir des opérations additives $K_0(-) \to K_0(-)$. En examinant la situation, on obtient le théorème 5 ci-dessous :

Définition 4 *Soit A un groupe abélien. On note A^Ω le système projectif de groupes abéliens*

$$\dots \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} A[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} A[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} A[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} A[[U]]$$

indexé par $\mathbb{N}$, où $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon A[[U]] \to A[[U]]$ est défini par la formule $\Omega_{\mathbb{P}^1}(f) = (1+U)\frac{df}{dU}$.

Théorème 5 *Soit S un schéma régulier. L'application évidente est bijective :*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}}) \xrightarrow{\sim} \lim\, K_0(S)^\Omega\ .$$

On peut montrer qu'il existe un foncteur évident $\mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ qui identifie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ au quotient de $\mathcal{SH}(S)$ par l'idéal de morphismes $\mathscr{F}$ formé des « applications stablement fantômes ». En particulier, ce foncteur est essentiellement surjectif : on peut relever $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ en un objet de $\mathcal{SH}(S)$. *A priori*, ce relèvement n'est pas bien défini à isomorphisme *unique* près. On montre néanmoins qu'il existe une manière de procéder donnant naissance à un relèvement canonique : sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, tous les relèvements sont canoniquement isomorphes, le relèvement canonique **BGL** dans $\mathcal{SH}(S)$ sur une base régulière arbitraire S s'obtient en appliquant le foncteur « image inverse » $\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \to \mathcal{SH}(S)$ au relèvement canonique défini pour $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. On a ainsi rendu un peu plus précise la construction de **BGL** donnée par Voevodsky dans [76]. Le théorème suivant approfondit le théorème 5 (cf. théorème IV.49) :

Théorème 6 *Soit S un schéma régulier. Soit n un entier relatif. Il existe une suite exacte courte :*

$$0 \to \mathrm{R}^1 \lim\, K_{n+1}(S)^{\Omega} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}\,[-n]) \to \lim\, K_n(S)^{\Omega} \to 0\ .$$

Le foncteur $[-n]$ est un foncteur de translation sur $\mathcal{SH}\,(S)$: on a montré que la catégorie $\mathcal{SH}\,(S)$ était une catégorie triangulée dans la section 3 du chapitre I.

Il y a donc un intérêt à étudier de manière plus approfondie les systèmes projectifs A^{Ω}. On obtient que $\mathrm{R}^1 \lim A^{\Omega}$ est nul si A est un groupe abélien fini, c'est d'ailleurs ainsi que l'on montre que le relèvement de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})$ est défini à isomorphisme unique près : en effet, le groupe $K_1(S) \cong \mathbb{Z}/2$ est fini. Pour d'autres groupes A, cette étude semble se révéler difficile : j'ignore la valeur de $\lim \mathbb{Z}^{\Omega}$ et de $\mathrm{R}^1 \lim \mathbb{Z}^{\Omega}$.

Cependant, ce système se simplifie beaucoup si on suppose que A est un $\mathbb{Q}$-vectoriel. Cette simplification permet d'obtenir le résultat suivant (cf. théorème IV.72) :

Théorème 7 *Soit S un schéma régulier. Il existe une décomposition canonique :*

$$\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$$

où pour tout entier relatif i, $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ est le facteur direct de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ sur lequel les opérations d'Adams $\mathbf{\Psi}^k \colon \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ agissent par multiplication par k^i.

L'objet $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ est la version à coefficients rationnels de $\mathbf{BGL}$ (la $\mathbb{Q}$-localisation des catégories triangulées est étudiée dans la section 2 de l'annexe A). Pour construire les objets $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$, on définit des projecteurs de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ et on utilise le fait que la catégorie triangulée $\mathcal{SH}\,(S)$ est pseudo-abélienne.

On peut procéder de la même manière pour déterminer les morphismes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_A\,[-i]$ dans $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\,k)$ (pour k un corps parfait, A un groupe abélien et $i \in \mathbb{Z}$) où $\mathbf{H}_A$ est le spectre d'Eilenberg-MacLane motivique à coefficients dans A. Ceci est réalisé dans la section 2 du chapitre V. On peut ainsi construire un caractère de Chern, sous la forme d'un morphisme $\mathrm{ch} \colon \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{SH}\,(S)$ (par « périodicité », cela donne un morphisme $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}(n)\,[2n]$ pour tout entier relatif n).

On montre aussi que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(\mathrm{Spec}\,k)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}\,[1]) \cong \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$ et que tous ces morphismes sont des applications stablement fantômes. On en déduit que si S est un schéma noethérien non vide, le foncteur $\mathcal{SH}\,(S) \to \mathcal{SH}_{\text{naïve}}\,(S)$ n'est pas une équivalence de catégories, ce qui n'était pas du tout évident *a priori*.

⋆
⋆ ⋆

Le chapitre VI présente des variantes topologiques des résultats précédents. On remplace la K-théorie algébrique par la K-théorie topologique complexe, la catégorie $\mathscr{H}\,(S)$ par $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$, etc. Non seulement les énoncés homologues sont vrais et se démontrent de la même manière (ou plus simplement), mais grâce à des résultats de Dugger, Hollander et Isaksen, on a construit dans la section 5 du chapitre I un foncteur « points complexes » $\mathscr{H}\,(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ (resp. $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$) envoyant $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (resp. $\mathbf{BGL}$) sur un espace (resp. un spectre) représentant la K-théorie topologique complexe. Ceci permet de formuler le résultat suivant (cf. théorèmes VI.11 et VI.13) :

Théorème 8 *Les foncteurs* $\mathscr{H}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ *et* $\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ *induisent des bijections :*

$$\operatorname{End}_{\mathscr{H}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}(\mathbb{C}))\ ;$$

$$\operatorname{End}_{\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})}(\mathbf{BGL}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}})\ .$$

Ce principe a été une des motivations de ce travail. Il permettait par exemple de rendre plausible la décomposition de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ en somme directe d'objets $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ pour $i \in \mathbb{Z}$: la catégorie $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{Q}$-vectoriels gradués (cf. théorème A.29), $\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$ se décompose donc en somme directe infinie (de spectres d'Eilenberg-MacLane $\mathbf{H}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}[2i]$), les idempotents de $\operatorname{End}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}})$ associés à cette décomposition correspondent donc à des idempotents de $\operatorname{End}_{\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$.

Première partie

Sites suspendus avec intervalles

Chapitre premier

Catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle

Dans la section 1 de ce chapitre est donnée une construction de la catégorie homotopique stable d'un « site suspendu avec intervalle » dans le prolongement de [57, §2]. La section 2 est consacrée à la fonctorialité élémentaire de cette construction tandis que la section 3 étudie la structure triangulée sur ces catégories homotopiques stables. La section 4 examine la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}\,(S) = \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$ d'un schéma noethérien (déjà définie dans [41]), ainsi que sa fonctorialité élémentaire, de façon suffisamment approfondie pour permettre la vérification des axiomes des « foncteurs homotopiques stables » (cf. [6]). La section 5 a pour but de définir un foncteur « points complexes » $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$; cette définition utilise toutes les constructions précédentes : c'est pour pouvoir définir ce foncteur que j'ai dû définir la catégorie homotopique stable d'un site suspendu avec intervalle presque arbitraire (je suppose que les sites ont suffisamment de points).

On donne enfin dans la section 6 une version simplifiée $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ de la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ d'un site suspendu avec intervalle (donc en particulier une version $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}\,(S)$ de la catégorie $\mathcal{SH}\,(S)$). Cette nouvelle catégorie sera essentielle au bon déroulement du chapitre IV. Le lecteur déjà familier avec [41] pourra lire cette section indépendamment des sections précédentes.

1 Construction

1.1 Rappels sur la construction de Morel et Voevodsky

Soit $\mathscr{S}$ un site (c'est-à-dire une petite catégorie [1], aussi notée $\mathscr{S}$, munie d'une topologie de Grothendieck, cf. SGA 4 II) admettant suffisamment de points (cf. SGA 4 IV 6.4.1).

On note **Prefais**($\mathscr{S}$) la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie sous-jacente au site $\mathscr{S}$ et **Fais**($\mathscr{S}$) la sous-catégorie pleine de **Prefais**($\mathscr{S}$) formée des faisceaux

[1]Dans les exemples, la catégorie sous-jacente ne sera pas forcément petite, mais seulement essentiellement petite, à savoir équivalente à une petite catégorie. Il sera sous-entendu que l'on remplace la catégorie en question par une petite catégorie qui lui est équivalente ; il est facile de vérifier que les catégories construites par la suite pour deux choix initiaux donneront des catégories équivalentes.

pour la topologie donnée. On note $a\colon \mathbf{Prefais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ le foncteur faisceau associé, adjoint à gauche de l'inclusion $\mathbf{Fais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$.

La catégorie $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ désignera au choix soit la catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$ des préfaisceaux simpliciaux, soit la catégorie $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ des faisceaux simpliciaux.

Remarque i.1 *Il y a un intérêt à considérer des sites plutôt que des topos parce que la fonctorialité des constructions par rapport aux topos est insuffisante pour les applications (cf. [57, example 1.19, page 102]). Il est également très utile de considérer non seulement les faisceaux simplicaux mais aussi les préfaisceaux simpliciaux : par exemple, les préfaisceaux simpliciaux donnés par les modèles classiques de la K-théorie algébrique ne sont pas des faisceaux.*

Pour tout foncteur fibre $\Phi\colon \mathbf{Fais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Ens}$ sur le site $\mathscr{S}$, le foncteur composé $\Phi \circ a\colon \mathbf{Prefais}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Ens}$ est encore noté Φ ; on note aussi $\Phi\colon \mathbf{Esp}(\mathscr{S}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ le foncteur qui s'en déduit ; ces foncteurs commutent aux limites projectives finies et aux limites inductives.

Définition i.2 *Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille conservative de foncteurs fibres sur $\mathscr{S}$ indexée par un ensemble I. On dit d'un morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ que c'est une équivalence faible simpliciale si pour tout $i \in I$, le morphisme $\Phi_i(f)\colon \Phi_i(X) \to \Phi_i(Y)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.*

En interprétant la notion d'équivalence faible simpliciale en termes de faisceaux d'homotopie (cf. [*ibid.*, remark 1.3, page 48]), on peut montrer que la notion d'équivalence faible simpliciale ne dépend pas de la famille conservative de foncteurs fibres choisie.

Théorème i.3 (Joyal, Jardine [40]) *Munie des monomorphismes comme cofibrations, des équivalences faibles simpliciales comme équivalences faibles et des morphismes possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales comme fibrations, la catégorie $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ est une catégorie de modèles fermée de Quillen [61]. On note $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ sa catégorie homotopique (obtenue en inversant formellement les équivalences faibles simpliciales dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$).*

D'après [40, proposition 2.8], on dispose d'une équivalence de Quillen entre les définitions de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ obtenues en utilisant les préfaisceaux simpliciaux ou les faisceaux simpliciaux. On dit que $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ est la catégorie homotopique simpliciale de $\mathscr{S}$.

Définition i.4 ([57, §2.3, page 85]) *Un intervalle sur $\mathscr{S}$ consiste en la donnée d'un objet $I \in \mathbf{Fais}(\mathscr{S})$ et de morphismes $\mu\colon I \times I \to I$ et $i_0, i_1\colon \bullet \to I$ ($\bullet$ désignant l'objet final de $\mathbf{Fais}(\mathscr{S})$) tels que si $p\colon I \to \bullet$ est le morphisme canonique, on ait*

$$\mu(i_0 \times \mathrm{id}) = \mu(\mathrm{id} \times i_0) = i_0 p \qquad \mu(i_1 \times \mathrm{id}) = \mu(\mathrm{id} \times i_1) = \mathrm{id}$$

et que le morphisme $\bullet \sqcup \bullet \to I$ donné par i_0 et i_1 soit un monomorphisme.

Remarque I.5 *La notion d'« intervalle » sera pour nous tout à fait secondaire dans la mesure où nous n'utiliserons pas vraiment les constructions menant notamment à [*ibid.*, proposition 3.14, page 91]. Nous pourrions aussi bien ne nous donner qu'un objet I dans* $\mathbf{Fais}(\mathscr{S})$*. Un cas particulier important est celui où on voudrait poser $I = \bullet = \Delta^0$ (l'objet $\bullet$ peut très difficilement être un intervalle au sens ci-dessus) : dans la suite des constructions, on s'intéresse à des sites munis d'un objet I, et on va considérer des I-équivalences faibles ; ces résultats s'appliqueront à ce cas particulier $I = \bullet$ où les I-équivalences faibles sont les équivalences faibles simpliciales. Si on enlève le « I » dans la notation, il sera sous-entendu que c'est de cette version simpliciale des constructions qu'il s'agit.*

À partir de maintenant, on suppose que le site $\mathscr{S}$ est muni d'un tel I. La version I-localisée de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ est obtenue grâce à une localisation à la Bousfield :

Définition I.6 *Un objet X de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$ est I-local si pour tout objet Y de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y \times I, X)$$

est bijective. Un morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ *(ou dans $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$) est une I-équivalence faible si pour tout objet I-local Z de $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})$, f induit une bijection :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S})}(X, Z) \ .$$

Une I-fibration est un morphisme dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ *possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont aussi des I-équivalences faibles.*

Théorème I.7 ([*ibid.*, theorem 3.2, page 86]) *La catégorie* $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ *munie des monomorphismes comme cofibrations, des I-équivalences faibles comme équivalences faibles et des I-fibrations comme fibrations est une catégorie de modèles fermée dont on note $\mathscr{H}(\mathscr{S}, I)$ la catégorie homotopique.*

Si on remplace $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$ par la catégorie $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ des objets pointés dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S})$, on obtient de même une structure de catégorie de modèles I-localisée dont on note $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ la catégorie homotopique.

1.2 Spectres, structure projective

On suppose toujours donné un site avec intervalle $(\mathscr{S}, I)$, $\mathscr{S}$ étant supposé avoir assez de points. On fixe maintenant un objet (quelconque) T de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$. On dira que le triplet $(\mathscr{S}, I, T)$ constitue un site suspendu avec intervalle.

Définition I.8 *Un T-spectre $\mathbf{E}$ consiste en la donnée d'une suite $(\mathbf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de* $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ *et de morphismes (dits d'assemblage) $\sigma_n\colon T \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$ pour tout entier naturel n. Un morphisme de T-spectres $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une suite de morphismes $f_n\colon \mathbf{E}_n \to \mathbf{F}_n$ faisant commuter les diagrammes*

$$\begin{tikzcd}
T \wedge \mathbf{E}_n \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "T\wedge f_n"] & \mathbf{E}_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
T \wedge \mathbf{F}_n \arrow[r, "\sigma_n"] & \mathbf{F}_{n+1}
\end{tikzcd}$$

pour tout entier naturel n. On note $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ la catégorie des T-spectres.

Pour tout objet X de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ et tout entier naturel n, on note F_nX le T-spectre défini par $(F_nX)_k = \bullet$ pour $k < n$ et $(F_nX)_{n+i} = T^{\wedge i} \wedge X$ pour $i \in \mathbb{N}$, les morphismes d'assemblage σ_k étant les morphismes triviaux pour $k < n$, le morphisme σ_{n+i} étant l'isomorphisme évident $T \wedge (F_nX)_{k+i} \xrightarrow{\sim} (F_nX)_{k+i+1}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, le foncteur $F_n \colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est le foncteur adjoint à gauche du foncteur ev_n qui à un T-spectre $\mathbf{E}$ associe $\mathbf{E}_n$.

Définition i.9 *Une cofibration projective dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est un morphisme $f \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tel que $\mathbf{E}_0 \to \mathbf{F}_0$ soit un monomorphisme et que pour tout entier naturel n, le morphisme évident*

$$(T \wedge \mathbf{F}_n) \bigvee_{T \wedge \mathbf{E}_n} \mathbf{E}_{n+1} \to \mathbf{F}_{n+1}$$

soit aussi un monomorphisme. Une I-fibration projective (resp. une I-équivalence projective) est un morphisme $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ tel que pour tout entier naturel n, le morphisme $\mathbf{E}_n \to \mathbf{F}_n$ soit une I-fibration (resp. une I-équivalence faible) dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$.

Théorème i.10 ([41, lemma 2.1]) *Munie des cofibrations projectives comme cofibrations, des I-équivalences projectives comme équivalences faibles et des I-fibrations projectives comme fibrations, la catégorie $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale dont on note $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ la catégorie homotopique.*

La structure simpliciale sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ provient du bifoncteur qui à un ensemble simplicial K et un T-spectre $\mathbf{E}$ associe le T-spectre $\mathbf{E} \wedge K_+$ (où le $\wedge$-produit est pris terme à terme).

Définition i.11 *Une I-fibration injective dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont aussi des I-équivalences projectives.*

On dispose d'une autre structure de catégories de modèles fermées dont une bonne vertu est que tous les objets y sont cofibrants :

Théorème i.12 ([*loc. cit.*]) *Munie des monomorphismes comme cofibrations, des I-équivalences projectives comme équivalences faibles et des I-fibrations injectives comme fibrations, la catégorie $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est une catégorie de modèles fermée propre et simpliciale.*

Pour le moment, les démonstrations données dans [*ibid.*] dans le cadre des sites avec intervalles $(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$ pour S un schéma de base noethérien s'appliquent encore.

1.3 Ω-spectres, stabilisation

C'est à partir d'ici que l'on s'écarte de [41], les arguments qui y sont donnés pour construire la catégorie homotopique stable utilisent des propriétés de « compacité » ainsi que la *“Nisnevich descent”*, variante d'un théorème de Brown-Gersten qui est assez spécifique des topologies de Zariski et de Nisnevich sur les schémas noethériens. On va tenter de donner une construction qui fonctionne dans un cadre un peu plus général.

Définitions

Pour tout objet X de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ (en particulier T), le foncteur $X \wedge -\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ admet un adjoint à droite $\mathbf{Hom}_\bullet(X,-)\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, ce couple de foncteurs adjoints formant une adjonction de Quillen pour la structure I-localisée, on note ainsi $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(X,-)\colon \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I) \to \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)$ le foncteur dérivé total à droite de $\mathbf{Hom}_\bullet(X,-)$.

Définition I.13 *Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ (ou de $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$), on dit que $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre si pour tout entier naturel n, la flèche $\mathbf{E}_n \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(T,\mathbf{E}_{n+1})$ déduite du morphisme d'assemblage $\sigma_n\colon T \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$ est un isomorphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)$.*

Remarque I.14 *Concernant les notations, quand le signe Ω désignera un foncteur, il s'agira, sauf précision explicite sous la forme d'un indice (exemple : $\Omega_{\mathbb{P}^1}$), du foncteur $\mathbf{Hom}_\bullet(S^1,-)$ (ou de son foncteur dérivé total à droite), à savoir le foncteur « espace de lacets » usuel, et non pas du foncteur $\mathbf{Hom}_\bullet(T,-)$ auquel on réserve le nom maladroit de « T-espace de lacets ». En revanche, dans l'expression « Ω-spectre », on omettra de préciser l'objet T qui est suffisamment présent dans les notations par ailleurs pour être oublié.*

Définition I.15 *On note $\mathcal{SH}^T_\Omega(\mathscr{S},I)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$ formée des Ω-spectres.*

Définition I.16 *Un morphisme $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ (ou dans $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$) est une I-équivalence stable si pour tout Ω-spectre $\mathbf{G}$, f induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)}(\mathbf{F},\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E},\mathbf{G}) \,.$$

Définition I.17 *Une I-fibration stable est un morphisme dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations projectives qui sont aussi des I-équivalences stables. Une I-fibration injective stable est un morphisme dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux monomorphismes qui sont aussi des I-équivalences stables.*

Les deux théorèmes qui suivent donnent des structures de catégories de modèles fermées sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ ayant pour catégories homotopiques des catégories équivalentes à $\mathcal{SH}^T_\Omega(\mathscr{S},I)$.

Théorème I.18 *Munie des cofibrations projectives, des I-équivalences stables et des I-fibrations stables, la catégorie $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est une catégorie de modèles fermée simpliciale dont on note $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$ la catégorie homotopique. On appelle $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$ la catégorie homotopique stable du site suspendu avec intervalle $(\mathscr{S},I,T)$. Le foncteur évident $\mathcal{SH}^T_\Omega(\mathscr{S},I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$ est une équivalence de catégories.*

Théorème I.19 *Munie des monomorphismes comme cofibrations, des I-équivalences stables et des I-fibrations injectives stables, la catégorie $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ est une catégorie de modèles fermée simpliciale.*

Nous allons démontrer ces deux théorèmes simultanément. La structure introduite dans le théorème I.18 sera appelée « structure stable » tandis que celle du théorème I.19 sera désignée sous le nom de « structure stable injective ».

Lemmes préliminaires

Lemme i.20 *Soit $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un morphisme dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ entre Ω-spectres, alors f est une I-équivalence projective si et seulement si f est une I-équivalence stable.*

Observons tout d'abord que les I-équivalences projectives sont exactement les morphismes qui deviennent des isomorphismes dans la catégorie homotopique $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ (cf. [25, proposition 1.14, Chapter II]). En revenant à la définition des I-équivalences stables, on peut obtenir ce lemme en appliquant le lemme de Yoneda dans la catégorie $\mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S}, I)$.

Lemme i.21 *Soit $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le morphisme f est une I-équivalence stable ;

(2) Pour tout Ω-spectre injectivement I-fibrant $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $\hom(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \to \hom(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est une équivalence faible.

On a noté $\hom\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ le bifoncteur faisant partie de la structure simpliciale sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Supposons (2), en passant aux composantes connexes, on obtient une bijection $\pi_0 \hom(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \pi_0 \hom(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ pour tout Ω-spectre injectivement I-fibrant. D'après l'axiome simplicial pour la structure injective du théorème i.12, on en déduit une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)}(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)}(\mathbf{A}, \mathbf{E})$, ce qui montre bien (1), tout Ω-spectre possédant un remplacement injectivement I-fibrant.

Réciproquement, supposons (1). Soit $\mathbf{E}$ un Ω-spectre injectivement I-fibrant, pour tout ensemble simplicial K, le T-spectre $\mathbf{hom}(K, \mathbf{E})$ est encore un Ω-spectre injectivement I-fibrant (ici, $\mathbf{hom}$ désigne le bifoncteur évident $(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})^{\mathrm{opp}} \times \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$) ; on en déduit que les flèches $\pi_0 \hom(\mathbf{B}, \mathbf{hom}(K, \mathbf{E})) \xrightarrow{\sim} \pi_0 \hom(\mathbf{A}, \mathbf{hom}(K, \mathbf{E}))$ sont bijectives pour tout objet K de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, ce qui revient à dire que la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(K, \hom(\mathbf{B}, \mathbf{E})) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(K, \hom(\mathbf{A}, \mathbf{E}))$$

est bijective. En utilisant le lemme de Yoneda dans la catégorie homotopique usuelle $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$, on en déduit que $\hom(\mathbf{B}, \mathbf{E}) \to \hom(\mathbf{A}, \mathbf{E})$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, ce qui établit (2).

On déduit de ce lemme les deux lemmes qui suivent (de même que dans [57, pages 72–74]) :

Lemme i.22 *Soit un carré cocartésien dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{B} \arrow[d, "f'"] \\ \mathbf{C} \arrow[r, "g'"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Si f est une I-équivalence stable, alors f' aussi pourvu que f ou g soit un monomorphisme.

Lemme I.23 *Soit $\mathscr{I}$ une petite catégorie filtrante. Soit $\mathbf{E}(\bullet) \to \mathbf{F}(\bullet)$ une transformation naturelle de foncteurs $\mathscr{I} \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Si pour tout objet $i \in \mathscr{I}$, le morphisme $\mathbf{E}(i) \to \mathbf{F}(i)$ est une I-équivalence stable, alors $\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} \mathbf{E}(\bullet) \to \operatorname{colim}_{\mathscr{I}} \mathbf{F}(\bullet)$ est itou.*

Lemme I.24 *Il existe un ensemble $\mathscr{J}$ de monomorphismes dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ qui sont aussi des I-équivalences stables tel que si $\mathbf{E}$ est un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, alors $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre injectivement I-fibrant si et seulement si le morphisme canonique $\mathbf{E} \to \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}$.*

D'après la démonstration du théorème I.12, on sait qu'il existe un ensemble $\mathscr{J}_0$ de monomorphismes qui sont aussi des I-équivalences projectives telles que les I-fibrations injectives soient caractérisées par la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}_0$.

Pour tout monomorphisme $i \colon A \to B$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ et tout entier naturel n, on note $\varphi_{n,i}$ le morphisme évident dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$:

$$\varphi_{n,i} \colon F_n A \bigvee_{F_{n+1}(T\wedge A)} F_{n+1}(T \wedge B) \to F_n(B)$$

Il est clair que $\varphi_{n,i}$ est un monomorphisme, qui est une I-équivalence projective si et seulement si i est une I-équivalence faible. Par un jeu d'adjonctions, on montre facilement que si $\mathbf{E}$ est un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, alors $\mathbf{E} \to \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\varphi_{n,i}$ si et seulement si le morphisme $\mathbf{E}_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à i. Soit $\mathscr{J}'$ un ensemble de monomorphismes dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ tel que les I-fibrations triviales dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ soient précisément les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}'$ (cf. la démonstration du théorème I.7). On note $\mathscr{J}_1$ l'ensemble des morphismes dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ de la forme $\varphi_{n,i}$ où n est un entier naturel et $i \in \mathscr{J}'$. On note $\mathscr{J} = \mathscr{J}_0 \cup \mathscr{J}_1$. Montrons que $\mathscr{J}$ vérifie bien les propriétés voulues. Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Si $\mathbf{E} \to \bullet$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}$, alors il possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}_0$ ce qui assure que $\mathbf{E}$ est injectivement I-fibrant, ce qui implique que $\mathbf{E}$ est projectivement I-fibrant ; pour montrer que $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre, il reste à montrer que les flèches évidentes $\mathbf{E}_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ sont des I-équivalences faibles, ce sont en fait des I-fibrations triviales puisque ces flèches satisfont de la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}'$ ($\mathbf{E} \to \bullet$ satisfaisant la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}_1$). Réciproquement, supposons que $\mathbf{E}$ soit un Ω-spectre injectivement I-fibrant. Comme $\mathbf{E}$ est injectivement I-fibrant, $\mathbf{E} \to \bullet$ satisfait évidemment la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}_0$. Si $i \colon A \to B$ est une cofibration I-triviale dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ et que n est un entier naturel, le morphisme $\varphi_{n,i}$ est un monomorphisme qui est une I-équivalence projective, $\mathbf{E} \to \bullet$ possède donc la propriété de relèvement à droite par rapport à ces morphismes, on en déduit par adjonction que le morphisme $\mathbf{E}_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ est une I-fibration, c'est donc une I-équivalence faible si et seulement si c'est une I-fibration triviale, c'est-à-dire si ce morphisme possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}'$. Comme $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre, on en déduit que $\mathbf{E} \to \bullet$ possède finalement la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}$, ce qui montre l'équivalence voulue.

Il reste à montrer que les morphismes appartenant à $\mathscr{J}_1$ sont des I-équivalences stables. Tout d'abord, on peut montrer facilement en revenant à la définition que pour tout objet

X de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ et tout entier naturel n, la flèche évidente $F_{n+1}(T \wedge X) \to F_n X$ est une I-équivalence stable. Ensuite, soit $i\colon A \to B$ un monomorphisme dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F_{n+1}(T \wedge A) \arrow[r] \arrow[d] & F_{n+1}(T \wedge B) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
F_n A \arrow[r] & C \arrow[r, dotted, "\varphi_{n,i}"'] & F_n B
\end{tikzcd}$$

où C désigne la source du morphisme $\varphi_{n,i}$. D'après ce qui précède, les flèches $F_{n+1}(T\wedge A) \to F_n A$ et $F_{n+1}(T\wedge B) \to F_n B$ sont des I-équivalences stables. Grâce au lemme i.22, on obtient que la flèche $F_{n+1}(T \wedge B) \to C$ est une I-équivalence stable. On en déduit que $\varphi_{n,i}$ est une I-équivalence stable, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Lemme i.25 *Il existe un foncteur* $\mathrm{R}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ *et une transformation naturelle* $\tau\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})} \to \mathrm{R}$ *tels que pour tout objet* $\mathbf{E}$ *de* $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$*, le morphisme* $\tau_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \to \mathrm{R}\mathbf{E}$ *soit une* I*-équivalence stable (et un monomorphisme), avec* $\mathrm{R}\mathbf{E}$ *un* Ω*-spectre injectivement fibrant. De plus, il existe un cardinal* κ *tel que* R *commute aux colimites filtrantes indexées par des ensembles ordonnés grands* [2] *devant* κ*.*

Il s'agit d'appliquer le raisonnement du petit objet à la famille de flèches $\mathscr{J}$ du lemme i.24. On considère alors le foncteur $\Phi\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ défini par le carré cocartésien suivant pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$:

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\bigvee_{(f\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B})\in\mathscr{J},\varphi\colon \mathbf{A}\to\mathbf{E}} \mathbf{A} \arrow[r, "\vee\varphi"] \arrow[d, "\vee f"] & \mathbf{E} \arrow[d] \\
\displaystyle\bigvee_{(f\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B})\in\mathscr{J},\varphi\colon \mathbf{A}\to\mathbf{E}} \mathbf{B} \arrow[r] & \Phi\mathbf{E}
\end{tikzcd}$$

On a une transformation naturelle évidente $\mathrm{id}_{\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})} \to \Phi$. On peut itérer cette construction à la puissance α pour tout ordinal α. Tous les objets de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ (en particulier les sources des flèches dans $\mathscr{J}$) étant accessibles (cf. SGA 4 I 9.3), si on pose $\mathrm{R} = \Phi^\alpha$ pour un ordinal (limite) α bien choisi (cf. plus bas), la flèche $\Phi^\alpha\mathbf{E} \to \bullet$ possèdera la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}$ pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$; d'après le lemme i.24, $\mathrm{R}\mathbf{E}$ sera un Ω-spectre injectivement fibrant. Les flèches de $\mathscr{J}$ étant des I-équivalences stables (et des monomorphismes), grâce au lemme i.22, on obtient que la flèche $\mathbf{E} \to \Phi\mathbf{E}$ est une I-équivalence stable pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Grâce au lemme i.23, on peut utiliser une récurrence transfinie pour montrer que les flèches $\mathbf{E} \to \Phi^\beta\mathbf{E}$ (en particulier

[2] cf. SGA 4 I 9.1 pour cette notion.

$\mathbf{E} \to \mathrm{R}\mathbf{E}$) sont des I-équivalences stables (et des monomorphismes) pour tout ordinal β et tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$.

Soit κ un cardinal suffisamment grand pour que les sources des flèches dans $\mathscr{J}$ soient κ-accessibles. On obtient aussitôt que le foncteur Φ commute aux colimites filtrantes indexées par des ensembles ordonnés filtrants grands devant κ ; par récurrence transfinie, on en déduit la même assertion pour le foncteur Φ^β où β est un ordinal quelconque, et donc en particulier pour le foncteur R. Notons que si α est un ordinal limite grand devant κ (par exemple si α l'ordinal sous-jacent à un cardinal infini successeur strictement plus quand que κ), alors il est « bien choisi » au sens où la condition évoquée plus haut sera satisfaite.

Après ces lemmes préliminaires concernant les I-équivalences stables dans $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, nous allons faire une digression (très) technique incluant le lemme I.35 qui nous servira ensuite.

Une axiomatique épouvantable

Le but de ce paragraphe est d'établir le lemme I.35 qui nous servira à vérifier un des axiomes des catégories de modèles fermées pour la catégorie $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ munie d'une des deux structures stables envisagées précédemment. Les arguments de départ sont ceux de [40, theorem 2.3] pour les préfaisceaux simpliciaux. Des difficultés techniques supplémentaires se posent lors de la $\mathbb{A}^1$-localisation pour obtenir [57, corollary 2.20, page 77], qui est un outil technique important mais dont les détails de la démonstration sont passés sous silence (fort justement, compte tenu du caractère épouvantablement horrible de la chose !). Dans la démonstration du lemme I.35 qui nous servira à construire des structures de catégories de modèles, on retrouvera ainsi un ingrédient que les auteurs de [*loc. cit.*] indiquent (à savoir la considération de limites inductives filtrantes indexées par des ensembles ordonnés grands devant un cardinal fixé). On s'est efforcé de donner une formulation axiomatique suffisamment générale pour pouvoir s'appliquer non seulement aux catégories de spectres que l'on va considérer, mais aussi, rétrospectivement, à certaines catégories déjà rencontrées.

Définition I.26 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Une taille sur $\mathscr{C}$ est la donnée d'une « fonction »* [3] *t qui à tout objet de $\mathscr{C}$ associe un cardinal, satisfaisant les axiomes suivants :*

(T1) Deux objets isomorphes ont même taille ;

(T2) Pour tout cardinal κ, il existe un ensemble représentatif des classes d'isomorphismes d'objets de taille $\leq \kappa$.

Remarque I.27 *La notion de taille n'a vraiment d'intérêt que si la catégorie $\mathscr{C}$ n'est pas petite.*

Définition I.28 *Soit t une taille sur une catégorie $\mathscr{C}$. On dit que t est discrète si pour tout cardinal κ (non vide) dans l'image de t, il existe un cardinal $\kappa' < \kappa$ tel que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, si $t(X) < \kappa$ alors $t(X) \leq \kappa'$.*

[3] Il ne s'agit pas vraiment d'une fonction t, mais plutôt d'une formule mathématique $F(X, \kappa)$ en deux variables dans le langage de la théorie des ensembles, qui est telle que pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe un unique cardinal κ tel que $F(X, \kappa)$ soit vraie, on pose alors $t(X) = \kappa$.

On peut remplacer une taille quelconque t par une taille t' discrète en disant que $t'(X)$ est le cardinal successeur de $t(X)$.

L'intérêt des tailles réside principalement dans la trivialité suivante :

Proposition i.29 *Soit $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un foncteur entre deux catégories munies de tailles. Alors, pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' tel que pour tout objet X de $\mathscr{C}$ de taille $\leq \kappa$, l'objet FX soit de taille $\leq \kappa'$.*

Définition i.30 *Soit t une taille sur une catégorie $\mathscr{C}$. On dit que t est croissante avec les monomorphismes si pour tout monomorphisme $i\colon A \to B$ dans $\mathscr{C}$, on a $t(A) \leq t(B)$.*

Lemme i.31 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'une taille t. On suppose que pour tout objet X, la catégorie des sous-objets de X est essentiellement petite. Alors, il existe une taille $t' \geq t$ sur $\mathscr{C}$ telle que t' soit croissante avec les monomorphismes.*

Il suffit de définir $t'(X)$ comme étant le sup des $t'(Y)$ pour Y parcourant les sous-objets de X.

Définition i.32 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ la catégorie des flèches de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire la catégorie des foncteurs $\Delta^1 \to \mathscr{C}$.*

On suppose que l'on dispose de données du type suivant :

(D1) Une catégorie $\mathscr{C}$ munie d'une taille t discrète et croissante avec les monomorphismes.

(D2) Une famille de foncteurs $(\Phi_i)_{i\in I}$ de $\mathscr{C}$ vers $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ indexée par un ensemble I.

(D3) Une famille de foncteurs $(\Psi_j)_{j\in J}$ de $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ vers $\mathrm{Fl}(\mathbf{Ens})$ indexée par un ensemble J.

(D4) Des cardinaux (infinis) β et γ.

Définition i.33 *Dans $\mathscr{C}$, on appelle équivalence faible un morphisme $f\colon A \to B$ tel que pour tout $i \in I$, l'application $\Phi_i(A) \to \Phi_i(B)$ soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux ; on dit d'un morphisme $f\colon A \to B$ que c'est une cofibration si pour tout $j \in J$, l'application $\Psi_j(A \to B)$ est injective. Une cofibration triviale est une cofibration qui est aussi une équivalence faible.*

On suppose que ces données vérifient les axiomes suivants :

(A1) La catégorie $\mathscr{C}$ possède des limites projectives et inductives.

(A2) Les foncteurs $(\Phi_i)_{i\in I}$ et $(\Psi_j)_{j\in J}$ commutent aux limites inductives indexées par des ensembles ordonnés filtrants grands devant γ.

(A3) Dans $\mathscr{C}$, les limites inductives indexées par des ensembles ordonnés filtrants grands devant γ commutent aux limites projectives finies.

(A4) Les cofibrations sont des monomorphismes.

(A5) Les cofibrations, les monomorphismes et les équivalences faibles sont stables par colimites filtrantes.

(A6) Les cofibrations triviales sont stables par image directe.

(A7) Pour tout ensemble A et pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' tel que si $(X_a)_{a\in A}$ est une famille de sous-objets de taille $\leq \kappa$ d'un objet X de $\mathscr{C}$, le plus petit sous-objet M de X majorant les sous-objets X_a (existe et) est de taille $\leq \kappa'$.

(A8) Si A_1 et A_2 sont deux sous-objets d'un objet A de $\mathscr{C}$, que l'on note $A_1 \cap A_2 = A_1 \times_A A_2$ et $A_1 \cup A_2$ la somme amalgamée de A_1 et de A_2 le long de $A_1 \cap A_2$, alors la flèche évidente $A_1 \cup A_2 \to A$ est un monomorphisme. De plus, la taille de $A_1 \cup A_2$ est inférieure ou égale au max des tailles de A_1 et de A_2 [4].

(A9) Tout objet X de $\mathscr{C}$ est la colimite (filtrante) de ses sous-objets de taille $\leq \beta$.

(A10) Pour tout $j \in J$, le foncteur Ψ_j préserve les carrés cocartésiens ; de plus, le but de la flèche $\Psi_j(A \to B)$ ne dépend que de B.

Lemme I.34 *Pour tout cardinal κ, il existe un cardinal $\kappa' \geq \kappa$ tel que pour tout objet X dans $\mathscr{C}$, l'ensemble ordonné des sous-objets de X de taille $\leq \kappa'$ soit grand devant γ.*

On considère la « fonction » f qui à un cardinal κ associe le plus petit cardinal tel que pour toute famille $(X_a)_{a\in A}$ de sous-objets de taille $\leq \kappa$ d'un objet X de $\mathscr{C}$, si A est de cardinal $\leq \gamma$, alors le plus petit sous-objet de X majorant tous les X_a est de taille $\leq f(\kappa)$; $f(\kappa)$ existe bien grâce à l'axiome (A7). Il s'agit de trouver un point fixe κ' à f vérifiant $\kappa' \geq \kappa$.

On définit un cardinal κ_α pour tout ordinal α par induction transfinie : on pose $\kappa_0 = \kappa$, $\kappa_{\alpha+1} = f(\kappa_\alpha)$ et si α est un ordinal limite, on pose $\kappa_\alpha = \sup\limits_{\alpha' \in \alpha} \kappa_{\alpha'}$. On choisit un cardinal infini successeur α strictement plus grand que γ (toute partie de α de cardinal $\leq \gamma$ admet donc un majorant) et on pose $\kappa' = \kappa_\alpha$.

Vérifions que κ' vérifie la condition espérée. Distinguons deux cas. Supposons d'abord que la famille de cardinaux $\kappa_{\alpha'}$ pour $\alpha' \in \alpha$ admette un maximum $\kappa_{\alpha'_0}$. Il vient $\kappa_{\alpha'_0+1} = \kappa_{\alpha'_0}$, puis $\kappa' = \kappa_{\alpha'_0}$ et donc $f(\kappa') = \kappa'$. Supposons maintenant que la famille de cardinaux $\kappa_{\alpha'}$ pour $\alpha' \in \alpha$ n'admette pas de maximum. En utilisant le fait que la taille t a été supposée discrète, on voit qu'il n'existe pas d'objet de $\mathscr{C}$ de taille κ_α. Ainsi, si un objet de $\mathscr{C}$ est de taille $\leq \kappa_\alpha$ alors il est de taille $< \kappa_\alpha$ et donc de taille $\leq \kappa_{\alpha'}$ pour un certain élément $\alpha' \in \alpha$. Compte tenu du choix fait précédemment pour l'ordinal α, on en déduit aisément que $f(\kappa') = \kappa'$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Lemme I.35 *Il existe un cardinal κ' tel que si $f\colon E \to F$ est un morphisme de $\mathscr{C}$ possédant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales entre objets de taille $\leq \kappa'$ alors f possède la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les cofibrations triviales.*

Commençons par montrer que ce lemme résulte du lemme suivant :

Lemme I.36 *Pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' tel que si $A \to B$ est une cofibration triviale, et B_0 un sous-objet de taille $\leq \kappa$ de B, il existe un sous-objet B_1 de taille $\leq \kappa'$ de B tel que $B_0 \subset B_1$, que $A \cap B_1 \to B_1$ soit une cofibration triviale et que $A \cup B_1 \to B$ soit une cofibration.*

[4] Si cette condition n'est pas vérifiée pour la taille t, on peut montrer qu'il existe une taille $t' \geq t$ qui la satisfait.

On applique ce lemme i.36, avec $\kappa = \beta$. On obtient un certain cardinal κ', on va vérifier que ce cardinal vérifie la conclusion du lemme i.35 que l'on veut établir. On se donne un carré commutatif de la forme ci-dessous, où $i\colon A \to B$ est une cofibration triviale et où $E \to F$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales entre objets de taille $\leq \kappa'$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

On considère l'ensemble ordonné $\mathscr{O}$ formé des couples (C, φ) où C est un sous-objet de B majorant A tel que $C \to B$ soit une cofibration triviale et $\varphi\colon C \to E$ un morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\varphi"] & F \end{tikzcd}$$

On dit que $(C, \varphi) \leq (C', \varphi')$ si C est un plus petit sous-objet de C' et que φ' prolonge φ. On montre facilement que $\mathscr{O}$ est inductif, il admet donc un élément maximal. Pour montrer qu'il existe un relèvement dans le carré commutatif de départ, il s'agit de montrer qu'un élément maximal de (C, φ) est forcément tel que $C = B$. Quitte à remplacer le morphisme $A \to B$ par $C \to B$, on se ramène à montrer que si $A \to B$ n'est pas un isomorphisme, alors il existe un élément (C, φ) de $\mathscr{O}$ avec $C \neq A$. D'après l'axiome (A9), B est colimite (filtrante) de ses sous-objets de taille $\leq \beta$, on en déduit qu'il existe un sous-objet B_0 de B de taille $\leq \beta$ qui ne soit pas contenu dans A, le morphisme $A \to A \cup B_0$ n'est donc pas un isomorphisme. D'après le lemme i.36, il existe un sous-objet B_1 de B plus grand que B_0 mais de taille $\leq \kappa'$ tel que $A \cap B_1 \to B_1$ soit une cofibration triviale et $A \cup B_1 \to B$ une cofibration. On a alors un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} A \cap B_1 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r] & A \cup B_1 \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

La flèche $A \cap B_1 \to B_1$ est une cofibration triviale, donc $A \to A \cup B_1$ aussi (cf. axiome (A6)), comme $A \to B$ est une cofibration triviale et que $A \cup B_1 \to B$ est une cofibration, il vient que $A \cup B_1 \to B$ est une cofibration triviale. Par hypothèse, le morphisme $E \to F$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $A \cap B_1 \to B_1$, il en découle formellement qu'il possède aussi la propriété de relèvement par rapport à $A \to A \cup B_1$. On obtient ainsi un relèvement $\varphi\colon A \cup B_1 \to E$ qui donne bien un élément non trivial de $\mathscr{O}$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Passons à la démonstration du lemme i.36 ; pour cela, introduisons un peu de terminologie :

Définition I.37 *Soit un carré commutatif dans la catégorie des ensembles*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "q"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Un défaut d'injectivité de f est un couple (x_1, x_2) d'éléments distincts de X tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on dit qu'il disparaît dans f' si $p(x_1) = p(x_2)$. De façon analogue, un défaut de surjectivité de f est la donnée d'un élément y de Y qui n'est pas dans l'image de f, on dit qu'il disparaît dans f' si $q(y)$ est dans l'image de f'.

Lemme I.38 *Pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' tel que si $A \to B$ est une cofibration triviale, et B_0 un sous-objet de taille $\leq \kappa$ de B, et si (x_1, x_2) est un défaut d'injectivité d'une flèche $\Psi_j(A \cap B_0 \to B_0)$ pour un certain élément $j \in J$, alors il existe un sous-objet B_1 de taille $\leq \kappa'$ de B tel que $B_0 \subset B_1$ et que ce défaut d'injectivité disparaisse dans $\Psi_j(A \cap B_1 \to B_1)$.*

D'après le lemme I.34, on obtient un cardinal κ' plus grand que β et que κ (et ne dépendant que de ces cardinaux β et κ) tel que l'ensemble ordonné des sous-objets de tout objet de $\mathscr{C}$ soit grand devant γ. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble ordonné des sous-objets C de B de taille $\leq \kappa'$ et contenant B_0, cet ensemble ordonné $\mathscr{S}$ est grand devant γ. En utilisant notamment l'axiome (A9), on obtient un isomorphisme

$$\operatorname*{colim}_{C \in \mathscr{S}} C \xrightarrow{\sim} B \ .$$

En utilisant de plus l'axiome (A3), on obtient aussi un isomorphisme

$$\operatorname*{colim}_{C \in \mathscr{S}} (A \cap C) \xrightarrow{\sim} A \ .$$

L'axiome (A2) implique que la flèche $\Psi_j(A \to B)$ s'identifie à la flèche

$$\operatorname*{colim}_{C \in \mathscr{S}} \Psi_j(A \cap C \to C) \ .$$

Cette dernière flèche est donc injective puisque $\Psi_j(A \to B)$ l'est ($A \to B$ étant une cofibration). On en déduit aussitôt l'existence d'un sous-objet B_1 de B de taille $\leq \kappa'$ contenant B_0 et faisant disparaître le défaut d'injectivité choisi au niveau de B_0, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

On peut utiliser des arguments semblables pour faire disparaître des défauts d'injectivité au niveau des morphismes $\Psi_j(A \cup B_0 \to B)$ (l'idée étant de forcer $A \cup B_0 \to B$ à être une cofibration). De la même manière, on peut faire disparaître des défauts de bijectivité au niveau des applications $\pi_0 \Phi_i(A \cap B_0) \to \pi_0 \Phi_i(B_0)$. De façon similaire, pour tout entier $n \geq 1$, on peut faire disparaître des défauts de bijectivité au niveau des applications $\pi_n(\Phi_i(A \cap B_0), x) \to \pi_n(\Phi_i(B_0), x)$ où x est un simplexe de degré 0 de l'ensemble simplicial $\Phi_i(A \cap B_0)$. On obtient ainsi que pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' tel que pour chacun de ces défauts potentiels au niveau d'un sous-objet B_0 de taille $\leq \kappa$, il existe un sous-objet B_1 plus grand mais de taille $\leq \kappa'$ dans lequel le défaut envisagé disparaît. Observons maintenant que l'on peut majorer le cardinal de l'ensembles des défauts possibles en fonction de κ, il s'agit d'utiliser la proposition i.29 ; le plus difficile est de majorer le cardinal de l'ensemble des défauts d'injectivité des flèches $\Psi_j(A \cup B_0 \to B_0)$ en fonction de la taille de B_0 : cela utilise l'axiome (A10). En utilisant l'axiome (A7), on obtient aussitôt que pour un cardinal κ fixé, il existe un cardinal κ', tel que dans la situation précédente, si B_0 est de taille $\leq \kappa$, il existe un B_1 de taille $\leq \kappa'$ qui fasse disparaître non pas seulement un défaut d'injectivité ou de surjectivité d'un type envisagé mais *tous* ces défauts. On vient d'esquisser la démonstration de l'énoncé suivant :

Lemme i.39 *Pour tout cardinal κ, il existe un cardinal κ' rendant vrai ce qui suit. Si $A \to B$ est une cofibration triviale dans $\mathscr{C}$ et B_0 un sous-objet de B de taille $\leq \kappa$, alors il existe un sous-objet B_1 de B contenant B_0 et de taille $\leq \kappa'$ tel que tous les défauts d'injectivité des applications $\Psi_j(A \cap B_0 \to B_0)$ et $\Psi_j(A \cup B_0 \to B)$ ainsi que les défauts de bijectivité des applications $\Phi_i(A \cap B_0) \to \Phi_i(B_0)$ au niveau des « groupes d'homotopie » disparaissent dans les applications correspondantes pour B_1.*

On peut maintenant finir la démonstration du lemme i.36. On part d'un sous-objet B_0 de taille $\leq \kappa$ comme dans l'énoncé. Soit α l'ordinal sous-jacent à un cardinal infini successeur strictement plus grand que γ. On définit une « suite » croissante de sous-objets C_δ pour $\delta \leq \alpha$ de la manière suivante : on pose $C_0 = B_0$. Pour tout ordinal limite δ, on note C_δ la colimite des $C_{\delta'}$ pour $\delta' \in \delta$. On définit $C_{\delta+1}$ comme étant obtenu à partir de C_δ en faisant $B_0 = C_\delta$ dans le lemme i.39. On peut en principe itérer les estimations de tailles données par ce lemme, on obtient ainsi un cardinal κ' (ne dépendant que de κ) tel que C_α soit de taille $\leq \kappa'$. On pose $B_1 = C_\alpha$. Notons que α est un ensemble ordonné grand devant γ, ainsi pour tout $j \in J$, la flèche $\Psi_j(A \cap B_1 \to B_1)$ s'identifie à la colimite des flèches $\Psi_j(A \cap C_\delta \to C_\delta)$, or dans ce système de flèches, un défaut d'injectivité au cran δ disparaît au cran $\delta+1$, à la limite inductive, on obtient évidemment une injection. On a montré que $A \cap B_1 \to B_1$ était une cofibration. On montre de façon similaire que $A \cup B_1 \to B$ est une cofibration et que $A \cap B_1 \to B_1$ est une équivalence faible, ce qui achève la preuve de ce lemme.

Fin de la démonstration

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les théorèmes i.18 et i.19 conduisant à deux structures de catégories de catégories de modèles simpliciales sur les T-spectres.

Rappelons les axiomes que l'on souhaite montrer (cf. [57, page 46]), où $\mathscr{C}$ est une catégorie munie d'une notion de cofibration, de fibration et d'équivalence faible (une cofibration (resp. une fibration) est dite triviale si elle est aussi une équivalence faible).

(MC1) La catégorie $\mathscr{C}$ possède des limites projectives et des limites inductives.

(MC2) Dans un triangle commutatif, si deux flèches sont des équivalences faibles, alors la troisième aussi.

(MC3) Si un morphisme f est un rétracte de g, et que g est une équivalence faible (resp. une cofibration, resp. une fibration), alors f aussi.

(MC4) Toute fibration possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations triviales. Toute cofibration possède la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales.

(MC5) Tout morphisme peut être factorisé fonctoriellement en $p \circ i$ où p est une fibration et i une cofibration triviale. Tout morphisme peut être factorisé fonctoriellement en $p \circ i$ où p est une fibration triviale et i une cofibration.

Que ce soit dans le cas de la structure stable ou dans celui de la structure stable injective, les axiomes (MC1), (MC2) et (MC3) sont trivialement vrais, de même que la moitié de (MC4) concernant la propriété de relèvement à droite des fibrations par rapport aux cofibrations triviales. La moitié de (MC5) concernant la factorisation fonctorielle cofibration/fibration triviale résulte aussitôt de l'énoncé analogue pour les structures de catégories de modèles données dans les théorèmes I.10 et I.12. Rappelons le lemme suivant :

Lemme I.40 (Astuce de Joyal, cf. [40, pages 64–65]) *On suppose donnée une catégorie $\mathscr{C}$ munie de familles de flèches appelées équivalences faibles, cofibrations et fibrations. On suppose que les axiomes (MC1) et (MC2) sont vérifiés, ainsi que les propriétés suivantes :*
- *les cofibrations sont stables par composition et image directe ;*
- *les fibrations ont la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations triviales ;*
- *tout morphisme peut être factorisé en $p \circ i$ avec i une cofibration et p une fibration triviale.*

Alors, l'axiome (MC4) est vérifié.

Compte tenu de ce lemme, on voit aussitôt qu'il ne nous reste plus qu'à établir la moitié de (MC5) qui nous manque, à savoir la factorisation cofibration triviale/fibration. En vertu du raisonnement du « petit objet » (cf. page 26 pour le principe), il s'agit de montrer que dans chacune des deux structures envisagées, il existe un *ensemble* $\mathscr{J}$ de cofibrations triviales telles que les fibrations puissent être caractérisées par la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{J}$.

Il n'y a donc qu'à montrer que l'on est dans les conditions d'application du lemme I.35. D'après le lemme I.25, on a un foncteur $\mathrm{R}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ (commutant aux colimites filtrantes indexées par les ensembles ordonnés grands devant un certain cardinal κ). On sait qu'un morphisme $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une I-équivalence stable si et seulement si $\mathrm{R}\mathbf{E} \to \mathrm{R}\mathbf{F}$ est une I-équivalence projective (entre objets projectivement I-fibrants). Ainsi, on peut définir des foncteurs $\Phi_{X,n}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ pour tout entier naturel n et tout objet $X \in \mathscr{S}$, en posant $\Phi_{X,n}(\mathbf{E}) = (\mathrm{R}\mathbf{E})_n(X)$. On obtient une famille de foncteurs $\Phi_{(X,n)}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ indexée par $(\mathrm{Ob}\,\mathscr{S}) \times \mathbb{N}$ dont on peut vérifier qu'ils commutent aux limites inductives filtrantes indexées par les ensembles ordonnées filtrants grands devant un cardinal γ suffisamment grand et que $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une I-équivalence stable si et seulement si pour tout $(X, n) \in (\mathrm{Ob}\,\mathscr{S}) \times \mathbb{N}$, l'application $\Phi_{(X,n)}\mathbf{E} \to \Phi_{(X,n)}\mathbf{F}$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. C'était le point essentiel à vérifier, on construit facilement les autres données (différentes selon que l'on considère la structure stable ou la structure stable injective) et la vérification des axiomes permettant d'utiliser le lemme I.35 ne pose pas de grande difficulté. La vérification de l'axiome simplicial pour ces structures de catégories de modèles n'est pas difficile non plus. On achève ainsi la démonstration des théorèmes I.18 et I.19.

2 Fonctorialité

2.1 Changement de site

On se donne deux sites avec intervalles $(\mathscr{S}_1, I_1)$ et $(\mathscr{S}_2, I_2)$ (les sites considérés étant supposés avoir assez de points). On se donne un foncteur $f^{-1}\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_1$ définissant une application continue de sites $f\colon \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ [5]. On en déduit formellement un couple de foncteurs adjoints $(f^\star, f_\star)$ avec $f_\star\colon \mathbf{Esp}(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Esp}(\mathscr{S}_2)$ et $f^\star\colon \mathbf{Esp}(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Esp}(\mathscr{S}_1)$.

Définition I.41 ([57, definition 1.55, page 65]) *L'application continue $f\colon \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_2$ est dite raisonnable si pour tout objet X de $\mathscr{S}_2$, tout objet simplicialement fibrant Y de $\mathbf{Esp}(\mathscr{S}_1)$ et toute équivalence faible simpliciale $f_\star Y \to Y'$ dans $\mathbf{Esp}(\mathscr{S}_2)$ avec Y' simplicialement fibrant, l'application évidente d'ensembles simpliciaux*

$$\mathrm{hom}(X, f_\star Y) \to \mathrm{hom}(X, Y')$$

est une équivalence faible.

On suppose que f est une application raisonnable de sites. On se donne de plus un objet T_1 dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$ et un objet T_2 dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ (autrement dit, on a deux sites suspendus avec intervalles, cf. remarque I.5).

Observons tout d'abord que f^{-1} induit un foncteur $f_\star\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ (compatible au foncteur d'oubli du point-base) et que ce foncteur $f_\star\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ admet un adjoint à gauche $f^\star\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$ [6].

On se donne une fois pour toutes un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$ en la variable X :

$$\Psi_X\colon f^\star(T_2 \wedge X) \xrightarrow{\sim} T_1 \wedge f^\star X\ .$$

Par adjonction, la donnée de Ψ équivaut à la donnée d'un isomorphisme de foncteurs $\Psi'\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ en la variable Y :

$$\Psi'_Y\colon \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star Y) \xrightarrow{\sim} f_\star \mathbf{Hom}_\bullet(T_1, Y)\ .$$

On peut alors définir un foncteur $f^\star\colon \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$ par la formule $(f^\star\mathbf{E})_n = f^\star(\mathbf{E}_n)$ pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$, les morphismes d'assemblage étant définis en appliquant $f^\star$ au morphisme d'assemblage de $\mathbf{E}$ et en utilisant Ψ :

$$\begin{tikzcd}
T_1 \wedge f^\star(\mathbf{E}_n) \arrow[r] & f^\star(\mathbf{E}_{n+1}) \\
f^\star(T_2 \wedge \mathbf{E}_n) \arrow[u, "\sim"', "\Psi_{\mathbf{E}_n}"] \arrow[ur, "f^\star\sigma_n"']
\end{tikzcd}$$

[5] Autrement dit, le foncteur $f_\star\colon \mathbf{Prefais}(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Prefais}(\mathscr{S}_2)$ défini à partir de f^{-1} au niveau des catégories de préfaisceaux d'ensembles envoie les faisceaux sur $\mathscr{S}_1$ sur des faisceaux sur $\mathscr{S}_2$.

[6] Il convient de noter que ce foncteur ne commute pas forcément à l'oubli du point-base (en revanche, dans l'autre sens, il commute à la construction $X \to X_+$ consistant à ajouter formellement un point-base à un objet non pointé). Par exemple, si X est un espace topologique, U un ouvert qui n'est pas tout, et que l'on note $j\colon U \to X$ l'inclusion canonique, le foncteur d'inclusion $j_\sharp$ de la catégorie des ouverts de U dans celle de X induit une application continue de sites $X \to U$ dont le foncteur image directe est le foncteur $j^\star$ usuel et l'adjoint à gauche $j_\sharp$ est soit le prolongement par le vide pour les faisceaux d'ensembles, soit le prolongement par $\bullet$ (ou zéro) (pour les faisceaux d'ensembles pointés ou les faisceaux de groupes abéliens).

On définit de même un foncteur $f_\star\colon \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$ par la formule $(f_\star\mathbf{E})_n = f_\star(\mathbf{E}_n)$ pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$, les morphismes adjoints des morphisme d'assemblage de $f_\star\mathbf{E}$ étant obtenus en utilisant l'isomorphisme Ψ' et en appliquant $f_\star$ aux morphismes adjoints σ'_n des morphismes d'assemblage de $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd} f_\star(\mathbf{E}_n) \arrow[r] \arrow[dr, "f_\star\sigma'_n"'] & \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star(\mathbf{E}_{n+1})) \arrow[d, "\Psi_{\mathbf{E}_{n+1}}", "\sim"'] \\ & f_\star\,\mathbf{Hom}_\bullet(T_1, \mathbf{E}_{n+1}) \end{tikzcd}$$

Il est clair que le foncteur $f^\star\colon \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$ est l'adjoint à gauche du foncteur $f_\star\colon \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$.

On suppose maintenant que $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2)$ constitue une application raisonnable de sites avec intervalles (cf. [*ibid.*, definition 3.16, page 92]), autrement dit que le foncteur $\mathrm{R}f_\star\colon \mathscr{H}_\mathrm{s}(\mathscr{S}_1) \to \mathscr{H}_\mathrm{s}(\mathscr{S}_2)$ [7] envoie les objets I_1-locaux sur des objets I_2-locaux.

Lemme I.42 *Soit $g\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une I_1-équivalence projective entre objets projectivement I_1-fibrants de $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$. Alors $f_\star g\colon f_\star\mathbf{E} \to f_\star\mathbf{F}$ est une I_2-équivalence projective.*

C'est évident. On en déduit un foncteur dérivé total à droite

$$\mathrm{R}_\mathrm{p} f_\star\colon \mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2)\ .$$

Proposition I.43 *Le foncteur $\mathrm{R}_\mathrm{p} f_\star\colon \mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2)$ admet un adjoint à gauche qui n'est autre que le foncteur dérivé total à gauche de $f^\star\colon \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$, que l'on note $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1)$.*

On procède d'une façon tout-à-fait semblable à celle de [*ibid.*, proposition 1.57, page 65] :

Définition I.44 *Soit $\mathbf{X}$ un objet de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$. On dit que $\mathbf{X}$ est $f^\star$-admissible si pour tout objet injectivement I_1-fibrant $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$ et toute I_2-équivalence projective $f_\star\mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ avec $\mathbf{Y}'$ un objet injectivement I_2-fibrant de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$, la flèche évidente d'ensembles simpliciaux*

$$\mathrm{hom}(\mathbf{X}, f_\star\mathbf{Y}) \to \mathrm{hom}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}')$$

est une équivalence faible.

Lemme I.45 *Soit $\mathbf{X}$ un objet $f^\star$-admissible de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$. Alors, le foncteur qui à $\mathbf{Y} \in \mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$ associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2)}(\mathbf{X}, \mathrm{R}_\mathrm{p} f_\star\mathbf{Y})$ est coreprésentable, c'est-à-dire que « le foncteur adjoint à gauche de $\mathrm{R}_\mathrm{p} f_\star\colon \mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2)$ est défini en $\mathbf{X}$ ». Plus précisément, on a un isomorphisme fonctoriel en $\mathbf{Y} \in \mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1)$:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{T_1}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_1, I_1)}(f^\star\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{T_2}_\mathrm{p}(\mathscr{S}_2, I_2)}(\mathbf{X}, \mathrm{R}_\mathrm{p} f_\star\mathbf{Y})$$

[7] Il s'agit là du foncteur dérivé total à droite du foncteur $f_\star\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathscr{S}_1) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathscr{S}_2)$ (il est simplement obtenu en appliquant $f_\star$ à une résolution fibrante). Cette construction est possible (cf. [*ibid.*, page 62]) car on a supposé que f était une application continue de sites.

Pour $k \in \{1,2\}$, on choisit une résolution I_k-injectivement fibrante $\mathbf{E} \to \mathbf{E}_{\mathrm{fib}}$ fonctorielle en $Y \in \mathbf{Spt}^{T_k}(\mathscr{S}_k)$ (il sera évident que les isomorphismes construits plus bas seront indépendants de ce choix). Pour tout objet $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$, on considère l'application suivante :

$$\mathrm{hom}(\mathbf{X}, f_\star(\mathbf{Y}_{\mathrm{fib}})) \to \mathrm{hom}(\mathbf{X}, (f_\star(\mathbf{Y}_{\mathrm{fib}}))_{\mathrm{fib}})\ .$$

Comme $\mathbf{X}$ est $f^\star$-admissible, cette application est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. On a par ailleurs un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux :

$$\mathrm{hom}(f^\star\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\mathrm{fib}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{hom}(\mathbf{X}, f_\star(\mathbf{Y}_{\mathrm{fib}}))\ .$$

Finalement, on obtient une équivalence faible fonctorielle en Y :

$$\mathrm{hom}(f^\star\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\mathrm{fib}}) \to \mathrm{hom}(\mathbf{X}, (f_\star(\mathbf{Y}_{\mathrm{fib}}))_{\mathrm{fib}})\ .$$

En passant au π_0, il vient une bijection fonctorielle en Y :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1,I_1)}(f^\star\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2,I_2)}(\mathbf{X}, \mathrm{R_p}f_\star\mathbf{Y})$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Bref, pour montrer que $\mathrm{R_p}f_\star$ admet un adjoint à gauche, il suffit de montrer que tout objet de $\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2)$ peut être représenté par un objet $f^\star$-admissible de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$. Le lemme suivant nous donne cela (et permet aussi de montrer que le foncteur adjoint à gauche de $\mathrm{R_p}f_\star$ est le foncteur dérivé total à gauche de $f^\star$) :

Lemme i.46 *Il existe un foncteur $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$ qui à un objet $\mathbf{X}$ associe un objet $\mathbf{X}_{\mathrm{adm}}$ $f^\star$-admissible, et une transformation naturelle $\mathbf{X}_{\mathrm{adm}} \to \mathbf{X}$ qui soit une I_2-équivalence projective.*

On applique le raisonnement du petit objet à la famille de flèches $\mathscr{A}$ dans $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$ de la forme $F_n(A \times X)_+ \to F_n(B \times X)_+$ où $X \in \mathscr{S}_2$, n est un entier naturel et $A \to B$ une inclusion entre ensembles simpliciaux finis. On obtient ainsi une factorisation fonctorielle $\bullet \to \mathbf{X}_{\mathrm{adm}} \to \mathbf{X}$ de $\bullet \to \mathbf{X}$ pour tout objet $\mathbf{X}$ de $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$, où $\mathbf{X}_{\mathrm{adm}} \to \mathbf{X}$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport à $\mathscr{A}$ (il s'agit donc d'une I_1-équivalence projective) et où $\bullet \to \mathbf{X}_{\mathrm{adm}}$ est un composé transfini d'images directes de sommes directes de morphismes dans $\mathscr{A}$. Observons tout d'abord que les flèches dans $\mathscr{A}$ sont des monomorphismes qui le restent après application de $f^\star$; par ailleurs, pour tout entier naturel n, tout objet $X \in \mathscr{S}_2$ et tout ensemble simplicial K, l'objet $F_n(K \times X)_+$ est $f^\star$-admissible (cela résulte aussitôt du fait qu'on a une application raisonnable de sites avec intervalles).

Les objets $f^\star$-admissibles possèdent des propriétés analogues à celles énoncées dans [*ibid.*, lemma 1.53, page 64]. Dans le cas où on utilise la catégorie des préfaisceaux pour définir les catégories de spectres, elles permettent de conclure. Si on travaille avec des faisceaux, les objets de la forme $F_n(A{\times}X)_+$ pour A un ensemble simplicial fini et $X \in \mathscr{S}_2$ ne sont pas forcément de présentation finie dans $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$; pour terminer la démonstration de ce lemme (et donc de la proposition i.43), on peut utiliser le lemme suivant :

Lemme I.47 *Soit $(X_i)_{i\in\mathscr{I}}$ un système inductif dans $\mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$ indexé par une catégorie filtrante $\mathscr{I}$. On suppose que pour tout $i \in \mathscr{I}$, l'objet X_i est $f^\star$-admissible. Alors $\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} X_\bullet$ est $f^\star$-admissible.*

Soit Y un objet injectivement I_1-fibrant de $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$, soit $f_\star Y \to Y'$ une résolution injectivement I_2-fibrante. On veut montrer que la flèche

$$\hom(\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} X_i, f_\star Y) \to \hom(\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} X_i, Y')$$

est une équivalence faible.

On sait déjà que pour tout $i \in \mathscr{I}$, l'application

$$\hom(X_i, f_\star Y) \to \hom(X_i, Y')$$

est une équivalence faible entre ensembles simpliciaux fibrants ; le fait que ces ensembles simpliciaux soient fibrants résulte, pour $\hom(X_i, Y')$ du fait que Y' soit injectivement I_2-fibrant, et pour $\hom(X_i, f_\star Y)$, de l'isomorphisme isomorphisme canonique $\hom(X_i, f_\star Y) = \hom(f^\star X_i, Y)$ et du caractère injectivement I_1-fibrant de Y. On peut donc passer ces équivalences faibles à la limite homotopique pour obtenir une équivalence faible (cf. [12]) :

$$\hom(\operatorname{hocolim}_{\mathscr{I}} X_i, f_\star Y) \to \hom(\operatorname{hocolim}_{\mathscr{I}} X_i, Y')\ .$$

Comme le foncteur $f^\star$ « commute » à $\operatorname{hocolim}_{\mathscr{I}}$, on obtient le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\hom(\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} f^\star X_i, Y) \arrow[r] \arrow[d] & \hom(\operatorname{colim}_{\mathscr{I}} X_i, Y') \arrow[d] \\
\hom(\operatorname{hocolim}_{\mathscr{I}} f^\star X_i, Y) \arrow[r] & \hom(\operatorname{hocolim}_{\mathscr{I}} X_i, Y')
\end{tikzcd}$$

où la flèche du bas est une équivalence faible et les flèches verticales aussi puisque Y et Y' sont fibrants (pour les structures de catégories de modèles considérées). Il en résulte que la flèche du haut est aussi une équivalence faible, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Pour pouvoir étendre convenablement ces constructions aux catégories homotopiques *stables*, on a besoin d'une hypothèse supplémentaire donnée dans la définition qui vient (et qui récapitule les hypothèses utilisées jusqu'ici) :

Définition I.48 *On se donne $(\mathscr{S}_1, I_1, T_1)$ et $(\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ deux sites suspendus avec intervalles. Une application raisonnable $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ de sites suspendus avec intervalles consiste en la donnée d'une application raisonnable $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2)$ de sites avec intervalles et d'un isomorphisme de foncteurs*

$$\Psi\colon f^\star(T_2 \wedge -) \xrightarrow{\sim} T_1 \wedge f^\star - \colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$$

tels que pour tout objet I_1-fibrant X de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$ et toute I_2-équivalence faible $f_\star X \to X'$ avec X' I_2-fibrant, la flèche $\mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star X) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, X')$ soit une I_2-équivalence faible.

Proposition i.49 *Soit $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. Alors, le foncteur $\mathrm{R_p}f_\star\colon \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2)$ est tel que*

$$\mathrm{R_p}f_\star(\mathcal{SH}_{\Omega}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)) \subset \mathcal{SH}_{\Omega}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2)\ .$$

Si $g\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est un morphisme dans $\mathbf{Spt}^{T_1}(\mathscr{S}_1)$ qui est une I_1-équivalence stable entre Ω-spectres I_1-projectivement fibrants, alors $f_\star g\colon f_\star\mathbf{E} \to f_\star\mathbf{G}$ est une I_2-équivalence stable (entre Ω-spectres).

Le fait que $\mathrm{R_p}f_\star$ préserve les Ω-spectres résulte de la dernière condition intervenant dans la définition d'une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. La deuxième assertion en découle en vertu du lemme i.42.

Sous les hypothèses de la proposition, on obtient aussitôt un foncteur dérivé total à droite $\mathrm{R}f_\star\colon \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2)$. Il est également évident que le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$ préserve les équivalences stables, ce foncteur induit donc un autre foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$ dont on vérifie facilement qu'il définit un adjoint à gauche à $\mathrm{R}f_\star$ (le fait que $\mathrm{R_p}f_\star$ préserve les Ω-spectres est essentiel ici). On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème i.50 *Soit $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. On dispose de couples de foncteurs adjoints $(\mathrm{L}f^\star, \mathrm{R_p}f_\star)$ entre les catégories $\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_k}(\mathscr{S}_k, I_k)$ et $(\mathrm{L}f^\star, \mathrm{R}f_\star)$ entre les catégories $\mathcal{SH}^{T_k}(\mathscr{S}_k, I_k)$ pour $k \in \{1, 2\}$.*

Proposition i.51 *Soit $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. Les diagrammes de catégories suivants sont commutatifs (à des isomorphismes canoniques de foncteurs près) pour tout entier naturel n :*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[r, "F_n"] \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] & \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] & \mathcal{SH}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] \\
\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[r, "F_n"] & \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[r] & \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{R}f_\star"] & \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[r, "\mathrm{ev}_n"] \arrow[d, "\mathrm{R_p}f_\star"] & \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[d, "\mathrm{R}f_\star"] \\
\mathcal{SH}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[r] & \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[r, "\mathrm{ev}_n"] & \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_2, I_2)
\end{tikzcd}$$

Tout d'abord, on a un couple de foncteurs adjoints $(\mathrm{L}f^\star, \mathrm{R}f_\star)$ entre les catégories $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_k, I_k)$ (il s'agit d'une version pointée de la construction de [57, page 92], dont on a développé ici une version pour les spectres). Les foncteurs intervenant dans le premier diagramme sont des foncteurs dérivés à gauche des foncteurs évidents (ou des identités si la flèche n'est pas précisée) tandis que les foncteurs apparaissant sur le deuxième sont des foncteurs dérivés à droite ; les deux diagrammes se correspondent par adjonction. Il est évident que le deuxième diagramme est commutatif (à des isomorphismes canoniques près), le premier l'est donc aussi.

Lemme I.52 *Soit $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. Le diagramme suivant commute à un isomorphisme canonique près :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[r, "\mathrm{ev}_n"] \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] & \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_2, I_2) \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] \\ \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \arrow[r, "\mathrm{ev}_n"] & \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_1, I_1) \end{tikzcd}$$

On construit facilement un morphisme canonique $\mathrm{L}f^\star \circ \mathrm{ev}_n \to \mathrm{ev}_n \circ \mathrm{L}f^\star$ de foncteurs $\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}_1, I_1)$. Il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer que si $\mathbf{X}_{\mathrm{adm}}$ est la résolution admissible à gauche d'un objet $\mathbf{X} \in \mathbf{Spt}^{T_2}(\mathscr{S}_2)$ construite dans le lemme I.46, l'objet $\mathrm{ev}_n(\mathbf{X}_{\mathrm{adm}})$ de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ est $f^\star$-admissible pour la version pointée de la définition de [*ibid.*, remark 1.50, page 64]. En revenant à la construction spécifique de $\mathbf{X}_{\mathrm{adm}}$, on voit qu'il suffit de montrer que si $X \in \mathscr{S}_2$, alors $T_2^{\wedge n} \wedge X_+$ est un objet $f^\star$-admissible de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$, ce qui découle du lemme suivant :

Lemme I.53 *Soit $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles. Soit X un objet de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$. Si X est $f^\star$-admissible, alors $T_2 \wedge X$ aussi.*

Un objet X de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_2)$ est $f^\star$-admissible si et seulement si pour tout objet I_1-fibrant Y de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$ et toute I_2-équivalence faible $f_\star Y \to Y'$ avec Y' un objet I_2-fibrant, la flèche évidente

$$\hom(X, f_\star Y) \to \hom(X, Y')$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. On se donne donc un tel objet X, et on voudrait montrer que $\mathbf{Hom}_\bullet(T_2, X)$ est $f^\star$-admissible. On se donne alors un objet I_1-fibrant Y de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}_1)$, on choisit une I_2-équivalence faible $f_\star Y \to Y'$ avec Y' I_2-fibrant. On veut montrer que la flèche évidente

$$\hom(T_2 \wedge X, f_\star Y) \to \hom(T_2 \wedge X, Y')$$

Par adjonction, cela revient à montrer que la flèche

$$\hom(X, \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star Y)) \to \hom(X, \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, Y'))$$

est une équivalence faible. Comme $\mathbf{Hom}_\bullet(T_2, Y')$ est I_2-fibrant (puisque Y' l'est), la dernière condition donnée dans la définition d'une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles implique que $\alpha\colon \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star Y) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T_2, Y')$ est une I_2-équivalence faible. On a un isomorphisme canonique $\mathbf{Hom}_\bullet(T_2, f_\star Y) = f_\star \mathbf{Hom}_\bullet(T_1, Y)$; comme l'objet $\mathbf{Hom}_\bullet(T_1, Y)$ est I_1-fibrant, on peut utiliser le fait que X soit $f^\star$-admissible pour montrer que $\hom_\bullet(X, \alpha)$ est une équivalence faible, ce qui est précisément ce qu'on voulait.

Remarque I.54 *Le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$ ne préserve pas nécessairement les Ω-spectres. On pourrait construire un contre-exemple en considérant les « points réels » du $\mathbb{P}^1$-spectre* **BGL** *défini au chapitre* IV. *Pour obtenir la conclusion du lemme* I.52 *pour le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2) \to \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$, il faut se limiter aux objets de $\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_2}(\mathscr{S}_2, I_2)$ qui sont des Ω-spectres et qui le restent dans $\mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1)$ après application du foncteur $\mathrm{L}f^\star$.*

Proposition i.55 *On se donne deux applications raisonnables de sites suspendus avec intervalles $f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_2, I_2, T_2)$ et $g\colon (\mathscr{S}_2, I_2, T_2) \to (\mathscr{S}_3, I_3, T_3)$ Alors on peut définir une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles $g \circ f\colon (\mathscr{S}_1, I_1, T_1) \to (\mathscr{S}_3, I_3, T_3)$, et on a des isomorphismes canoniques de foncteurs*

$$\mathrm{R_p}(g \circ f)_\star \xrightarrow{\sim} \mathrm{R_p}g_\star \circ \mathrm{R_p}f_\star \colon \mathcal{SH}^{T_1}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_3}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}_3, I_3) \ ;$$

$$\mathrm{R}(g \circ f)_\star \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}g_\star \circ \mathrm{R}f_\star \colon \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \to \mathcal{SH}^{T_3}(\mathscr{S}_3, I_3) \ ;$$

$$\mathrm{L}f^\star \circ \mathrm{L}g^\star \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}(g \circ f)^\star \colon \mathcal{SH}^{T_3}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}_3, I_3) \to \mathcal{SH}^{T_1}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}_1, I_1) \ ;$$

$$\mathrm{L}f^\star \circ \mathrm{L}g^\star \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}(g \circ f)^\star \colon \mathcal{SH}^{T_3}(\mathscr{S}_3, I_3) \to \mathcal{SH}^{T_1}(\mathscr{S}_1, I_1) \ .$$

Une fois que l'on sait que les applications continues raisonnables de sites (tout court) se composent, il n'y a pas de difficulté à construire l'application raisonnable de sites suspendus avec intervalles $g \circ f$. On peut ensuite montrer très facilement que les quatre morphismes de foncteurs considérés sont des isomorphismes.

Remarque i.56 *On peut ainsi parler des catégories bi-fibrées*[8] *$(\mathscr{S}, I, T) \longmapsto \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ et $(\mathscr{S}, I, T) \longmapsto \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ au-dessus de la catégorie des sites suspendus avec intervalles (avec les applications raisonnables comme morphismes).*

2.2 Changement de suspension

Soit $(\mathscr{S}, I)$ un site avec intervalle (possédant suffisamment de points). On se donne un morphisme $f\colon T' \to T$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$.

On définit un foncteur $f^\star\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$ en faisant correspondre à un T-spectre $\mathbf{E}$ le T'-spectre constitué de la même suite $(\mathbf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, les morphismes d'assemblage σ'_n étant définis par la composition suivante :

$$T' \wedge \mathbf{E}_n \xrightarrow{f\wedge \mathrm{id}_{\mathbf{E}_n}} T \wedge \mathbf{E}_n \xrightarrow{\sigma_n} \mathbf{E}_{n+1} \ .$$

Il est évident que $f^\star\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$ préserve les I-équivalences projectives, on obtient ainsi un foncteur $f^\star\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$.

Proposition i.57 *Soit $(\mathscr{S}, I)$ un site avec intervalle (possédant suffisamment de points). Soit un morphisme $f\colon T' \to T$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$. Si f est une I-équivalence faible, alors le foncteur $f^\star\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories.*

Déduisons-en aussitôt le corollaire suivant :

Corollaire i.58 *Soit $(\mathscr{S}, I)$ un site avec intervalle (possédant suffisamment de points). Soit un morphisme $f\colon T' \to T$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$. Si f est une I-équivalence faible, alors le foncteur $f^\star\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T'}(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories.*

[8]cf. SGA 1 VI 10 pour cette notion.

D'après la proposition, $f^\star\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I) \to \mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$ est une équivalence de catégories. Comme $f\colon T \to T'$ est une I-équivalence faible, il est évident que si $\mathbf{E}$ est un objet de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$, alors $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre si et seulement si $f^\star\mathbf{E}$ est un Ω-spectre. On en déduit qu'un morphisme $g\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ dans $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$ est une I-équivalence stable si et seulement si $f^\star(g)\colon f^\star\mathbf{E} \to f^\star\mathbf{E}'$ est une I-équivalence stable, ce qui permet de conclure.

Pour démontrer la proposition, nous allons construire un foncteur adjoint à droite $f_\star\colon \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ de $f^\star\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$.

Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$. On note $f_\star\mathbf{E}_n$ l'égalisateur des deux flèches

$$\alpha,\beta\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i}) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{Hom}_\bullet(T'\wedge T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i+1})$$

où α est induite par les flèches

$$\mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i}) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T'\wedge T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i+1})$$

induites par les morphismes d'assemblage de $\mathbf{E}$ et où β est induite par les flèches

$$\mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge 1+i},\mathbf{E}_{n+i+1}) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T'\wedge T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i+1})$$

provenant de la composition à droite avec $f\wedge \mathrm{id}_{T^{\wedge i}}\colon T'\wedge T^{\wedge i} \to T\wedge T^{\wedge i} = T^{\wedge 1+i}$.

On note $p_{i,n}$ les morphismes évidents :

$$p_{i,n}\colon (f_\star\mathbf{E})_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i})\ .$$

Pour tout entier naturel n, on définit le morphisme d'assemblage $T\wedge f_\star\mathbf{E}_n \to f_\star\mathbf{E}_{n+1}$ de façon à rendre commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T\wedge (f_\star\mathbf{E})_n \arrow[rr] \arrow[d, "T\wedge p_{i+1,n}"] & & (f_\star\mathbf{E})_{n+1} \arrow[d, "p_{i,n+1}"] \\
T\wedge \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i+1},\mathbf{E}_{n+i+1}) \arrow[r, equal] & T\wedge \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i}\wedge T,\mathbf{E}_{n+i+1}) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge i},\mathbf{E}_{n+i+1})
\end{tikzcd}$$

On montre très facilement le lemme suivant :

Lemme I.59 *Les foncteurs* $f^\star\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$ *et* $f_\star\colon \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ *forment un couple* $(f^\star,f_\star)$ *de foncteurs adjoints.*

Pour tout morphisme $f\colon T' \to T$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, il est clair que $f^\star\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$ préserve les monomorphismes et les I-équivalences projectives. On a ainsi une adjonction de Quillen (pour les structures injectives) ; on peut appliquer [25, lemma 7.9, Chapter II] et [*ibid.*, theorem 7.7, Chapter II] pour montrer que $f^\star\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I) \to \mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$ admet un adjoint à droite $\mathrm{R}f_\star\colon \mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition I.57. Tout d'abord, on peut supposer que $f\colon T' \to T$ est un monomorphisme ; en effet, d'après [*ibid.*, lemma 8.4, Chapter II], comme tous les objets de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ sont cofibrants, il existe une factorisation

$f = g \circ j$ où j est une cofibration (triviale) et q un inverse à gauche d'une cofibration triviale.

On suppose donc que f est une I-équivalence faible qui est aussi un monomorphisme. On veut montrer que les foncteurs adjoints $f^\star$ et $\mathrm{R}f_\star$ définissent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre les catégories $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ et $\mathcal{SH}^{T'}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$. D'après [*ibid.*, corollary 7.8, Chapter II], il s'agit de montrer que si on a une flèche $g\colon f^\star\mathbf{F} \to \mathbf{E}$ dans $\mathbf{Spt}^{T'}(\mathscr{S})$ avec $\mathbf{F}$ un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ et $\mathbf{E}$ un T'-spectre injectivement I-fibrant, alors g est une I-équivalence projective si et seulement si l'application adjointe $\mathbf{F} \to f_\star\mathbf{E}$ est une I-équivalence projective. On voit aussitôt que pour établir cela, il suffit de montrer que si $\mathbf{E}$ est un T'-spectre injectivement I-fibrant, le morphisme d'adjonction $f_\star f^\star\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ est une I-équivalence projective, autrement dit que les morphismes évidents $p_{0,n}\colon (f_\star f^\star\mathbf{E})_n \to \mathbf{E}_n$ sont des I-équivalences faibles. Pour établir ce fait, on récrit $f_\star f^\star\mathbf{E}$ comme la limite projective du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \arrow[d, "\beta"] \\
 & & \mathbf{Hom}_\bullet(T^{\wedge 2}, \mathbf{E}_{n+2}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbf{Hom}_\bullet(T' \wedge T^{\wedge 2}, \mathbf{E}_{n+3}) \\
 & \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & \mathbf{Hom}_\bullet(T' \wedge T, \mathbf{E}_{n+2}) & \\
\mathbf{E}_n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbf{Hom}_\bullet(T', \mathbf{E}_{n+1}) & &
\end{tikzcd}$$

On a supposé ici que $f\colon T' \to T$ était une I-cofibration triviale, les flèches verticales (notées β) sont donc des I-fibrations triviales (le T'-spectre $\mathbf{E}$ étant supposé projectivement I-fibrant). En complétant le diagramme avec des carrés cartésiens, on peut observer que $(f_\star f^\star\mathbf{E})_n$ s'identifie à la limite projective d'une tour de I-fibrations triviales dont la base est $\mathbf{E}_n$; la flèche $(f_\star f^\star\mathbf{E})_n \to \mathbf{E}_n$ est donc une I-fibration triviale, ce qui montre que le morphisme d'adjonction $f_\star f^\star\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ est une I-équivalence projective et achève la démonstration de la proposition.

Proposition i.60 *Soit $(\mathscr{S}, I)$ un site avec intervalle (possédant suffisamment de points). Soit T un objet de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$. Alors, on a un foncteur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S})$ induisant une équivalence de catégories $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S}, I)$.*

On définit un foncteur $G\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S})$ de la manière suivante. Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. On définit un $T \wedge T$-spectre $G\mathbf{E}$ en posant $(G\mathbf{E})_n = \mathbf{E}_{2n}$ et en définissant le morphisme d'assemblage comme la composée suivante :

$$T \wedge T \wedge \mathbf{E}_{2n} \xrightarrow{T\wedge\sigma_{2n}} T \wedge \mathbf{E}_{2n+1} \xrightarrow{\sigma_{2n+1}} \mathbf{E}_{2n+2}\ .$$

On définit un foncteur $F\colon \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ en posant pour tout $T \wedge T$-spectre $\mathbf{F}$ et tout entier naturel n :

$$(F\mathbf{F})_{2n} = \mathbf{F}_n \qquad (F\mathbf{F})_{2n+1} = \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{F}_{n+1})$$

Pour tout entier naturel n, le morphisme d'assemblage $T \wedge (F\mathbf{F})_{2n+1} \to (F\mathbf{F})_{2n+2}$ n'est autre que le morphisme d'évaluation $T \wedge \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{F}_{n+1}) \to \mathbf{F}_{n+1}$ tandis que le morphisme d'assemblage $T \wedge (F\mathbf{F})_{2n} \to (F\mathbf{F})_{2n+1}$ est le morphisme $T \wedge \mathbf{F}_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{F}_{n+1})$ adjoint du morphisme $T \wedge (T \wedge \mathbf{F}_n) \to \mathbf{F}_{n+1}$ que l'on identifie à un morphisme d'assemblage du $T \wedge T$-spectre $\mathbf{F}$.

Lemme I.61 *Les foncteurs $G\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S})$ et $F\colon \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ définissent un couple de foncteurs adjoints (G, F).*

C'est évident.

Il est clair que le foncteur $G\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{T\wedge T}(\mathscr{S})$ préserve les monomorphismes et les I-équivalences projectives ; de plus F préserve les I-équivalences projectives entre objets projectivement I-fibrants. On en déduit une adjonction de Quillen au niveau des structures injectives, d'où des foncteurs $G\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T\wedge T}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ et $\mathrm{R_p}F\colon \mathcal{SH}^{T\wedge T}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ formant un couple de foncteurs adjoints $(G, \mathrm{R_p}F)$. Maintenant, si $\mathbf{F}$ est un $T \wedge T$-spectre projectivement I-fibrant, alors $\mathbf{F}$ est un Ω-spectre si et seulement si $F\mathbf{F}$ est un Ω-spectre, on en déduit que le foncteur $G\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T\wedge T}_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ préserve les équivalences stables, d'où un foncteur induit $G\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S}, I)$ et une adjonction de Quillen au niveau des structures stables injectives, ce dernier foncteur admet donc un adjoint à droite $\mathrm{R}F\colon \mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. On dispose de transformations naturelles $\mathrm{id}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)} \to \mathrm{R}F \circ G\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ et $G \circ \mathrm{R}F \to \mathrm{id}_{\mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S},I)}\colon \mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^{T\wedge T}(\mathscr{S}, I)$ dont on vérifie trivialement que ce sont des isomorphismes. On a donc établi la proposition.

3 Structure triangulée, T-espaces de lacets

Nous allons voir que sous certaines hypothèses, les catégories homotopiques stables construites ici sont canoniquement munies de structures triangulées (cf. théorème I.69). Nous étudierons ensuite les T-espaces de lacets, ceux-ci ont quelque rapport avec la structure triangulée ; cette étude conduira à la comparaison de la notion d'équivalences stables définie ici et celle donnée dans [41].

3.1 Énoncés généraux

Définition I.62 *Soit $\mathscr{H}$ une catégorie et $\Sigma\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un foncteur. On note $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, n) où X est un objet de $\mathscr{H}$ et n un entier relatif, un morphisme $(X, n) \to (Y, m)$ dans $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ est un élément de la limite inductive*

$$\operatorname*{colim}_{r \geq \max(-n,-m)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\Sigma^{r+n} X, \Sigma^{r+m} Y)$$

où les applications de transition sont induites par le foncteur Σ, la composition des flèches est définie de façon évidente.

On a un foncteur évident $s\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ envoyant X sur $(X,0)$. On note

$$-[1] : \mathscr{H}\left[\Sigma^{-1}\right] \to \mathscr{H}\left[\Sigma^{-1}\right]$$

le foncteur qui à un objet (X,n) associe $(X,n+1)$, la définition de ce foncteur au niveau des morphismes étant évidente. Ce foncteur $-[1]$ est un automorphisme de la catégorie $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$, on note $-[n]$ ses puissances, pour tout entier relatif n. On a un isomorphisme canonique de foncteurs $\mathscr{H} \to \mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ entre $s \circ \Sigma$ et $[1] \circ s$ (autrement dit, on a un isomorphisme naturel $(X,1) \cong (\Sigma X, 0)$ pour tout objet X de $\mathscr{H}$).

L'énoncé suivant peut être dégagé à partir de la construction indiquée par Voevodsky dans [76, §4] :

Théorème i.63 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de modèles pointée*[9]*. Notons $\mathscr{H}$ sa catégorie homotopique et $\Sigma\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ le foncteur de suspension (cf. [62, §2, Chapter I]). Alors, la catégorie $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée.*

On trouve presque cet énoncé dans [*ibid.*, proposition 5, §3, Chapter I] ; je me contenterai ici d'esquisser la construction dans le cas plus aisé où $\mathscr{C}$ est de plus supposée simpliciale. On dispose ainsi d'un foncteur $\otimes\colon \mathscr{C} \times \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{C}$. Notons d'abord que si (K,k) est un ensemble simplicial pointé, on peut noter $X \wedge (K,k)$ le quotient $X \otimes K / X \otimes k$, ce qui définit un foncteur $\wedge\colon \mathscr{C} \times \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_{\bullet} \to \mathscr{C}$. On peut identifier Σ au foncteur dérivé à gauche de $- \wedge S^1 \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme dans $\mathscr{C}$ entre objets cofibrants. On définit $\mathrm{cône}(f)$ de façon à avoir un carré cocartésien dans $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \wedge (\Delta^1, 0) \arrow[r] & \mathrm{cône}(f) \end{tikzcd}$$

où la flèche $X \to X \wedge (\Delta^1, 0)$, identifiée à $X \wedge S^0 \to X \wedge (\Delta^1, 0)$ provient de l'inclusion $S^0 \to (\Delta^1, 0)$.

On a un morphisme évident $\mathrm{cône}(f) \to \mathrm{cône}(X \to \bullet) = X \wedge S^1$. On a ainsi défini un triangle (à valeurs dans la catégorie $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ munie du foncteur de translation $-[1]$) :

$$(X,0) \xrightarrow{f} (Y,0) \to (\mathrm{cône}(f), 0) \to (X,1) \ ;$$

notons $\mathscr{T}_f$ ce triangle.

Soit $\mathscr{T} = (A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1])$ un triangle, pour tout entier relatif n, on note $\mathscr{T}[n]$ le triangle

$$A[n] \xrightarrow{(-1)^n u} B[n] \xrightarrow{(-1)^n v} C[n] \xrightarrow{(-1)^n w} A[n+1] \ .$$

Définition i.64 *On dit d'un triangle de $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ qu'il est distingué s'il est isomorphe à un triangle de la forme $\mathscr{T}_f[n]$ pour un certain entier relatif n et un morphisme f entre objets cofibrants de $\mathscr{C}$.*

[9]Une catégorie de modèles est dite pointée si elle possède un objet nul.

Dans ce cadre simplicial, la vérification des axiomes des catégories triangulées est vraiment facile ; pour le cas général, cf. [*loc. cit.*].

Corollaire I.65 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie de modèles pointée, soit $\mathscr{H}$ sa catégorie homotopique. On suppose que le foncteur de suspension $\Sigma\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est une autoéquivalence. Alors $\mathscr{H}$ est canoniquement munie d'une structure de catégorie triangulée.*

En effet, dans ce cas, le foncteur évident $s\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ est une équivalence de catégories. *Stricto sensu*, $\mathscr{H}$ n'est pas une catégorie triangulée au sens de [75, définition 1.1.1, Chapitre II] puisque Σ n'a aucune raison d'être un automorphisme de la catégorie $\mathscr{H}$: ce n'est qu'une autoéquivalence. On laisse en exercice au lecteur de se convaincre qu'il ne s'agit pas là d'un problème très sérieux (au pire, on remplace $\mathscr{H}$ par la catégorie $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ qui lui est équivalente).

Remarque I.66 *On peut interpréter le théorème* I.*63 à la lumière de la théorie des dérivateurs initiée par A. Grothendieck. D'après [16], on sait qu'à une catégorie de modèles $\mathscr{C}$ satisfaisant certaines conditions techniques supplémentaires, on peut associer un dérivateur $\mathbb{D}_{\mathscr{C}}$: on considère simultanément les catégories $\mathbb{D}_{\mathscr{C}}(\mathscr{I})$ pour tout petite catégorie $\mathscr{I}$ (et leur fonctorialité), où $\mathbb{D}_{\mathscr{C}}(\mathscr{I})$ est ici la catégorie homotopique de la catégorie des foncteurs $\mathscr{I} \to \mathscr{C}$ munie d'une structure de catégorie de modèles convenable. Dans [54], G. Maltsiniotis définit une structure triangulée sur $\mathbb{D}(\bullet)$ si $\mathbb{D}$ est un dérivateur satisfaisant certaines conditions, ainsi, le théorème* I.*63 peut presqu'être vu comme un cas particulier de cette construction au niveau des dérivateurs.*

Remarque I.67 *La construction du théorème* I.*63 étant valable pour tout catégorie de modèles pointée, on peut aussi l'appliquer à la catégorie opposée $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ de la catégorie de modèles $\mathscr{C}$ de départ. Le foncteur de suspension sur sa catégorie homotopique $\mathscr{H}^{\mathrm{opp}}$ est induit par le foncteur « espace de lacets » $\Omega\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ (adjoint à droite du foncteur $\Sigma\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$). On dispose donc aussi d'une structure triangulée sur $\mathscr{H}[\Omega^{-1}]^{\mathrm{opp}}$ (et donc aussi sur $\mathscr{H}[\Omega^{-1}]$, cf. [75, §1.1.7, Chapitre II]). Maintenant, si on suppose que Σ (et donc aussi Ω) est une autoéquivalence de la catégorie $\mathscr{H}$, alors les structures triangulées obtenues sur $\mathscr{H}[\Sigma^{-1}]$ et $\mathscr{H}[\Omega^{-1}]$ donnent* a priori *deux structures triangulées sur la catégorie $\mathscr{H}$. On peut montrer que ces deux structures triangulées coïncident (cf. [55]).*

Remarque I.68 *La remarque précédente n'est pas complètement anodine. Si on dispose d'un foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ entre catégories de modèles, il est fréquent qu'on sache montrer facilement que F « commute » aux foncteurs de suspension et que le foncteur induit $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathscr{D}[\Sigma^{-1}]$ préserve les suites « cofibrées » (et donc les triangles distingués), autrement dit F va induire un foncteur triangulé. Parfois, la propriété précédente ne se voit pas à l'œil nu et on obtient plus facilement la propriété duale, à savoir, la compatibilité de F avec les foncteurs « espace de lacets » et la préservation des « suites fibrées ». La remarque précédente réconcilie ces deux approches.*

3.2 Catégories $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$

Théorème I.69 *Soit $(\mathscr{S}, I, T)$ un site suspendu avec intervalle. On suppose qu'il existe un isomorphisme $T \simeq S^1 \wedge T'$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$. Alors, le foncteur $-\wedge S^1 \colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. La catégorie $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est donc canoniquement munie d'une structure triangulée (cf. corollaire I.65).*

Je ne donnerai ici qu'une esquisse de démonstration de ce théorème qui est une suite bien ordonnée de formalités :

(1) On utilisant le corollaire I.58, on observe que l'on peut supposer que $T = S^1 \wedge T'$ avec $T' \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$.

(2) Si A et B sont deux objets de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, on peut définir une notion de (A, B)-bispectre : il s'agit de la donnée d'une famille $(\mathscr{B}_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ d'objets de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ munis de morphismes d'assemblage horizontaux $\sigma_{\mathrm{h}} \colon A \wedge \mathscr{B}_{i,j} \to \mathscr{B}_{i,j+1}$ et verticaux $\sigma_{\mathrm{v}} \colon B \wedge \mathscr{B}_{i,j} \to \mathscr{B}_{i+1,j}$ rendant commutatifs les diagrammes évidents :

$$\begin{tikzcd} A \wedge B \wedge \mathscr{B}_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & B \wedge \mathscr{B}_{i,j+1} \arrow[d, "\sigma_{\mathrm{v}}"] \\ A \wedge \mathscr{B}_{i+1,j} \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{h}}"] & \mathscr{B}_{i+1,j+1} \end{tikzcd}$$

La notion de morphisme de (A, B)-bispectre est évidente, on obtient ainsi une catégorie $\mathbf{Bispt}^{A,B}(\mathscr{S})$. La notion de diagonale d'un bispectre donne un foncteur $\Delta \colon \mathbf{Bispt}^{A,B}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{A\wedge B}(\mathscr{S})$ qui admet un adjoint à droite. On dispose de plusieurs structures de catégories de modèles fermées sur la catégorie $\mathbf{Bispt}^{A,B}(\mathscr{S})$ (où on peut décréter que les cofibrations sont les monomorphismes). On a tout d'abord une structure dans laquelle les équivalences faibles sont les équivalences terme à terme. Comme pour les spectres, on a une notion de Ω-bispectre, il y en a même plusieurs :
- bispectres dont les A-spectres-lignes sont des Ω-spectres ;
- bispectres dont les B-spectres-colonnes sont des Ω-spectres ;
- bispectres vérifiant simultanément les deux conditions précédentes (ce sont ceux-là que l'on appellera « Ω-bispectres » et donneront naissance à la notion d'équivalence stable de bispectres).

En procédant comme pour les spectres, on obtient ainsi trois nouvelles structures de catégorie de modèles. Soit $\mathcal{SH}^{A,B}(\mathscr{S}, I)$ la catégorie homotopique de $\mathbf{Bispt}^{A,B}(\mathscr{S})$ obtenue en inversant les équivalences stables. En remarquant que l'on dispose d'une adjonction de Quillen, on montre facilement que $\Delta \colon \mathbf{Bispt}^{A,B}(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^{A\wedge B}(\mathscr{S})$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{SH}^{A,B}(\mathscr{S}, I) \xrightarrow{\sim} \mathcal{SH}^{A\wedge B}(\mathscr{S}, I)$.

(3) En utilisant la construction précédente, on peut remplacer la catégorie $\mathbf{Spt}^{S^1\wedge T'}(\mathscr{S})$ par la catégorie $\mathbf{Bispt}^{S^1,T'}(\mathscr{S})$. En considérant les (S^1, T')-bispectres dont les S^1-spectres lignes sont des Ω-spectres, on peut ramener le théorème au cas où $T = S^1$.

(4) On se ramène assez formellement au cas où $I = \bullet$, autrement dit, il suffit de traiter le cas où on ne fait pas de I-localisation.

(5) On se ramène au cas du site ponctuel, les foncteurs $- \wedge S^1$ et $\mathbf{Hom}_\bullet(S^1, -)$ « commutant » aux foncteurs fibres.

(6) On se ramène à montrer que le foncteur de suspension sur $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ est une autoéquivalence, ce qui est classique.

3.3 T-suspensions, T-espaces de lacets

Nous allons étudier ici les foncteurs de T-suspension et les foncteurs « T-espaces de lacets ». Dans le cas particulier des catégories $\mathcal{SH}(S)$, la conclusion de cette étude pourrait servir à donner une démonstration alternative au théorème I.69.

On se donne un site suspendu avec intervalle $(\mathscr{S}, I, T)$.

Définition I.70 *Soit $X \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, on note $\Sigma_X\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur qui à un T-spectre $\mathbf{E}$ associe le T-spectre $\Sigma_X\mathbf{E}$ tel que $(\Sigma_X\mathbf{E})_n = \mathbf{E}_n \wedge X$ et où les morphismes d'assemblage sont les morphismes évidents.*

Le lemme suivant est trivial.

Lemme I.71 *Le foncteur $\Sigma_X\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ admet un foncteur adjoint à droite $\Omega_X\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ tel que si $\mathbf{E}$ est un T-spectre, $(\Omega_X\mathbf{E})_n = \mathbf{Hom}_\bullet(X, \mathbf{E}_n)$, les morphismes d'assemblage de Ω_X étant les morphismes évidents.*

Proposition I.72 *Pour tout $X \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$, les foncteurs (Σ_X, Ω_X) définissent une adjonction de Quillen pour les (quatre) structures de catégories de modèles définies sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$.*

Le point essentiel est de montrer que Σ_X préserve les équivalences stables, ce qui résulte facilement des définitions, le foncteur dérivé à droite de Ω_X pour la structure projective préservant les Ω-spectres.

Définition I.73 *On note $\Sigma_X\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ le foncteur induit par le foncteur du même nom sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, son adjoint à droite est $\mathrm{R}\Omega_X\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$: c'est le foncteur dérivé à droite de Ω_X pour la structure stable sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$.*

Du fait de cette adjonction, on déduit que $\Sigma_X\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories si et seulement si les morphismes d'adjonction $\mathrm{id}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)} \to \mathrm{R}\Omega_X \circ \Sigma_X$ et $\Sigma_X \circ \mathrm{R}\Omega_X \to \mathrm{id}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}$ sont des isomorphismes, ce qui équivaut encore à dire que $\mathrm{R}\Omega_X\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories, auquel cas Σ_X et $\mathrm{R}\Omega_X$ seraient quasi-inverses l'un de l'autre.

Proposition I.74 *On se donne deux objets A et B de $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *le foncteur $\Sigma_{A\wedge B}\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories ;*
- *les deux foncteurs $\Sigma_A, \Sigma_B\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ sont des équivalences de catégories.*

Cela résulte simplement du fait que l'on a des isomorphismes (canoniques) de foncteurs $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$:

$$\Sigma_A \circ \Sigma_B \simeq \Sigma_B \circ \Sigma_A \simeq \Sigma_{A \wedge B} \ .$$

Le point essentiel est que Σ_A et Σ_B « commutent ». On peut en effet conclure en utilisant l'argument permettant de dire que dans un monoïde M, si deux éléments f et g commutent, alors fg est inversible si et seulement si f et g sont inversibles.

Grâce à cette proposition, on peut montrer que s'il existe $T' \in \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ et un isomorphisme $T \simeq S^1 \wedge T'$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$, alors pour montrer que $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est triangulée, il suffit de montrer que $\Sigma_T \colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est une équivalence de catégories.

Définition i.75 *On note $\Sigma^l_T \colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur qui à un T-spectre $\mathbf{E}$ associe le T-spectre $\Sigma^l_T\mathbf{E}$ dont le n-ième terme est $(\Sigma^l_T\mathbf{E})_n = T \wedge \mathbf{E}_n$ et dont les morphismes d'assemblage sont définis ainsi :*

$$T \wedge (\Sigma^l_T\mathbf{E})_n = T \wedge (T \wedge \mathbf{E}_n) \xrightarrow{T \wedge \sigma_n} T \wedge \mathbf{E}_{n+1} = (\Sigma^l_T E)_{n+1}$$

où $\sigma_n \colon T \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$ est un morphisme d'assemblage de $\mathbf{E}$.

Je prends ici les mêmes notations que dans [41, remark 2.4]. Cependant, compte tenu de la plus grande généralité envisagée ici, nous donnerons parfois des démonstrations différentes de certains résultats de [*ibid.*] concernant ces foncteurs ; certains résultats intermédiaires, comme le lemme i.82, sont intéressants pour eux-mêmes. Le lemme suivant est évident :

Lemme i.76 *Le foncteur $\Sigma^l_T \colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ admet un foncteur adjoint à droite $\Omega^l_T \colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ tel que pour tout T-spectre $\mathbf{E}$, pour tout entier naturel n, on ait $(\Omega^l_T\mathbf{E})_n = \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_n)$ et que le morphisme d'« assemblage » soit défini à partir du morphisme $\tilde{\sigma}_n \colon \mathbf{E}_n \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ de la manière suivante :*

$$(\Omega^l_T\mathbf{E})_n = \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_n) \xrightarrow{\mathbf{Hom}_\bullet(T, \tilde{\sigma}_n)} \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})) = \mathbf{Hom}_\bullet(T, (\Omega^l_T\mathbf{E})_{n+1}) \ .$$

Le couple de foncteurs (Σ^l_T, Ω^l_T) définit une adjonction de Quillen pour les quatre structures de catégorie de modèles envisagées sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$.

Remarque i.77 *Les deux foncteurs Ω_T et $\Omega^l_T T$ ne sont pas identiques. En effet, si on se hasarde à prendre une notation fonctionnelle et que l'on note $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$ le morphisme d'assemblage $T \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$, on peut décrire les deux morphismes*

$$\mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_n) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1}))$$

définissant les morphismes d'assemblage sur les T-spectres $\Omega_X\mathbf{E}$ et $\Omega^l_T\mathbf{E}$: pour $\Omega_X\mathbf{E}$, on obtient :

$$f \longmapsto t \mapsto t' \mapsto \sigma(t, f(t')) \ ,$$

tandis que pour $\Omega^l_T\mathbf{E}$, on trouve :

$$f \longmapsto t \mapsto t' \mapsto \sigma(t', f(t)) \ .$$

Théorème I.78 *Le foncteur $\Sigma^l_T\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ induit une équivalence de catégories $\Sigma^l_T\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$.*

La démonstration de cette proposition utilise d'autres constructions, utiles par ailleurs, cf. [36] :

Définition I.79 *On note $s_-\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur tel que pour tout T-spectre $\mathbf{E}$, $s_-\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots)$ et $s_+\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur tel que l'on ait $s_+\mathbf{E} = (\bullet, \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots)$, les morphismes d'assemblage sur $s_-\mathbf{E}$ et $s_+\mathbf{E}$ étant définis de façon évidente.*

On montre aisément que s_- est l'adjoint à droite de s_+. Comme s_- préserve les Ω-spectres, on obtient que s_+ préserve les équivalences stables et que (s_+, s_-) forme une adjonction de Quillen pour les quatre structures de catégories de modèles définies sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$. Le lemme suivant montre qu'il n'est pas nécessaire de dériver à droite s_- pour la structure stable :

Lemme I.80 *Le foncteur $s_-\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ préserve les équivalences stables.*

On note $s_{\text{¡}}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur qui à un T-spectre $\mathbf{E}$ associe le T-spectre $(\mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_0), \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \dots)$, les morphismes d'assemblage étant définis de façon évidente. Il est clair que $s_{\text{¡}}$ est l'adjoint à droite de s_-. On remarque que si $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre injectivement fibrant, alors $s_{\text{¡}}\mathbf{E}$ est itou. On en déduit que s_- préserve les équivalences stables.

Lemme I.81 *Les foncteurs adjoints (s_+, s_-) induisent des autoéquivalences de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ inverses l'une de l'autre.*

Les foncteurs s_- et s_+ sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ préservent tous les deux les équivalences stables. Il s'agit donc de montrer que pour tout T-spectre $\mathbf{E}$, les morphismes d'adjonction $\mathbf{E} \to s_-s_+\mathbf{E}$ et $s_+s_-\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ sont des équivalences stables. Pour le premier morphisme, c'est évident puisqu'il s'agit d'un isomorphisme. Pour le second, c'est l'objet du lemme suivant :

Lemme I.82 *Pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, le morphisme canonique $s_+s_-\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ est une équivalence stable.*

On considère le morphisme canonique $F_0\mathbf{E}_0 \to \mathbf{E}$ et le diagramme commutatif auquel il donne naissance :

$$\begin{tikzcd} s_+s_-F_0\mathbf{E}_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0\mathbf{E}_0 \arrow[d] \\ s_+s_-\mathbf{E} \arrow[r] & \mathbf{E} \end{tikzcd}$$

On observe que $s_+s_-F_0\mathbf{E}_0 = F_1(T \wedge \mathbf{E}_0)$. On peut alors vérifier que ce carré est cocartésien. De plus, le morphisme d'en haut $F_1(T \wedge \mathbf{E}_0) \to F_0\mathbf{E}_0$ est un monomorphisme et une équivalence stable (cf. page 25). On peut donc conclure en vertu du lemme I.22.

Le lemme suivant nous ramène à ce qui nous préoccupait :

Lemme I.83 *Il existe un morphisme canonique de foncteurs*

$$\varsigma\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})} \to \Omega_T^l \circ s_- \colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \,.$$

Pour tout T-spectre $\mathbf{E}$, on définit $\varsigma\colon \mathbf{E}_n \to (\Omega_T^l s_- \mathbf{E})_n = \mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ de manière évidente : c'est le morphisme d'assemblage de $\mathbf{E}$. Le point délicat consiste à vérifier que ς est bien un morphisme de T-spectres (ce qui serait faux si on remplaçait Ω_T^l par Ω_T, subtilité fort contrariante).

Au niveau des foncteurs dérivés pour la structure stable sur $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, le morphisme de foncteurs donné par ce lemme est un isomorphisme (considérer le cas où $\mathbf{E}$ est un Ω-spectre injectivement fibrant). Comme on a montré que $s_-\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est une autoéquivalence de catégories, il découle du lemme que $\mathrm{R}\Omega_T^l$ induit aussi une autoéquivalence de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. Par adjonction, l'adjoint à gauche $\Sigma_T^l\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ de $\mathrm{R}\Omega_T^l$ est également une équivalence de catégories, ce qui achève la démonstration du théorème I.78.

Remarque I.84 *Si on dispose d'une homotopie explicite entre l'identité et la permutation circulaire sur $T \wedge T \wedge T$, alors [41, lemma 3.20] (dont la démonstration vaut encore dans ce cadre) permet d'obtenir un isomorphisme de foncteurs $\Sigma_T \cong \Sigma_T^l\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$; comme on sait que Σ_T^l est une autoéquivalence, il en va de même pour Σ_T.*

3.4 Espaces de T-lacets infinis

Cette sous-section va permettre de faire le lien entre la construction de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ donnée ici, et l'approche utilisée dans [41]. Il va cependant falloir faire des hypothèses supplémentaires : en effet, sinon, il n'aurait pas été nécessaire de choisir une autre approche !

On se donne toujours un site suspendu avec intervalle $(\mathscr{S}, I, T)$.

Définition I.85 *On note $\mathbf{\Lambda}\colon \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S}) \to \mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$ le foncteur $\Omega_T^l \circ s_-$ et $\varsigma\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})} \to \mathbf{\Lambda}$ la transformation naturelle canonique (cf. lemme I.83).*

On peut faire l'observation cruciale suivante (cf. [36, lemma 4.5]) :

Lemme I.86 *Pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, on a l'égalité de morphismes*

$$\mathbf{\Lambda}(\varsigma_{\mathbf{E}}) = \varsigma_{\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E}}\colon \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^2\,\mathbf{E} \,.$$

On peut donc définir un système inductif

$$\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^2\,\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}^3\,\mathbf{E} \to \dots$$

pour tout T-spectre $\mathbf{E}$ sans qu'il y ait ambiguïté sur la définition des flèches de transition.

Définition I.87 *Pour tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$, on note $\mathbf{\Lambda}^\infty\,\mathbf{E}$ la colimite du système inductif ci-dessus.*

Lemme I.88 *Pour tout objet* $\mathbf{E}$ *dans* $\mathbf{Spt}^T(\mathscr{S})$*, le morphisme canonique*

$$\mathbf{\Lambda}^\infty(\varsigma_{\mathbf{E}})\colon \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E}) \to \mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E})$$

est un isomorphisme. Si le foncteur $\mathbf{Hom}_\bullet(T,-)$ *sur* $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ *commute aux colimites indexées par* $\mathbb{N}$*, alors la flèche*

$$\varsigma_{\mathbf{\Lambda}^\infty\,\mathbf{E}}\colon \mathbf{\Lambda}^\infty\,\mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}^\infty\,\mathbf{E})$$

est un isomorphisme.

C'est évident à partir du lemme I.86.

Définition I.89 (propriété (J)) *On dit que* $(\mathscr{S}, I, T)$ *satisfait la propriété (J) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(J1) Le foncteur $\mathbf{Hom}_\bullet(T,-)\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S}) \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ *commute aux colimites indexées par* $\mathbb{N}$ *;*

(J2) Pour tout système inductif

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

d'objets I*-fibrants de* $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$ *indexé par* $\mathbb{N}$*, si on note* X_∞ *la colimite de ce système, alors* X_∞ *est acyclique pour le foncteur* $\mathbf{Hom}_\bullet(T,-)$*, autrement dit si* $X_\infty \to X'_\infty$ *est une* I*-équivalence faible avec* X'_∞ I*-fibrant dans* $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathscr{S})$*, alors*

$$\mathbf{Hom}_\bullet(T, X_\infty) \to \mathbf{Hom}_\bullet(T, X'_\infty)$$

est une I*-équivalence faible.*

Il est immédiat que les foncteurs $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Lambda}^\infty$ préservent les I-équivalences faibles projectives entre objets projectivement I-fibrants ; mais *a priori* si $\mathbf{E}$ est projectivement I-fibrant, $\mathbf{\Lambda}^\infty$ ne l'est pas forcément, c'est ce qui justifie l'introduction de la condition (J2) ci-dessus. On note $\mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ (resp. $\mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$) les foncteurs dérivés de $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Lambda}^\infty$ pour la structure projective. On dispose de transformations naturelles évidentes $\varsigma\colon \mathrm{id}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)} \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}$ et $\varsigma^\infty\colon \mathrm{id}_{\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)} \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty$.

Lemme I.90 *Soit* $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$*. Alors,* $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S}, I)$ *si et seulement si* $\varsigma_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}(\mathbf{E})$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$*.*

C'est évident.

Théorème I.91 *Soit* $(\mathscr{S}, I, T)$ *un site suspendu avec intervalle satisfaisant la propriété (J). Alors,*

(1) L'image de $\mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ *est contenue dans* $\mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S}, I)$ *;*

(2) Le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty\colon \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S}, I)$ *est adjoint à gauche de l'inclusion* $\mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ *;*

(3) Un morphisme $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ *dans* $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ *est une* I*-équivalence stable si et seulement si le morphisme* $\mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty(f)\colon \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E}) \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{F})$ *est un isomorphisme dans* $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ *;*

(4) Pour tout objet $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$*, les morphismes*

$$\varsigma\colon \mathbf{E} \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}(\mathbf{E})\,, \qquad \varsigma^\infty\colon \mathbf{E} \to \mathrm{R}\,\mathbf{\Lambda}^\infty(\mathbf{E})$$

sont des I*-équivalences stables.*

La démonstration est purement soritale.

Remarque i.92 *Les hypothèse du théorème* i.*91 sont vérifiées pour le site suspendu avec intervalle* $(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1)$ *(cf. [41, §2.2]). Grâce à la conclusion (3), on obtient donc que les notions d'équivalences stables définies ici et dans [*ibid.*] sont les mêmes.*

Remarque i.93 *Sous les hypothèses du théorème* i.*91, on obtient que pour tout* T*-spectre* $\mathbf{E}$ *projectivement fibrant, la flèche* $\varsigma\colon \mathbf{E} \to \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{E}$ *qui avait été introduite au lemme* i.*83 est une* I*-équivalence stable. Je ne sais malheureusement pas établir ce résultat autrement qu'en utilisant la propriété (J). Pour cette raison, j'ignore si dans le cas général, il existe un analogue de [57, lemma 3.20, page 93] obtenu en itérant* $\mathbf{\Lambda}$ *(et des résolutions projectives) à une puissance donnée par un gros ordinal.*

4 Catégories homotopiques stables d'un schéma noethérien

Définition i.94 *Soit* S *un schéma noethérien. On pose* $\mathcal{SH}\,(S) = \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$*, où* $\mathbb{P}^1$ *est pointé par* ∞*. On note aussi* $\mathscr{H}\,(S)$ *et* $\mathscr{H}_\bullet\,(S)$ *les catégories homotopiques associées au site avec intervalle* $(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$*.*

Il n'est pas difficile de montrer que la notion d'équivalences stables utilisée ici est la même que celle utilisée par Jardine dans [41] (cf. remarque i.92). La définition ci-dessus est donc compatible avec la définition de la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}\,(S)$ d'un schéma noethérien S donnée dans [*ibid.*].

D'après le théorème i.69, la catégorie $\mathcal{SH}\,(S)$ est munie d'une structure de catégorie triangulée.

Remarque i.95 *La construction donnée dans ce chapitre permet de définir une version étale de* $\mathcal{SH}\,(S)$ *: pour tout schéma noethérien* S*, on pose* $\mathcal{SH}_{ét}\,(S) = \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/S_{ét}, \mathbb{A}^1)$*. Le morphisme de sites* $\alpha\colon \mathrm{Sm}/S_{ét} \to \mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ *induit des foncteurs adjoints triangulés* $\mathrm{R}\alpha_\star\colon \mathcal{SH}_{ét}\,(S) \to \mathcal{SH}\,(S)$ *et* $\mathrm{L}\alpha^\star\colon \mathcal{SH}\,(S) \to \mathcal{SH}_{ét}\,(S)$*.*

Proposition i.96 *– Pour tout morphisme* $f\colon X \to S$ *entre schémas noethériens, on dispose de foncteurs adjoints triangulés* $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}\,(S) \to \mathcal{SH}\,(X)$ *et* $\mathrm{R}f_\star\colon \mathcal{SH}\,(X) \to \mathcal{SH}\,(S)$ *;*

– *soit S un schéma noethérien, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$, on note $f\colon X \to S$ le morphisme structural (lisse), alors le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}(X)$ admet un adjoint à gauche triangulé $\mathrm{L}f_\sharp\colon \mathcal{SH}(X) \to \mathcal{SH}(S)$.*

Si $f\colon X \to S$ est un morphisme entre schémas noethériens, une application continue de sites avec intervalle $(\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1) \to (\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$ a été définie dans [57, page 108]. Notons $(f^\star, f_\star)$ les foncteurs correspondant au niveau des espaces (pointés). Pour pouvoir appliquer le théorème I.50 qui donnera naissance au couple de foncteurs adjoints (triangulés) $(\mathrm{L}f^\star, \mathrm{R}f_\star)$ voulu, il s'agit de définir une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles ; soit $\mathscr{F} \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)_{\mathrm{Nis}}$, on définit un isomorphisme :

$$\Psi_{\mathscr{F}}\colon f^\star(\mathbb{P}^1_S \wedge \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} f^\star(\mathbb{P}^1_S) \wedge f^\star\mathscr{F} = \mathbb{P}^1_X \wedge f^\star\mathscr{F}$$

dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/X)_{\mathrm{Nis}}$. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on obtient ainsi une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles $(\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1) \to (\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1)$, cf. définition I.48.

Supposons $X \in \mathrm{Sm}/S$. Le foncteur $f^\star\colon \mathbf{Prefais}(\mathrm{Sm}/S) \to \mathbf{Prefais}(\mathrm{Sm}/X)$ est le foncteur « image directe » pour l'application continue $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}} \to \mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}$ de sites donnée par le foncteur $\mathrm{Sm}/X \to \mathrm{Sm}/S$ qui à $Y \xrightarrow{p} X \in \mathrm{Sm}/X$ associe la composée $Y \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} S \in \mathrm{Sm}/S$. Il est établi dans [*ibid.*, proposition 2.9, page 108] que l'on définit ainsi une application raisonnable de sites avec intervalle. Notons $f_\sharp\colon \mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/X)_{\mathrm{Nis}} \to \mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)_{\mathrm{Nis}}$ la version pointée du foncteur « image inverse » associé. La formule de projection [*ibid.*, proposition 1.23, page 104] implique que l'on a un isomorphisme canonique, pour tout $\mathscr{F} \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/X)_{\mathrm{Nis}}$:

$$\Psi_{\mathscr{F}}\colon f_\sharp(\mathscr{F} \wedge \mathbb{P}^1_X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1_S \wedge f_\sharp\mathscr{F}\ .$$

On obtient ainsi une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles

$$(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1) \to (\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1)$$

donnant un adjoint à gauche $\mathrm{L}f_\sharp\colon \mathcal{SH}(X) \to \mathcal{SH}(S)$ à $f^\star\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}(X)$.

Proposition I.97 *Soit X un schéma noethérien, soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée et $j\colon U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire. Alors, il existe un triangle distingué*

$$\mathrm{L}j_\sharp j^\star\mathbf{E} \to \mathbf{E} \to i_\star\mathrm{L}i^\star\mathbf{E} \to \mathrm{L}j_\sharp j^\star\mathbf{E}\,[1]$$

fonctoriel en $\mathbf{E}$ dans $\mathcal{SH}(X)$.

La première chose à remarquer est que $i_\star\colon \mathbf{Spt}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/Z_{\mathrm{Nis}}) \to \mathbf{Spt}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/Z_{\mathrm{Nis}})$ préserve les $\mathbb{A}^1$-équivalences stables ; ce n'est pas tautologique : compte tenu de [*ibid.*, proposition 2.12, page 109] et du théorème I.91, cela résulte de l'isomorphisme canonique $i_\star\,\mathbf{\Lambda} \cong \mathbf{\Lambda}\,i_\star$ [10].

[10] Du fait de la remarque I.93, je ne sais comment établir l'analogue de la proposition I.97 pour la version étale de ces constructions (cf. remarque I.95).

La démonstration qui suit consiste à ramener cet énoncé au cas instable (cf. [*ibid.*, theorem 2.21, page 114]). Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathbf{Spt}^{\mathbb{P}^1}(\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}})$. On peut supposer que $\mathbf{E}$ est une résolution admissible $\mathbf{F}_{\mathrm{adm}}$ construite au lemme i.46. On observe alors que $\mathbf{E}$ est $j^\star$-admissible et $i^\star$-admissible et même que $j^\star\mathbf{E}$ est $j_\sharp$-admissible. Pour obtenir le triangle distingué voulu, il suffit donc de montrer que le carré commutatif évident

$$\begin{tikzcd} j_\sharp j^\star\mathbf{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{E} \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & i_\star i^\star\mathbf{E} \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cocartésien. Il suffit pour cela de vérifier que terme à terme, on obtient un carré homotopiquement cartésien dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/X)$ (pour la structure de catégorie de modèles donnant naissance à la catégorie $\mathscr{H}_\bullet(X)$). La construction de la résolution du lemme i.46 assure que pour tout entier naturel n, l'objet $\mathbf{E}_n$ est $j^\star$-admissible et $i^\star$-admissible et que $j^\star\mathbf{E}_n$ est $j_\sharp$-admissible ; on s'est bien ramené à la version instable [*loc. cit.*].

Remarque i.98 *La proposition* i.97 *permet de vérifier l'axiome de localité dans le formalisme des quatre foncteurs (cf. [6]) pour la catégorie bi-fibrée $X \longmapsto \mathcal{SH}(X)$ (pour X parcourant les schémas quasi-projectifs sur une base noethérienne fixée). La fonctorialité construite ici ($\mathrm{R}f_\star$, $\mathrm{L}f^\star$ pour f quelconque, et $\mathrm{L}f_\sharp$ pour f lisse) permet de démontrer les autres axiomes des foncteurs homotopiques stables, à l'exception de l'axiome de stabilité qui est pour sa part établi dans [41, §3.4]. Le travail [6] donne donc des foncteurs $f^!\colon \mathcal{SH}(Y) \to \mathcal{SH}(X)$ et $f_!\colon \mathcal{SH}(X) \to \mathcal{SH}(Y)$ satisfaisant de bonnes propriétés pour tout morphisme quasi-projectif $f\colon X \to Y$ entre schémas noethériens. Il n'en sera pas fait usage ici.*

5 Foncteur « points complexes »

Le but de cette section est de définir un foncteur triangulé $\mathcal{SH}(\mathbb{C}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ (et donc plus généralement un foncteur $\mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ pour tout point complexe $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to S$ de S), où $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ désigne la catégorie homotopique stable usuelle (c'est-à-dire que $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}} = \mathcal{SH}^{S^1}(\bullet)$).

5.1 Rappels sur les résultats de Dugger, Hollander et Isaksen et conséquences

Le théorème suivant est un corollaire de [18, theorem 1.1].

Théorème i.99 *Soit $\mathscr{S}$ un site, soit $\mathscr{F} \in \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Pour tout $X \in \mathscr{S}$, la flèche évidente

$$\mathscr{F}(X) \to \mathrm{R}\Gamma(X;\mathscr{F})$$

est un isomorphisme dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ (où $\mathrm{R}\Gamma(X;-)\colon \mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathscr{S}) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ est le foncteur dérivé total à droite du foncteur qui à $\mathscr{F}$ associe $\mathscr{F}(X)$) ;

(2) Pour tout $X \in \mathscr{S}$ et tout hyper-recouvrement $\mathscr{U} \to X$, la flèche

$$\mathscr{F}(X) \to \mathrm{R}\lim_{n\in\mathbf{\Delta}} \mathscr{F}(\mathscr{U}_n)$$

est un isomorphisme dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$.

Définition I.100 *Soit $\mathscr{S}$ un site. On dira d'un objet de $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathscr{S})$ qu'il est acyclique s'il satisfait les conditions équivalentes du théorème précédent.*

Théorème I.101 ([19, theorem 1.3]) *Soit X un espace topologique, soit $\mathscr{U}$ un hyper-recouvrement ouvert de X. Alors l'application*

$$\operatorname*{hocolim}_{n\in\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}} \operatorname{Sing} \mathscr{U}_n \to \operatorname{Sing} X$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Corollaire I.102 *Soit X un espace topologique, K un ensemble simplicial fibrant. Alors, le préfaisceau simplicial sur X qui à un ouvert U associe le hom. interne d'ensembles simpliciaux* $\hom(\operatorname{Sing} U, K)$ *est acyclique.*

Définition I.103 *Un espace topologique est localement contractile s'il possède une base d'ouverts formée d'ouverts contractiles.*

Corollaire I.104 *Soit X un espace topologique localement contractile, K un ensemble simplicial. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}\Gamma(X, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\hom(\operatorname{Sing} X, K)$$

où l'on a encore noté K le (pré)faisceau simplicial constant associé à K.

Tout d'abord, on peut supposer K fibrant. Ensuite, on peut considérer l'application $K \to \hom(\operatorname{Sing} U, K)$ pour tout ouvert U de X ; cela définit un morphisme de préfaisceaux simpliciaux qui est une équivalence faible (locale) puisque X est localement contractile (et que si U est un ouvert contractile, alors l'ensemble simplicial $\operatorname{Sing} U$ est contractile). On peut utiliser le corollaire I.102 pour conclure.

Remarque I.105 *Ce corollaire* I.*104 est une généralisation du théorème de comparaison entre la cohomologie singulière à coefficients entiers et la cohomologie du faisceau de groupes constant $\mathbb{Z}$ (appliquer le corollaire aux espaces d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}, n)$ pour $n \in \mathbb{N}$).*

5.2 Le site des variétés à coins

On note **Coins** la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces topologiques formée des variétés topologiques à coins, c'est-à-dire des espaces topologiques séparés et à base dénombrable admettant un recouvrement par des ouverts homéomorphes à des ouverts d'espaces topologiques de la forme $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ [11]. Les espaces topologiques appartenant à **Coins** sont localement contractiles.

Il est clair que **Coins** est une catégorie essentiellement petite, on la munit de la topologie de Grothendieck induite par la topologie des espaces topologiques appartenant à **Coins**.

Lemme i.106 *Soit K un ensemble simplicial fibrant. Le préfaisceau sur* **Coins** *qui à une variété à coins X associe* $\hom(\operatorname{Sing} X, K)$ *est acyclique.*

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une conséquence du théorème i.99 et du corollaire i.102.

On note $a\colon \mathbf{Coins} \to \bullet$ le morphisme de sites évident. On obtient ainsi un foncteur faisceau constant $a^\star\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Fais}(\mathbf{Coins})$.

Muni de l'intervalle $[0,1]$, le site **Coins** devient un site avec intervalle ; la proposition suivante nous sera très utile :

Proposition i.107 *Soit K un ensemble simplicial. Le faisceau simplicial constant $a^\star K$ sur* **Coins** *est un $[0,1]$-local.*

Cela se ramène à montrer que pour tout $X \in \mathbf{Coins}$, le morphisme évident

$$\mathrm{R}\Gamma(X,K) \to \mathrm{R}\Gamma(X \times [0,1]\,, K)$$

est un isomorphisme dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$. Maintenant, comme $\operatorname{Sing}(X \times [0,1]) \to \operatorname{Sing}(X)$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, la formule du corollaire i.104 permet de conclure.

Remarque i.108 *Il semble que les difficultés inhérentes à la proposition i.107 aient été oubliées dans la démonstration de [57, proposition 3.3, page 120]. Le théorème qui suit donne une démonstration que j'espère plus complète de [*loc. cit.*] (dans le cas particulier du groupe trivial).*

Théorème i.109 *Le foncteur (pré)faisceau constant $a^\star\colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathbf{Esp}(\mathbf{Coins})$ induit une équivalence de catégories*

$$a^\star\colon \mathscr{H}^{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(\mathbf{Coins}, [0,1])\ .$$

On dispose d'un foncteur adjoint à droite $\mathrm{R}^{[0,1]}a_\star\colon \mathscr{H}(\mathbf{Coins},[0,1]) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ à $a^\star$. Le fait que le morphisme de foncteurs issu de l'adjonction

$$\mathrm{id}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}} \to \mathrm{R}^{[0,1]}a_\star a^\star$$

soit un isomorphisme résulte du fait essentiel que l'image de $a^\star$ soit formée d'objets $[0,1]$-locaux (cf. proposition i.107) : on vérifie que pour tout $K \in \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{R}^{[0,1]}a_\star a^\star = a_\star a^\star K = K$.

Il reste à montrer que l'autre morphisme d'adjonction

$$a^\star \mathrm{R}^{[0,1]}a_\star \to \mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathbf{Coins},[0,1])}$$

est un isomorphisme, ce qui est l'objet du lemme suivant :

[11] On peut remarquer qu'il suffit de prendre $q \in \{0,1\}$ puisque $\mathbb{R}_+^2$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi, je pourrais aussi bien parler de variétés topologiques à bord, mais je préfère parler de « coins » puisque cela rend plus fidèlement compte de la forme des simplexes.

Lemme I.110 *Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau simplicial sur* **Coins**. *On suppose que $\mathscr{F}$ est* $[0,1]$-*local. Alors $a^\star a_\star\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ est une équivalence faible.*

On a supposé $\mathscr{F}$ $[0,1]$-local et on a vu que $a^\star a_\star\mathscr{F}$ était également $[0,1]$-local. Comme le morphisme évident $a_\star a^\star a_\star\mathscr{F} \to a_\star\mathscr{F}$ est un isomorphisme, il suffit d'appliquer le lemme suivant au morphisme $a^\star a_\star\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ pour conclure :

Lemme I.111 *Soit $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme entre préfaisceaux simpliciaux sur* **Coins**. *On suppose que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont* $[0,1]$*-locaux et que $a_\star\mathscr{F} \to a_\star\mathscr{G}$ est une équivalence faible, alors $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est une équivalence faible.*

On peut supposer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont simplicialement fibrants. Étant donné que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont $[0,1]$-locaux, pour tout objet $X \in \mathbf{Coins}$ tel que le morphisme $X \to \bullet$ soit une $[0,1]$-équivalence faible, il vient que $\mathscr{F}(\bullet) \to \mathscr{F}(X)$ (resp. $\mathscr{G}(\bullet) \to \mathscr{G}(X)$) est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux ; comme $\mathscr{F}(\bullet) \to \mathscr{G}(\bullet)$ est une équivalence faible par hypothèse, il vient que $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ est aussi une équivalence faible. Si $X \in \mathbf{Coins}$ est un espace topologique contractile, l'application $X \to \bullet$ est évidemment une $[0,1]$-équivalence faible. Comme tous les objets de **Coins** sont localement contractiles, en passant aux germes, il vient que le morphisme $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est une équivalence faible.

La construction du foncteur $a^\star$ s'étend trivialement aux S^1-spectres pour donner un foncteur $a^\star\colon \mathbf{Spt}^{S^1}(\bullet) \to \mathbf{Spt}^{S^1}(\mathbf{Coins},[0,1])$.

Théorème I.112 *Le foncteur $a^\star$ induit des équivalences de catégories*

$$a^\star\colon \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{S^1}(\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathcal{SH}_{\mathrm{p}}^{S^1}(\mathbf{Coins},[0,1])\ ;$$

$$a^\star\colon \mathcal{SH}^{\mathrm{top}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{SH}^{S^1}(\mathbf{Coins},[0,1])\ .$$

Ce théorème se déduit assez trivialement du théorème I.109.

Proposition I.113 *Le diagramme suivant de catégories est commutatif (à un isomorphisme canonique près) :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Coins} \arrow[r] \arrow[dr, "y"'] & \mathscr{H}^{\mathrm{top}} \arrow[d, "a^\star", "\sim"'] \\
 & \mathscr{H}(\mathbf{Coins},[0,1])
\end{tikzcd}$$

où le foncteur du haut est le foncteur évident et le foncteur $y\colon \mathbf{Coins} \to \mathscr{H}(\mathbf{Coins},[0,1])$ est induit par le plongement de Yoneda de **Coins** *dans la catégorie des faisceaux sur* **Coins**.

La proposition résulte du lemme suivant :

Lemme I.114 *Pour tout objet $X \in \mathbf{Coins}$, il existe un zigzag canonique définissant un isomorphisme $yX \xrightarrow{\sim} a^\star \operatorname{Sing} X$ dans $\mathscr{H}(\mathbf{Coins},[0,1])$.*

Il convient de préciser le sens de ce lemme qui peut paraître subtil. La source yX de cet isomorphisme est le faisceau d'ensembles sur **Coins** représenté par X, vu comme faisceau d'ensembles simpliciaux (discrets). Le but $a^\star \operatorname{Sing} X$ est le préfaisceau simplicial constant associé à l'ensemble simplicial $\operatorname{Sing} X$. Simplicialement, ces deux objets sont très différents, ce n'est qu'après $[0,1]$-localisation qu'on va pouvoir les identifier.

La réalisation topologique de l'objet cosimplicial standard $\Delta^\bullet$ dans $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ définit un objet cosimplicial $|\Delta^\bullet|$ dans la catégorie **Coins**. On en déduit, comme dans [*ibid.*, page 88] un foncteur

$$\operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} \colon \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathbf{Coins}) \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Prefais}(\mathbf{Coins})$$

tel que si $\mathscr{X}$ est un préfaisceau simplicial sur **Coins**, alors $\operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} \mathscr{X}$ est la diagonale du préfaisceau bisimplicial

$$(n,m) \longmapsto \mathbf{Hom}(|\Delta^m|, \mathscr{X}_n)\,.$$

On dispose d'un morphisme fonctoriel évident

$$\mathscr{X} \to \operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} \mathscr{X}$$

qui est une $[0,1]$-équivalence faible (démonstration quasi-identique à celle de [*ibid.*, corollary 3.8, page 89]). Considérons $\operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} yX$, c'est le préfaisceau simplicial sur **Coins** qui à un objet U de **Coins** associe l'ensemble simplicial dont l'ensemble des n-simplexes est $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Coins}}(|\Delta^n| \times U, X)$, autrement dit $\operatorname{Sing}(\mathbf{CO}(U,X))$ où $\mathbf{CO}(U,X)$ est l'ensemble des applications continues $U \to X$ muni de la topologie compact-ouvert (noter que U et X sont séparés, et U localement compact, cf. [22, §2, Chapter III]).

On a $a_\star(\operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} yX) = \operatorname{Sing} X$; pour montrer que le morphisme évident

$$a^\star \operatorname{Sing} X \to \operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} yX$$

est une équivalence faible de préfaisceaux simpliciaux sur **Coins**, il suffit de montrer que si $U \in \mathbf{Coins}$ est contractile, alors le morphisme

$$\operatorname{Sing} X \to \operatorname{Sing} \mathbf{CO}(U,X)$$

est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux, ce qui résulte du fait que

$$X = \mathbf{CO}(\bullet, X) \to \mathbf{CO}(U,X)$$

est une équivalence d'homotopie.

On a construit des $[0,1]$-équivalences faibles fonctorielles

$$yX \to \operatorname{Sing}^{|\Delta^\bullet|} yX \leftarrow a^\star \operatorname{Sing} X\ ,$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme.

5.3 Topologie « étale » sur Coins

Définition I.115 *Soit $X \in$ **Coins**. On note $X_{\text{ét}}$ la catégorie des flèches $Y \to X$ dans **Coins** qui sont « étales », c'est-à-dire des homéomorphismes locaux, autrement dit telles que pour tout $y \in Y$, il existe un ouvert U de Y contenant y tel que l'application composée $U \to Y \to X$ soit un homéomorphisme de U sur un ouvert de X.*

Comme les morphismes dans **Coins** sont les applications continues entre certains espaces topologiques et qu'il ne s'agit pas d'une notion différentielle, je préfère mettre le mot *étale* entre guillemets.

Il est aisé de montrer que la catégorie $X_{\text{ét}}$ admet des produits fibrés. On dispose de deux topologies de Grothendieck sur $X_{\text{ét}}$:

– la topologie usuelle, associée à la prétopologie telle que si $Y \in X_{\text{ét}}$, $\operatorname{Cov}(Y)$ est formé des familles $(U_i \to Y)_{i\in I}$ de morphismes dans $X_{\text{ét}}$ telles que pour tout $i \in I$, $U_i \to Y$ soit un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de Y et que l'application $\sqcup_{i\in I} U_i \to Y$ soit surjective ;

– la topologie « étale », associée à la prétopologie telle que pour $Y \in X_{\text{ét}}$, $\operatorname{Cov}(Y)$ soit constitué des familles de morphismes $(U_i \to Y)_{i\in I}$ dans $X_{\text{ét}}$ (forcément « étales » au sens de la définition I.115) telles que l'application $\sqcup_{i\in I} U_i \to Y$ soit surjective.

En mettant ensemble tous ces « petits sites », on obtient aussi deux topologies de Grothendieck sur **Coins**, la topologie usuelle de la sous-section 5.2 et la topologie « étale ». Ces deux topologies coïncident d'après le lemme suivant :

Lemme I.116 *Soit $X \in$ **Coins**. La topologie usuelle et la topologie « étale » sur $X_{\text{ét}}$ coïncident.*

Il est évident que la topologie étale est plus fine que la topologie usuelle. Il s'agit de montrer l'inclusion inverse. Soit donc $(Y_i \xrightarrow{p_i} Y)_{i\in I}$ une famille de morphismes dans $X_{\text{ét}}$ appartenant à la prétopologie étale sur $X_{\text{ét}}$. Conformément à SGA 4 II 1.4, on va montrer que le crible de Y qui lui est associé est couvrant pour la topologie usuelle. C'est très simple : pour tout point $y \in Y$, on peut choisir un indice $i_y \in I$ et un point $\tilde{y} \in Y_{i_y}$ tels que $p_i(\tilde{y}) = y$. Choisissons maintenant un ouvert V_y de Y_{i_y} contenant $\tilde{y}$ et tel que l'application composée $V_y \to Y_{i_y} \to Y$ soit un homéomorphisme de V_y sur un ouvert de Y. Le crible engendré par les morphismes $(Y_i \xrightarrow{p_i} Y)_{i\in I}$ contient le crible engendré par les morphismes $(V_y \to Y)_{y\in Y}$, ce dernier crible est couvrant pour la topologie usuelle, ce qui permet de conclure.

Par conséquent, on notera $X_{\text{ét}}$ le site formé par la catégorie $X_{\text{ét}}$ munie de la topologie « étale » et on se souviendra que cette topologie coïncide avec la topologie usuelle.

5.4 L'application raisonnable $\mathrm{Sm}/\mathbb{C} \to$ Coins

Soit S un schéma noethérien muni d'un morphisme $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to S$. Pour tout objet X de Sm/S, on note $X(\mathbb{C})$ l'ensemble des S-morphismes $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to X$ muni de sa structure de variété $\mathbb{C}$-différentielle (voir GAGA et SGA 1 XII 1.1). On définit ainsi un foncteur $\iota^{-1}\colon \mathrm{Sm}/S \to$ **Coins** par la formule $\iota^{-1}(X) = X(\mathbb{C})$.

Proposition I.117 *Le foncteur $\iota^{-1}\colon \mathrm{Sm}/S \to$ **Coins** définit une application continue raisonnable de sites $\iota\colon$ **Coins** $\to \mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ (ou mieux **Coins** $\to \mathrm{Sm}/S_{\text{ét}}$).*

Commençons par le lemme suivant :

Lemme I.118 *Soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. Le foncteur ι^{-1} induit un foncteur $\iota_X^{-1}\colon X_{\text{ét}} \to X(\mathbb{C})_{\text{ét}}$ qui définit un morphisme de sites $\iota_X\colon X(\mathbb{C})_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ (cf. sous-section 5.3).*

Il s'agit d'abord de montrer qu'un morphisme étale dans Sm/S est bien envoyé, par le foncteur ι^{-1}, sur une application « étale » dans **Coins** : cela résulte du théorème d'inversion locale. On a bien un foncteur $\iota_X^{-1} \colon X_{\text{ét}} \to X(\mathbb{C})_{\text{ét}}$. Notons ensuite qu'un morphisme (étale) surjectif de schémas $f \colon X \to Y$ dans Sm/S induit une application surjective $X(\mathbb{C}) \to Y(\mathbb{C})$: si $y \in Y(\mathbb{C})$, la fibre X_y de f au-dessus de y est un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ et non vide, il possède un $\mathbb{C}$-point [12]. Il en résulte que le foncteur ι_X^{-1} est continu ; comme il commute aux limites projectives finies, on a bien un morphisme de sites (cf. SGA 4 IV 4.9.2).

On en déduit aussitôt le lemme suivant :

Lemme I.119 *Soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. Si $\mathscr{F}$ est un préfaisceau simplicial acyclique sur $X(\mathbb{C})_{\text{ét}}$, alors $\iota_{X,\star}(\mathscr{F})$ est un préfaisceau simplicial acyclique sur $X_{\text{ét}}$.*

On peut maintenant établir la proposition I.117. Le lemme I.118 a pour conséquence que le foncteur $\iota^{-1} \colon \mathrm{Sm}/S_{\text{ét}} \to$ **Coins** est continu. Montrer que ce foncteur définit une application continue raisonnable **Coins** $\to \mathrm{Sm}/S_{\text{ét}}$ (et donc aussi **Coins** $\to \mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$) revient à montrer que si un préfaisceau simplicial $\mathscr{F}$ sur **Coins** est acyclique alors $\iota_\star(\mathscr{F})$ est un préfaisceau simplicial acyclique sur $\mathrm{Sm}/S_{\text{ét}}$.

On peut déduire du théorème I.99 le fait qu'un préfaisceau simplicial sur $\mathrm{Sm}/S_{\text{ét}}$ (resp. sur **Coins**) est acyclique si et seulement si pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ (resp. pour tout $X \in$ **Coins**), la restriction de $\mathscr{F}$ à $X_{\text{ét}}$ est acyclique.

Soit donc $\mathscr{F}$ un préfaisceau simplicial acyclique sur **Coins**. On veut montrer que $\iota_\star(\mathscr{F})$ est acyclique sur $\mathrm{Sm}/S_{\text{ét}}$. D'après le paragraphe précédent, il suffit de montrer que sa restriction à $X_{\text{ét}}$ l'est pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$. Maintenant, on a un isomorphisme canonique

$$\iota_\star(\mathscr{F})_{|X_{\text{ét}}} = \iota_{X,\star}(\mathscr{F}_{|X(\mathbb{C})_{\text{ét}}})$$

de préfaisceaux simpliciaux sur $X_{\text{ét}}$. Toujours d'après le paragraphe précédent, $\mathscr{F}_{|X(\mathbb{C})_{\text{ét}}}$ est un préfaisceau acyclique sur $X(\mathbb{C})_{\text{ét}}$, le lemme I.119 implique que $\iota_{X,\star}(\mathscr{F}_{|X(\mathbb{C})_{\text{ét}}})$ est acyclique sur $X_{\text{ét}}$, ce qui achève la démonstration de la proposition I.117.

Remarque I.120 *Une difficulté de cette proposition provient du fait que la catégorie* $\mathrm{Sm}/\mathbb{C}$ *n'admette pas de produits fibrés, ce qui est un obstacle pour obtenir un morphisme de grands sites (un morphisme de sites donnant trivialement une application raisonnable de sites). On s'est donc ramené, grâce à un théorème de Dugger-Isaksen-Hollander (cf. théorème* I.*99) à des considérations sur les petits sites ; cette approche est suggérée par [57, remark 1.21, page 102] qui envisage cette réduction pour l'obtention des applications raisonnables de sites $f_{top} \colon \mathrm{Sm}/T_{top} \to \mathrm{Sm}/S_{top}$ associées à un morphisme de schémas noethériens $f \colon T \to S$ et pour une topologie top parmi les topologies étale, de Nisnevich ou de Zariski. Pour obtenir la proposition* I.*117, nous eussions également pu utiliser le théorème de Brown-Gersten comme dans [*ibid.*, lemma 3.4, page 120] ou [*ibid.*, proposition 1.20, page 103].*

[12] Ceci serait faux si on remplaçait $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, il faudrait alors utiliser la topologie de Nisnevich à la place de la topologie étale.

Théorème I.121 *Soit S un schéma noethérien, soit $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to S$ un point complexe de S. Alors, ι induit des foncteurs :*

$$\iota^\star\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}} \ ; \qquad \iota^\star\colon \mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}} \ .$$

Ces foncteurs admettent des adjoints à droite.

Lemme I.122 *Le foncteur $\iota^{-1}\colon \mathrm{Sm}/S \to$ **Coins** définit une application raisonnable de sites avec intervalles*

$$\iota\colon (\mathbf{Coins}, [0,1]) \to (\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1) \ .$$

En vertu de [*ibid.*, définition 3.16, page 92], comme on dispose déjà d'une application raisonnable de sites $\iota\colon$ **Coins** $\to \mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ (cf. proposition I.117), il suffit de montrer que pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, le morphisme $\iota^{-1}(X \times \mathbb{A}^1) \to \iota^{-1}(X)$ (autrement dit $X(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \to X(\mathbb{C})$ est une $[0,1]$-équivalence faible, ce qui est évident, $\mathbb{C}$ étant un espace topologique contractile).

Grâce à ce lemme, on dispose d'un foncteur $\mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(\mathbf{Coins}, [0,1])$ (et de sa version pointée). D'après le théorème I.109, on en déduit un foncteur $\iota\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ (resp. $\mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}}$).

5.5 Le foncteur triangulé $\mathcal{SH}(\mathbb{C}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$

Théorème I.123 *Soit S un schéma noethérien, soit $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to S$ un morphisme de schémas. Le morphisme ι donne naissance à un foncteur triangulé*

$$\iota^\star\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$$

vérifiant $\iota^\star(X_+) \simeq X(\mathbb{C})_+$ pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$.

Dans un premier temps, observons que l'application raisonnable de sites avec intervalles construite au lemme I.122 s'étend en une application raisonnable de sites suspendus avec intervalles (cf. définition I.48) :

$$\iota\colon (\mathbf{Coins}, [0,1], \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \to (\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1, \mathbb{P}^1) \ .$$

On en déduit un foncteur triangulé :

$$\mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(\mathbf{Coins}, [0,1]) \, .$$

Compte tenu du corollaire I.58, la proposition I.113 (et plus précisément le lemme I.114) permet de remplacer ci-dessus $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par le faisceau constant associé à l'ensemble simplicial $\operatorname{Sing}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'homéomorphisme classique entre la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial S^2 et l'espace topologique $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ détermine une équivalence faible $S^2 \to \operatorname{Sing}\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En appliquant une nouvelle fois le corollaire I.58, on obtient finalement une équivalence de catégories entre $\mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(\mathbf{Coins}, [0,1])$ et $\mathcal{SH}^{S^2}(\mathbf{Coins}, [0,1])$. D'après la proposition I.60, cette dernière catégorie est équivalente à la catégorie $\mathcal{SH}^{S^1}(\mathbf{Coins}, [0,1])$, qui à son tour est équivalente à $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ d'après le théorème I.112. On a ainsi obtenu un foncteur $\iota^\star\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ qui est triangulé d'après les résultats de la section 3 ; la dernière assertion du théorème résulte de la proposition I.113.

6 La construction naïve

Dans cette section, on donne une version simplifiée $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ de la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ d'un site suspendu avec intervalle $(\mathscr{S}, I, T)$. Cette catégorie présente l'avantage d'être définie très simplement à partir de la catégorie homotopique instable pointée $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$; si on suppose que T est une suspension, la catégorie $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ sera une catégorie additive, mais en général pas triangulée, contrairement à $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ (cf. théorème i.69). Ce qui empêchera le foncteur évident $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ d'être une équivalence de catégories sera la notion d'application stablement fantôme (cf. définition i.129). Ces morphismes sont quelque peu chimériques ; cependant, on montrera de façon très explicite qu'il en existe en théorie homotopique des schémas et topologie, cf. corollaire v.34 et remarque vi.16.

Définition i.124 *Soit $(\mathscr{S}, I, T)$ un site suspendu avec intervalle. On suppose qu'il existe un objet $T' \in \mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ tel que $T \simeq S^1 \wedge T'$. Un objet $\mathbf{E}$ de la catégorie $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est une suite $(\mathbf{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ munis de morphismes d'assemblage $\sigma_n \colon T \wedge \mathbf{E}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ dont les morphismes adjoints $\mathbf{E}_n \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(T, \mathbf{E}_{n+1})$ sont supposés être des isomorphismes. Un morphisme $\varphi \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ dans $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est simplement une suite de morphismes $\varphi_n \colon \mathbf{E}_n \to \mathbf{F}_n$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ induisant des diagrammes commutatifs de la forme suivante dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$:*

$$\begin{tikzcd} T \wedge \mathbf{E}_n \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "T\wedge\varphi_n"'] & \mathbf{E}_{n+1} \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] \\ T \wedge \mathbf{F}_n \arrow[r, "\sigma_n"] & \mathbf{F}_{n+1} \end{tikzcd}$$

On dispose d'un foncteur $\mathrm{oub} \colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$: la catégorie $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathcal{SH}^T_\Omega(\mathscr{S}, I)$ de $\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S}, I)$ formée des Ω-spectres, comme on dispose d'un foncteur évident $\mathcal{SH}^T_\Omega(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$, on obtient le foncteur oub voulu.

Proposition i.125 *La catégorie $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est une catégorie additive. De plus, le foncteur* $\mathrm{oub} \colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ *est additif.*

On montre que $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est additive de façon très classique en utilisant la structure de cogroupe sur S^1 dans $\mathscr{H}^{\text{top}}_\bullet$, donnant naissance à une structure de cogroupe sur T dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ grâce à un isomorphisme $T \simeq S^1 \wedge T'$. Je préfère épargner ces détails au lecteur. Ensuite, le fait que le foncteur oub soit additif résulte simplement du fait qu'il commute aux produits (finis).

Proposition i.126 *Le foncteur* $\mathrm{oub} \colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ *est conservatif*[13], *essentiellement surjectif et plein. De plus, si $\mathbf{E}$ est un objet de $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$, la catégorie*

[13] On rappelle qu'un foncteur $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est dit conservatif si pour tout morphisme f dans $\mathscr{C}$, le fait que $F(f)$ soit un isomorphisme implique que f soit un isomorphisme.

des relèvements de $\mathbf{E}$ *dans* $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$ *est équivalente à la catégorie ponctuelle (autrement dit, le relèvement est bien défini à isomorphisme* unique *près) si et seulement si*

$$\mathrm{R}^1\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)}(S^1\wedge \mathbf{E}_n,\mathbf{E}_n)=0$$

(les flèches de transition du système projectif étant les flèches évidentes).

Le fait que oub soit conservatif est évident. Il est aisé de montrer que ce foncteur est essentiellement surjectif : si on a un objet $\mathbf{E}$ de $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S},I)$, on peut représenter chaque objet $\mathbf{E}_n$ de $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)$ par un faisceau simplicial pointé *fibrant* $\tilde{E}_n$ de sorte que le morphisme d'assemblage $\sigma_n\colon T\wedge\mathbf{E}_n\to\mathbf{E}_{n+1}$ soit la classe d'homotopie d'un authentique morphisme de faisceaux simpliciaux pointés $T\wedge\tilde{E}_n\to\tilde{E}_{n+1}$, ce qui définit bien un objet de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)$ dont l'image dans $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S},I)$ par le foncteur oub est isomorphe à $\mathbf{E}$.

Lemme I.127 *Soit* $\mathbf{E}\in\mathcal{SH}^T_{\mathrm{p}}(\mathscr{S},I)$*, soit* $\mathbf{F}\in\mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S},I)$*. On a une suite exacte courte fonctorielle :*

$$\begin{aligned}0\to \mathrm{R}^1\lim_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)}(S^1\wedge\mathbf{E}_k,\mathbf{F}_k)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E},\mathbf{F})&\\ \to \lim_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E}_k,\mathbf{F}_k)\to 0\ .&\end{aligned}$$

Soit $\mathbf{E}$ un T-spectre. Pour $k\in\mathbb{N}$, on note $L_k\mathbf{E}$ le T-spectre

$$(\mathbf{E}_0,\dots,\mathbf{E}_k,T\wedge\mathbf{E}_k,T\wedge T\wedge\mathbf{E}_k,\dots)$$

dans lequel les premiers morphismes d'assemblage sont ceux de $\mathbf{E}$, les autres étant les isomorphismes évidents. On obtient ainsi un système inductif de T-spectres

$$L_0\mathbf{E}\to L_1\mathbf{E}\to L_2\mathbf{E}\to\dots$$

dont la colimite est $\mathbf{E}$, c'est ce à quoi Jardine donne le nom de *"layer filtration"* dans [41]. Soit $\mathbf{F}$ un Ω-spectre, la suite exacte de Milnor (cf. théorème II.10 ou proposition A.4) donne une suite exacte courte :

$$\begin{aligned}0\to \mathrm{R}^1\lim_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(L_k\mathbf{E}\,[1]\,,\mathbf{F})\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E},\mathbf{F})&\\ \to \lim_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(L_k\mathbf{E},\mathbf{F})\to 0\ .&\end{aligned}$$

On montre facilement que l'inclusion du T-spectre $F_k\mathbf{E}_k=(\bullet,\dots,\bullet,\mathbf{E}_k,T\wedge\mathbf{E}_k,\dots)$ dans $L_k\mathbf{E}$ est une équivalence stable (utiliser plusieurs fois le lemme I.82), ainsi cette suite exacte courte prend la forme voulue.

Un cas particulier de ce lemme est le suivant :

Lemme I.128 *Si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{F}$ *sont deux objets de* $\mathcal{SH}^T_{\Omega}(\mathscr{S},I)$*, on a une suite exacte courte :*

$$\begin{aligned}0\to \mathrm{R}^1\lim_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S},I)}(S^1\wedge\mathbf{E}_k,\mathbf{F}_k)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E},\mathbf{F})&\\ \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S},I)}(\mathrm{oub}\,\mathbf{E},\mathrm{oub}\,\mathbf{F})\to 0\ .&\end{aligned}$$

Revenons à la proposition i.126. Il résulte du lemme précédent que le foncteur d'« oubli » $\mathrm{oub}\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est plein. Soit $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$. La catégorie des relèvements de $\mathbf{E}$ dans $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est la catégorie dont les objets sont les couples $(\tilde{\mathbf{E}}, \alpha)$ où $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ et α est un isomorphisme $\mathrm{oub}\,\tilde{\mathbf{E}} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{E}$ dans $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$, un morphisme $(\tilde{\mathbf{E}}^1, \alpha_1) \to (\tilde{\mathbf{E}}^2, \alpha_2)$ étant un morphisme $f\colon \tilde{\mathbf{E}}^1 \to \tilde{\mathbf{E}}^2$ dans $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif dans $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{oub}\,\tilde{\mathbf{E}}^1 \arrow[rr, "\mathrm{oub}(f)"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & \mathrm{oub}\,\tilde{\mathbf{E}}^2 \arrow[dl, "\alpha_2"] \\ & \mathbf{E} & \end{tikzcd}$$

Comme oub est essentiellement surjectif, cette catégorie des relèvements est non vide ; dire qu'elle est équivalente à la catégorie ponctuelle revient à dire que si $(\tilde{\mathbf{E}}^1, \alpha_1)$ et $(\tilde{\mathbf{E}}^2, \alpha_2)$ sont deux relèvements de $\mathbf{E}$, il existe un unique morphisme entre ces deux objets dans la catégorie des relèvements. Le lemme précédent donne aussitôt le critère voulu, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Définition i.129 *Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont deux objets de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$, on note $\mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ le sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *formé des morphismes qui deviennent nuls après application du foncteur* $\mathrm{oub}\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$. *Les éléments de $\mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ sont appelés « applications stablement fantômes »* [14].

La proposition suivante (qui est triviale) donne une caractérisation des applications stablement fantômes :

Proposition i.130 *On se donne deux objets $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. Soit $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un morphisme dans $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *le morphisme f est stablement fantôme, c'est-à-dire $f \in \mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$;*
- *pour tout entier naturel n et tout objet X de $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(F_n X, \mathbf{E}) \xrightarrow{f\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(F_n X, \mathbf{F})$$

induite par la composition par f est nulle.

Corollaire i.131 *Soit n un entier naturel, soit X un objet de $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$. Pour tout objet $\mathbf{F}$ de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$, on a $\mathscr{F}(F_n X, \mathbf{F}) = 0$.*

Il est évident que l'on a défini un idéal bilatère $\mathscr{F}$ de la catégorie additive $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ au sens de [2]. La proposition i.126 admet la conséquence suivante :

Proposition i.132 *Le foncteur* $\mathrm{oub}\colon \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ *induit une équivalence de catégories $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)/\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$. Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont deux objets de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$, on a une suite exacte courte :*

$$0 \to \mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T(\mathscr{S},I)}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S},I)}(\mathrm{oub}\,\mathbf{E}, \mathrm{oub}\,\mathbf{F}) \to 0 \,.$$

[14]Dans le cas classique, ces morphismes sont qualifiés de *"superphantom"* dans [15].

Proposition I.133 *L'idéal $\mathscr{F}$ de la catégorie additive $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ est de carré nul. Autrement dit, si on se donne trois objets $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ de $\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)$ et des éléments $f \in \mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, alors $g \circ f = 0$.*

Il s'agit de montrer que la flèche

$$\mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \to \mathscr{F}(\mathbf{E}, \mathbf{G})$$

induite par la composition à gauche par g est nulle. On peut supposer que $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont donnés par des Ω-spectres. La fonctorialité évidente de la suite exacte du lemme I.128 identifie la flèche ci-dessus à l'application

$$\mathrm{R}^1 \lim_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)}(S^1 \wedge \mathbf{E}, \mathbf{F}_k) \to \mathrm{R}^1 \lim_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)}(S^1 \wedge \mathbf{E}, \mathbf{G}_k)$$

qui est induite par les morphismes $\mathbf{F}_k \to \mathbf{G}_k$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathscr{S}, I)$ induits par g ; comme $g \in \mathscr{F}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$, les morphismes $\mathbf{F}_k \to \mathbf{G}_k$ sont nuls, ce qui permet de conclure.

Corollaire I.134 *La catégore additive $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$ est pseudo-abélienne.*

Remarque I.135 *Le bifoncteur $\mathscr{F} \colon \big(\mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I)\big)^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{SH}^T(\mathscr{S}, I) \to \mathbf{Ab}$ induit un foncteur $\mathscr{F} \colon \big(\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)\big)^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I) \to \mathbf{Ab}$ puisque l'idéal $\mathscr{F}$ est de carré nul. Cela permet de donner un sens à la notion d'application stablement fantôme entre objets de $\mathcal{SH}^T_{\text{naïve}}(\mathscr{S}, I)$, ce qui peut sembler assez paradoxal.*

Deuxième partie

Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs

Chapitre II

Rappels et préliminaires

Dans ce chapitre, nous faisons quelques rappels sur les limites projectives indexées par $\mathbb{N}$ en vue de leur utilisation dans la suite exacte de Milnor, nous faisons ensuite quelques remarques sur l'astuce de Jouanolou qui nous servira plus loin et nous rappelons enfin les propriétés principales de la K-théorie algébrique que nous utiliserons, ces propriétés étant « élémentaires » au sens où elles sont accessibles si on ne connaît que K_0.

1 Limites projectives

Dans cette section, on étudie quelques propriétés homologiques des limites projectives et leurs applications à la topologie algébrique. Il s'agit de résultats classiques tout à fait élémentaires, la plupart d'entre eux s'avèrent se trouver aussi dans l'article [1].

Si $\mathscr{A}$ est une catégorie, on notera $\mathscr{A}^{\mathrm{opp}}$ sa catégorie opposée. Si $\mathscr{A}$ est une petite catégorie et $\mathscr{B}$ une catégorie, on notera $\mathscr{A}\mathscr{B}$ la catégorie des foncteurs (covariants) de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{B}$. On identifiera un ensemble ordonné filtrant à la catégorie filtrante qui lui est associée (voir SGA 4 I 2.7).

1.1 Limites projectives indexées par $\mathbb{N}$

Proposition II.1 *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne admettant des produits indexés par $\mathbb{N}$* exacts*. Pour tout entier n, on note $\mathrm{R}^n\lim\limits_{\mathbb{N}}$ le n-ième foncteur dérivé à droite du foncteur limite projective $\lim\limits_{\mathbb{N}} \colon \mathbb{N}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A} \to \mathscr{A}$ qui est exact à gauche. Pour tout objet $X_\bullet$:*

$$\cdots \to X_n \to \cdots \to X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$$

de $\mathbb{N}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$, on a une suite exacte fonctorielle :

$$0 \to \lim_{\mathbb{N}} X_\bullet \xrightarrow{i} \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{d} \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \mathrm{R}^1\lim_{\mathbb{N}} X_\bullet \to 0$$

où i est l'inclusion canonique et d est le morphisme dont la m-ième composante $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n \to X_m$ vaut $p_m - f_m p_{m+1}$ où pour tout entier naturel n, p_n est la projection sur le n-ième facteur. De plus, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathrm{R}^n\lim\limits_{\mathbb{N}} X_\bullet = 0$.

Le foncteur qui à un système projectif $X_\bullet$ associe le complexe

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{d} \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

(concentré en degrés cohomologiques 0 et 1) est exact ; on en déduit qu'il définit un δ-foncteur $L\colon \mathbb{N}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A} \to \mathsf{D}(\mathscr{A})$ (cf. [75, §1.3.1, Chapitre III]). On a un isomorphisme canonique $\lim X_\bullet \xrightarrow{\sim} H^0(LX_\bullet)$. Pour montrer que les foncteurs $H^n(LX_\bullet)$ sont les foncteurs dérivés de $\lim\colon \mathbb{N}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A} \to \mathscr{A}$, il suffit de montrer que $X_\bullet \longmapsto H^1(LX_\bullet)$ est effaçable. Pour cela, on note que si $Y_\bullet$ est un système projectif dont les morphismes de transition sont des épimorphismes scindés, alors $H^1(LY_\bullet) = 0$; ainsi, il suffit de montrer que tout système projectif $X_\bullet$ se plonge dans un tel système. On note $f_n\colon X_{n+1} \to X_n$ les morphismes de transition de $X_\bullet$. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \prod_{i=0}^{n} X_n$; on obtient un système projectif $Y_\bullet$ en prenant pour morphismes de transition les projections partielles. En définissant un morphisme $i_n\colon X_n \to Y_n = X_n \times X_{n-1} \times \cdots \times X_0$ pour tout entier naturel n par la formule $i_n = (\mathrm{id}_{X_n}, f_{n-1}, f_{n-2}\circ f_{n-1}, \ldots, f_0 \circ \cdots \circ f_{n-1})$, on obtient un monomorphisme $i\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ de système projectifs avec $H^1(LY_\bullet) = 0$, ce qui permet de conclure.

Définition II.2 *Soit $X_\bullet$ un système projectif indexé par $\mathbb{N}$ dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. On dit que $X_\bullet$ satisfait la propriété de Mittag-Leffler si pour tout entier p, la suite décroissante $(\mathrm{im}(X_{p+n} \to X_p))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-objets de X_p est stationnaire.*

Si les flèches de transition du système projectif $X_\bullet$ sont des épimorphismes, celui-ci vérifie la propriété de Mittag-Leffler. Un autre exemple important est donné par les systèmes $X_\bullet$ tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_n soit de longueur finie. L'intérêt de cette propriété réside dans la proposition suivante (qui n'est *a priori* valable que dans les catégories de modules) :

Proposition II.3 *Soit $\mathscr{A}$ la catégorie des modules sur un anneau fixé, soit $X_\bullet$ un système projectif dans $\mathscr{A}$ indexé par $\mathbb{N}$. Si $X_\bullet$ satisfait la propriété de Mittag-Leffler, alors $\mathrm{R}^1\lim_{\mathbb{N}} X_\bullet = 0$.*

Voir par exemple EGA 0_{III} 13.2.2 ou [31, proposition 9.1, Chapter II].

1.2 Autres catégories d'indices

Les systèmes projectifs qui interviendront plus tard ne seront pas tous naturellement indexés par $\mathbb{N}$ mais l'ensemble ordonné filtrant considéré possèdera toujours une suite croissante cofinale, la proposition qui va suivre permettra donc d'abréger les notations en nous permettant d'utiliser sans hésiter des $\mathrm{R}^1\lim$ indexés par ces ensembles ordonnés, tout en gardant à l'esprit que le choix d'une suite croissante cofinale permet de ramener leur calcul au cas classique des systèmes indexés par $\mathbb{N}$.

Définition II.4 *Soit $\mathscr{I}$ un ensemble ordonné filtrant, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathscr{I}$. On dit que la suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cofinale si pour tout $i \in \mathscr{I}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq i$.*

Il revient au même de dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est cofinale au sens précédent ou que le foncteur $x\colon \mathbb{N} \to \mathscr{I}$ qu'elle définit est cofinal au sens de SGA 4 I 8.1.1.

Proposition II.5 *Soit $\mathscr{I}$ un ensemble ordonné filtrant, soit $x\colon \mathbb{N} \to \mathscr{I}$ une suite croissante cofinale, soit $\mathscr{A}$ la catégorie des modules sur un anneau fixé, on note $\mathrm{R}^n\lim\limits_{\mathscr{I}}$ le n-ième foncteur dérivé à droite du foncteur limite projective $\lim\limits_{\mathscr{I}}\colon \mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A} \to \mathscr{A}$. On note $x^\star$ le foncteur $\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A} \to \mathbb{N}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$ obtenu par composition avec x qui associe naturellement un système projectif indexé par $\mathbb{N}$ à un système projectif indexé par $\mathscr{I}$.*

Pour tout système projectif $X_\bullet \in \mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$ et tout entier $q \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{R}^q\lim_{\mathscr{I}} X_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q\lim_{\mathbb{N}} x^\star X_\bullet\ .$$

En particulier, pour $q \geq 2$, $\mathrm{R}^q\lim\limits_{\mathscr{I}} X_\bullet = 0$.

La première chose à remarquer est que la proposition est bien vraie en degré $q = 0$, grâce à la cofinalité. Il s'agit ensuite d'utiliser les propriétés de composition des foncteurs dérivés (cf. [30, theorem 5.4, Chapter I]) : le foncteur $x^\star$ étant évidemment exact, il suffit de montrer que l'image d'un objet injectif de $\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$ par $x^\star$ est acyclique pour le foncteur $\lim\limits_{\mathbb{N}}$. Grâce à la propriété de Mittag-Leffler, on voit qu'il suffit de vérifier que si i_0 et i_1 sont deux éléments de $\mathscr{I}$ tels que $i_0 \leq i_1$ et $X^\bullet$ un objet injectif de $\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$, alors $X_{i_1} \to X_{i_0}$ est surjective, c'est le contenu du lemme suivant :

Lemme II.6 *Soit $\mathscr{I}$ un ensemble ordonné, soit A un anneau, soit $\mathscr{A}$ la catégorie des A-modules. Soit $X_\bullet$ un objet injectif de la catégorie $\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$. Pour tous éléments $i \leq j$ de $\mathscr{I}$, le morphisme de transition $X_j \to X_i$ est surjectif.*

Pour tout élément k de $\mathscr{I}$, notons $A_{\leq k,\bullet}$ l'objet de $\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}$ tel que $A_{\leq k,l}$ soit A si $l \leq k$ et zéro sinon, les morphismes de transition étant des identités pour les indices inférieurs ou égaux à k et zéro sinon ; formellement, $A_{\leq k,\bullet}$ est le A-module libre sur le préfaisceau d'ensembles représenté par k sur la catégorie $\mathscr{I}$. Ainsi, le lemme de Yoneda a pour conséquence l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{I}^{\mathrm{opp}}\mathscr{A}}(A_{\leq k,\bullet}, X_\bullet) \xrightarrow{\sim} X_k\ .$$

Comme $i \leq j$, on a un morphisme évident $A_{\leq i} \to A_{\leq j}$ qui est évidemment un monomorphisme ; comme $X_\bullet$ est injectif, cela permet de conclure que $X_j \to X_i$ est surjectif.

Remarque II.7 *Le lemme serait faux si on remplaçait $\mathscr{I}$ par une catégorie quelconque (même filtrante). Par exemple, soit $\mathscr{C}$ la catégorie (filtrante) à deux objets 0 et 1, dont les flèches autres que les identités sont un automorphisme d'ordre deux de 0 et une flèche de 0 vers 1. Un préfaisceau de groupes abéliens sur $\mathscr{C}$ consiste en la donnée de deux groupes abéliens X_0, X_1, d'une involution τ de X_0 et d'un morphisme $X_1 \to X_0^\tau$ (où X_0^τ désigne l'ensemble des éléments de X_0 fixés par τ). Si $X_1 \to X_0$ est surjectif, alors τ vaut l'identité. Si on plonge dans un injectif un objet pour lequel l'involution est non triviale, la condition de surjectivité ne sera évidemment pas vérifiée pour cet injectif.*

1.3 Suite exacte de Milnor

Définition ii.8 ([25, §1, Chapter VI]) *On note* $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$ *la catégorie des systèmes projectifs d'ensembles simpliciaux pointés indexés par* $\mathbb{N}$. *On dit qu'un morphisme* $X_\bullet \to Y_\bullet$ *est une équivalence faible (resp. une cofibration) si pour tout entier naturel* n, $X_n \to Y_n$ *est une équivalence faible (resp. une cofibration).*

Munie de ces notions de cofibrations et d'équivalences faibles, $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$ est une catégorie de modèles fermée simpliciale d'après [*ibid.*, proposition 1.3, Chapter VI].

Le foncteur limite projective $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ admet un foncteur dérivé total à droite au niveau des catégories homotopiques associées à ces catégories de modèles : on le note $\mathrm{R}\lim$ (cf. [*ibid.*, §7, Chapter II]). On rappelle que si $X_\bullet$ est un objet de $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$ tel que X_0 soit fibrant et que les morphismes de transition $X_{n+1} \to X_n$ soient des fibrations, alors le morphisme évident $\lim X_\bullet \to \mathrm{R}\lim X_\bullet$ est un isomorphisme dans la catégorie homotopique pointée. Par ailleurs, si tous les objets X_n sont fibrants (mais sans hypothèse supplémentaire sur les morphismes de transition), alors $\mathrm{R}\lim X_\bullet$ peut être « calculé » par une formule (cf. [12]) ; le cas général se ramène à celui-ci en appliquant le foncteur de résolution fibrante $\mathrm{Ex}^\infty : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ au système projectif $X_\bullet$.

Définition ii.9 *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie de modèles fermée admettant un objet nul (noté* $\bullet$*). Un* H*-groupe de* $\mathscr{C}$ *(ou de la catégorie homotopique de* $\mathscr{C}$*) est un objet en groupes dans la catégorie homotopique de* $\mathscr{C}$. *Si* X *est un objet de* $\mathscr{C}$, *une structure de* H*-groupe sur* X *n'est autre qu'une structure d'objet en groupes sur l'image de* X *dans la catégorie homotopique de* $\mathscr{C}$.

Théorème ii.10 *Soit* $X_\bullet$ *un objet en groupes dans la catégorie homotopique de la catégorie de modèles* $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$. *On note* $X = \mathrm{R}\lim X_\bullet$. *Pour tout entier* $i \in \mathbb{N}$, *on a une suite exacte de groupes :*

$$1 \to \mathrm{R}^1 \lim_{n\in\mathbb{N}} \pi_{i+1}(X_n) \to \pi_i(X) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \pi_i(X_n) \to 1 \ .$$

Dans [25, proposition 2.15, Chapter VI], on trouve cet énoncé pour tout objet de la catégorie $\mathbf{Tours}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$, mais la suite n'est *a priori* exacte qu'en tant que suite d'ensembles pointés (et il faut donner en sens au foncteur dérivé des limites projectives dans le cas des groupes non nécessairement abéliens). Remarquons tout d'abord que l'on dispose *a priori* de deux structures de groupes sur les ensembles pointés $\pi_i(X_n)$ et $\pi_i(X)$, la première provient de la structure de groupes sur les groupes d'homotopie π_i pour $i \geq 1$, la seconde est issue de la multiplication sur l'objet $X_\bullet$ et est donc définie pour tout $i \geq 0$. Pour conclure, il s'agit de voir que les deux structures de groupes coïncident (pour $i \geq 1$, on obtient alors des groupes *commutatifs*) et que les morphismes considérés dans la suite ci-dessus sont bien des morphismes de groupes, ce qui se montre facilement en considérant la suite obtenue pour le produit $X_\bullet \times X_\bullet$ et en utilisant la fonctorialité de cette suite vis-à-vis des morphismes de projection et de multiplication $X_\bullet \times X_\bullet \to X_\bullet$.

Remarque ii.11 *Si* $\mathscr{C}$ *n'est pas supposée admettre un objet nul, on peut noter* $\mathscr{C}_\bullet$ *la catégorie* $p\backslash\mathscr{C}$ *où* p *est un objet final de* $\mathscr{C}$, *cette catégorie étant la catégorie dont les objets* *sont les couples (X, x) où X est un objet de $\mathscr{C}$ et $x\colon p \to X$ un morphisme (le « point-base »), les morphismes se définissant de façon évidente. En décrétant qu'une cofibration (resp. une fibration, resp. une équivalence faible) de $\mathscr{C}_\bullet$ est un morphisme devenant itou après oubli des points-bases, on munit tautologiquement $\mathscr{C}_\bullet$ d'une structure de catégorie de modèles fermée. S'il nous arrive de mentionner une structure de H-groupe sur un objet de $\mathscr{C}$, il faudra comprendre que l'on s'est donné un point-base pour en faire un objet de $\mathscr{C}_\bullet$ et que la structure de H-groupe est donnée dans cette catégorie de modèles $\mathscr{C}_\bullet$.*

Nous utiliserons ce théorème dans la situation suivante : nous aurons un H-groupe E et un système inductif $(Y_i)_{i\in\mathscr{I}}$ d'objets (dans une catégorie de modèles convenable) indexé par un ensemble ordonné filtrant admettant une suite cofinale, Y sera la colimite de ce système. On s'intéressera au calcul du groupe des morphismes $Y \to E$ dans la catégorie homotopique. Quitte à choisir une suite cofinale, on pourra supposer que $\mathscr{I} = \mathbb{N}$; on pourra supposer que E est fibrant, que tous les espaces Y_n sont cofibrants et que les morphismes de transition sont des cofibrations. La structure simpliciale sur la catégorie de modèles considérée donnera un sens au système projectif d'ensembles simpliciaux pointés $X_\bullet = \operatorname{hom}(Y_\bullet, E)$ dont la limite homotopique est équivalente à $\operatorname{hom}(Y, E)$, on appliquera ainsi le théorème précédent à $X_\bullet$ qui définit bien un objet de $\mathbf{Tours}(\boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$.

2 Astuce de Jouanolou

2.1 Énoncé

On sait qu'un fibré vectoriel sur un schéma X peut être décrit essentiellement de deux façons :

- sous la forme d'un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre $\mathscr{M}$ de rang fini ;
- d'un point de vue géométrique, comme la donnée d'un X-schéma en groupes commutatif V muni d'une action linéaire de la droite affine $\mathbb{A}^1$ (vue comme schéma en anneaux) telle que localement sur X, V soit isomorphe à $\mathbb{A}^n_X$ sur lequel $\mathbb{A}^1$ agit par multiplication, coordonnée par coordonnée.

On passera toujours d'un de ces points de vue à l'autre en choisissant la convention qui fait que $\mathscr{M}$ soit le faisceau des sections de V. Dans cette partie sur l'astuce de Jouanolou, on utilisera principalement le point de vue géométrique.

Définition II.12 (SGA 6 II 2.2.4) *Soit X un schéma. On dit que X est divisoriel s'il est quasi-compact, quasi-séparé et admet une famille ample de $\mathscr{O}_X$-Modules inversibles, une famille $(\mathscr{L}_i)_{i\in I}$ de Modules inversibles étant ample si les ouverts S_f, pour $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}_i^{\otimes n})$, $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, forment une base de la topologie de X (si $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-Module inversible et f une section globale de $\mathscr{L}$, on note S_f l'ouvert de X sur lequel f est inversible).*

Dans la suite, on dira qu'un schéma est régulier s'il est noethérien, séparé et que ses anneaux locaux sont réguliers (cf. [68]). D'après SGA 6 II 2.2.7.1, un schéma régulier est divisoriel. Le théorème suivant, dont la première version due à Jouanolou concernait les schémas quasi-projectifs sur un schéma affine, s'appliquera donc à tous les schémas réguliers :

Théorème ii.13 (Jouanolou [43, lemme 1.5], Thomason [83, proposition 4.4]) *Soit X un schéma divisoriel. Il existe un torseur T sous un fibré vectoriel V sur X tel que T soit un schéma affine.*

2.2 Interprétation en termes de catégories localisées

Soit S un schéma régulier. On note Sm/S la catégorie des S-schémas de type fini, lisses et séparés et (abusivement) SmAff/S la sous-catégorie pleine de Sm/S formée par les S-schémas de Sm/S qui sont de plus affines (de façon *absolue*, c'est-à-dire sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$).

Définition ii.14 *On note $\mathscr{T}$ la famille des flèches dans Sm/S de la forme $[T \to X]$ où T est un torseur sous un fibré vectoriel V sur X et $\mathscr{T}_{\mathrm{aff}}$ la sous-famille de $\mathscr{T}$ obtenue en demandant à X (et donc à T) d'être des objets de SmAff/S.*

Définition ii.15 *Si $\mathscr{C}$ est une petite catégorie et $\mathscr{W}$ un ensemble de flèches de $\mathscr{C}$, on peut construire une catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ et un foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ qui vérifie la propriété universelle qui fait que, pour toute catégorie $\mathscr{D}$, se donner un foncteur $\mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}] \to \mathscr{D}$ revienne à se donner un foncteur $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ envoyant les morphismes appartenant à la famille $\mathscr{W}$ sur des isomorphismes (cf. [22, §1, Chapter I]).*

Proposition ii.16 *Soit S un schéma régulier, le foncteur évident*

$$\mathrm{SmAff}/S\left[\mathscr{T}_{\mathrm{aff}}{}^{-1}\right] \to \mathrm{Sm}/S\left[\mathscr{T}^{-1}\right]$$

est une équivalence de catégories. Par ailleurs, pour inverser $\mathscr{T}_{\mathrm{aff}}$ dans SmAff/S, il suffit d'inverser les morphismes de projection $\mathbb{A}^1_X \to X$ pour tout $X \in \mathrm{SmAff}/S$.

Tout d'abord, la deuxième assertion est facile : supposons que tous les morphismes de projection $\mathbb{A}^1_X \to X$ de SmAff/S soient rendus inversibles, par récurrence, tous les morphismes de projection $\mathbb{A}^n_X \to X$ deviennent inversibles dans la catégorie localisée, la section nulle $X \to \mathbb{A}^n_X$ induisant l'isomorphisme inverse. Si T est un torseur sous un fibré vectoriel V sur X avec X dans SmAff/S, T est un torseur trivial, ainsi il s'agit de montrer que la projection $V \to X$ induit un isomorphisme dans la catégorie localisée, ce qui est bien vrai puisqu'il s'agit d'un rétracte d'une projection $\mathbb{A}^n_X \to X$, X étant affine.

Ensuite, on peut énoncer des conditions suffisantes sur une catégorie $\mathscr{C}$, un ensemble de flèches $\mathscr{W}$ de $\mathscr{C}$ et une sous-catégorie (strictement) pleine $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}$ pour que, si l'on note $\mathscr{W}_{\mathscr{A}}$ la sous-famille de $\mathscr{W}$ formée des flèches dans $\mathscr{A}$ qui appartiennent à $\mathscr{W}$, le foncteur évident $\mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right] \to \mathscr{C}[\mathscr{W}^{-1}]$ soit une équivalence de catégories :

(i) Les identités de $\mathscr{C}$ sont dans $\mathscr{W}$, les morphismes appartenant à $\mathscr{W}$ sont quarrables [1] (dans $\mathscr{C}$) et l'image inverse d'une flèche de $\mathscr{W}$ est dans $\mathscr{W}$;

(ii) Si $T \to X$ est dans $\mathscr{W}$ et X dans $\mathscr{A}$, alors T est un objet de $\mathscr{A}$;

(iii) Si X est un objet de $\mathscr{C}$, il existe $T \to X$ dans $\mathscr{W}$ avec T objet de $\mathscr{A}$.

[1] On rappelle (voir SGA 4 I 10.7) qu'un morphisme $f\colon A \to B$ dans une catégorie est dit quarrable si pour tout morphisme $g\colon B' \to B$ le produit fibré $A \times_B B'$ est représentable. Le morphisme $A \times_B B' \to B'$ qui s'en déduit alors est appelé l'image inverse de f par g.

Ces trois conditions sont satisfaites dans le cas de la proposition précédente : pour (i) et (ii), c'est évident ; pour (iii), c'est précisément l'astuce de Jouanolou (cf. théorème II.13).

Montrons que ces conditions sont suffisantes : supposons ces trois conditions vérifiées, soit $\widetilde{\mathscr{C}}$ la catégorie dont les objets sont les flèches $T \to X$ appartenant à $\mathscr{W}$ telles que T soit dans $\mathscr{A}$ (un tel objet sera noté $[T \to X]$ dans la suite) et telle que l'ensemble des morphismes de $[T \to X]$ vers $[T' \to X']$ soit l'ensemble des morphismes $X' \to X$ dans $\mathscr{C}$, autrement dit on a un foncteur pleinement fidèle $\mathrm{oub}\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}$. L'essentielle surjectivité de oub équivaut à la condition (iii), ainsi oub est une équivalence de catégories. Notons $\widetilde{\mathscr{W}}$ l'image inverse par le foncteur oub de la famille de flèches $\mathscr{W}$ de $\mathscr{C}$. Le foncteur oub induit ainsi une équivalence de catégories $\mathrm{oub}'\colon \widetilde{\mathscr{C}}\left[\widetilde{\mathscr{W}}^{-1}\right] \to \mathscr{C}\left[\mathscr{W}^{-1}\right]$.

Définissons un foncteur $F\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to \mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right]$. Pour tout objet $[T \to X]$ de $\widetilde{\mathscr{C}}$, on pose $F([T \to X]) = T$; si $f\colon X \to X'$ constitue un morphisme $[T \to X] \to [T' \to X']$, on pose $F(f) = hg^{-1}$ où g et h sont représentés sur le diagramme suivant, ce qui a un sens car $T \times_{X'} T'$ existe et g appartient à $\mathscr{W}_{\mathscr{A}}$ en vertu de (i) et (ii) :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "p"'] & T \times_{X'} T' \arrow[l, "g"'] \arrow[r, "h"] & T' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[rr, "f"] & & X' \end{tikzcd}$$

On peut montrer que F est bien compatible à la composition des morphismes, cette vérification est un peu longue, consiste en l'étude de certains produits triples, mais est néanmoins sans surprises. De plus, on peut vérifier facilement que F envoie les flèches de $\widetilde{\mathscr{W}}$ sur des isomorphismes dans $\mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right]$, ainsi on obtient un foncteur $F\colon \widetilde{\mathscr{C}}\left[\widetilde{\mathscr{W}}^{-1}\right] \to \mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right]$. En outre, on a un foncteur évident $G\colon \mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right] \to \widetilde{\mathscr{C}}\left[\widetilde{\mathscr{W}}^{-1}\right]$ envoyant X sur $\left[X \overset{\mathrm{id}_X}{\to} X\right]$. On vérifie aussitôt que $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{A}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right]}$ et que l'on a un isomorphisme naturel $G \circ F \overset{\sim}{\to} \mathrm{id}_{\widetilde{\mathscr{C}}\left[\mathscr{W}_{\mathscr{A}}{}^{-1}\right]}$. Ainsi, G est une équivalence de catégorie, oub' en est également une, de sorte que la composée $\mathrm{oub}' \circ G$ aussi, ce qui permet de conclure car $\mathrm{oub}' \circ G$ est le foncteur évident $\mathscr{A}\left[\widetilde{\mathscr{W}}_{\mathscr{A}}^{-1}\right] \to \mathscr{C}\left[\mathscr{W}^{-1}\right]$.

3 Quelques propriétés élémentaires de la K-théorie algébrique

On récapitule ici quelques définitions et constructions sur la K-théorie algébrique que l'on peut trouver dans SGA 6 ; elles sont « élémentaires » dans la mesure où elles n'utilisent pas la K-théorie supérieure de Quillen.

3.1 Définition

Soit X un schéma. On note $K_0(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie (exacte) des fibrés vectoriels sur X, autrement dit $K_0(X)$ est le groupe (abélien) présenté par les générateurs $[\mathscr{M}]$ où $\mathscr{M}$ parcourt un ensemble de représentants des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels sur X et les relations $[\mathscr{M}] = [\mathscr{M}'] + [\mathscr{M}'']$, pour toute suite exacte $0 \to \mathscr{M}' \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}'' \to 0$ de fibrés vectoriels. Le produit tensoriel de fibrés vectoriels induit une structure d'anneau commutatif sur $K_0(X)$. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ entre schémas induit, par image inverse des fibrés vectoriels, un morphisme d'anneaux (fonctoriel) $f^\star\colon K_0(Y) \to K_0(X)$.

3.2 Théorème du fibré projectif

Théorème ii.17 (SGA 6 VI 1.1) *Soit X un schéma quasi-compact. Soit E un fibré vectoriel de rang $n+1$ sur X. On note $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif du fibré vectoriel E au-dessus de X. Alors, le $K_0(X)$-module $K_0(\mathbb{P}(E))$ est libre de base $1, u, \ldots, u^n$ où $u = [\mathscr{O}(1)] - 1$.*

Théorème ii.18 (SGA 6 VI 1.13.2) *Avec les notations du théorème précédent, si E est un fibré vectoriel trivial, alors $u^{n+1} = 0$.*

3.3 Structure de λ-anneau

Définition ii.19 (Opérations λ^n) *Si A est un anneau commutatif, on note $1 + A[[t]]^+$ l'ensemble des séries formelles de terme constant 1, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i t^i$ avec $a_0 = 1$; la multiplication des séries formelles induit une structure de groupe abélien sur $1 + A[[t]]^+$. Soit X un schéma. On note $\lambda_t\colon K_0(X) \to 1 + K_0(X)[[t]]^+$ le morphisme de groupe qui envoie la classe $[\mathscr{M}]$ d'un fibré vectoriel $\mathscr{M}$ sur la série*

$$\lambda_t([\mathscr{M}]) = \sum_{i\geq 0} [\wedge^i \mathscr{M}] t^i \ .$$

On définit des applications $\lambda^i\colon K_0(X) \to K_0(X)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ par la formule suivante, pour tout $x \in K_0(X)$:

$$\lambda_t(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^i(x) t^i \ .$$

Notons que pour tout $x \in K_0(X)$, on a $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$.

Cette définition a bien un sens dans la mesure où si $0 \to \mathscr{M}' \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés, on a la relation suivante (cf. SGA 6 V 2.2.1) dans $K_0(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[\wedge^n \mathscr{M}] = \sum_{p+q=n} [\wedge^p \mathscr{M}'][\wedge^q \mathscr{M}''] \ .$$

La donnée de λ_t constitue une structure de λ-anneau (cf. SGA 6 V 2.1). Le λ-anneau $K_0(X)$ vérifie certaines conditions qui permettent de dire que $\lambda_t(1) = 1+t$ et de réexprimer $\lambda_t(xy)$, $\lambda_u(\lambda_t(x))$ (voir SGA 6 V 2.4 et SGA 6 VI 3.2) : on dit alors que $K_0(X)$ est un λ-anneau spécial (on utilise ici la même terminologie que celle utilisée dans SGA 6 [RRR] et reprise dans l'article [5]).

Définition ii.20 (Opérations γ^n) *Pour tout $x \in K_0(X)$, on note $\gamma^n(x) = \lambda^n(x+n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose $\gamma_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma^n(x) t^n$.*

D'après SGA 6 V 3.2, dans un λ-anneau (spécial), on peut exprimer les λ_t en fonction de γ_t et inversement, grâce à des changements de variables :

$$\gamma_t(x) = \lambda_{\frac{t}{1-t}}(x) \qquad \lambda_t(x) = \gamma_{\frac{t}{1+t}}(x)$$

Ces formules ont bien un sens : si $F_t = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ est une série formelle en la variable t et que G_t est une série formelle *de terme constant nul*, alors la formule $(F \circ G)_t = \sum_{n\geq 0} a_n G_t^n$ définit une série formelle et on peut adopter la notation $(F \circ G)_t = F_{G(t)}$.

Définition II.21 (Opérations d'Adams Ψ^k) *Pour tout $x \in K_0(X)$, on définit des éléments $\Psi^k(x)$ pour tout $k \geq 1$ par la formule :*

$$\frac{1}{\lambda_t(x)} \frac{d\lambda_t(x)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Psi^k(x) t^{k-1} \ .$$

Pour tout entier $k \geq 1$, ceci définit un morphisme d'anneaux $\Psi^k \colon K_0(X) \to K_0(X)$ et on a $\Psi^1 = \mathrm{id}$, $\Psi^{kk'} = \Psi^k \circ \Psi^{k'}$; ces assertions résultent de SGA 6 VI 3.2 (qui affirme que $K_0(X)$ est un λ-anneau spécial) et de SGA 6 V 7.5 i) qui affirme que les λ-anneaux spéciaux vérifient ces relations.

Théorème II.22 *Soit X un schéma régulier (ou quasi-compact quasi-séparé admettant un faisceau ample [2]), tout élément de $x \in K_0(X)_{\mathbb{Q}} = K_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ se décompose (nécessairement de manière unique) en une somme finie $x = \sum_{i\geq 0} x^{(i)}$ où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x^{(i)}$ est un élément de $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ tel que pour tout entier $k \geq 1$, $\Psi^k(x^{(i)}) = k^i x^{(i)}$.*

Nous allons donner deux démonstrations complètement différentes de ce théorème. La première utilise quelques propriétés de la γ-filtration : si X est connexe, le morphisme rang $K_0(X) \to \mathbb{Z}$ définit une structure de λ-anneau spécial augmenté. On dispose alors de la γ-filtration définie de sorte que $\mathrm{Fil}^n K_0(X)$ soit le sous-groupe abélien engendré par les produits $\gamma^{n_1}(a_1) \dots \gamma^{n_r}(a_r)$ où $n_1 + \dots + n_r \geq n$ et où les éléments a_i sont dans l'idéal d'augmentation. D'après [5, proposition 5.3], pour tous entiers $k \geq 1$ et $n \geq 1$, l'endomorphisme $x \mapsto \Psi^k(x) - k^n x$ du groupe $K_0(X)$ envoie $\mathrm{Fil}^n K_0(X)$ dans $\mathrm{Fil}^{n+1} K_0(X)$. D'après SGA 6 VI 6.9, si X est un schéma noethérien de dimension d admettant un faisceau ample, $\mathrm{Fil}^{d+1} K_0(X) = 0$, on en déduit aussitôt que pour tout entier $k \geq 2$, l'opérateur $\Psi^k \colon K_0(X)_{\mathbb{Q}} \to K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est tué par le polynôme $\prod_{i=0}^{d} (X - k^i)$ qui est scindé à racines simples, Ψ^k agissant sur $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ est donc diagonalisable, avec $1, k, k^2, \dots, k^d$ comme valeurs propres possibles. Par ailleurs, les opérateurs Ψ^k commutent entre eux ; pour obtenir la décomposition attendue, on voit qu'il ne reste plus qu'à montrer que si x est un élément non nul de $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$, k, l deux entiers naturels ≥ 2 et r, r' deux entiers naturels tels que $\Psi^k(x) = k^r x$ et $\Psi^l(x) = k^{r'} x$ alors $r = r'$. Comme $\Psi^k - k^i$ envoie $\mathrm{Fil}^i K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathrm{Fil}^{i+1} K_0(X)_{\mathbb{Q}}$, on obtient que $((\Psi^k - k^{r-1}) \circ (\Psi^k - k^{r-2}) \circ \dots \circ (\Psi^k - 1))(x) \in \mathrm{Fil}^r K_0(X)_{\mathbb{Q}}$, x étant vecteur propre pour Ψ^k associé à la valeur propre k^r, on déduit que $x \in \mathrm{Fil}^r K_0(X)_{\mathbb{Q}}$.

[2] On utilise la définition de faisceau ample donnée dans EGA II 4.5.3.

En appliquant l'opérateur $(\Psi^k - k^{r+1}) \circ \cdots \circ (\Psi^k - k^d)$ à x et en utilisant le fait que $\mathrm{Fil}^{d+1} K_0(X)_{\mathbb{Q}} = 0$, il vient aussi que $x \notin \mathrm{Fil}^{r+1} K_0(X)_{\mathbb{Q}}$. Finalement, en appliquant ce qui précède à Ψ^l et r' au lieu de Ψ^k et r, on a :

$$x \in \mathrm{Fil}^r K_0(X)_{\mathbb{Q}} - \mathrm{Fil}^{r+1} K_0(X)_{\mathbb{Q}} \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{Fil}^{r'} K_0(X)_{\mathbb{Q}} - \mathrm{Fil}^{r'+1} K_0(X)_{\mathbb{Q}}$$

Il est évident que ce n'est possible que si $r = r'$, ce qui achève cette démonstration du théorème dans le cas où X est un schéma (connexe) noethérien de dimension finie admettant un faisceau ample. Par approximation noethérienne absolue (cf. [74, theorem C.9]), on peut déduire de ce cas-ci le cas des schémas quasi-compacts quasi-séparés non nécessairement de dimension de Krull finie. En particulier, on obtient le résultat pour les schémas affines. Le cas des schémas réguliers se déduit de ce cas-là grâce à l'astuce de Jouanolou (cf. théorème ii.13) et à une certaine forme d'invariance par homotopie de la K-théorie algébrique pour les schémas réguliers (cf. SGA 6 IX 3.4, ou [62, proposition 4.1, §7] et [*ibid.*, §7.1]).

Voici une démonstration alternative (seulement dans le cas où X est régulier) : tout d'abord, on dira ici qu'un élément x d'un groupe $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ *se décompose bien* s'il existe une famille d'éléments presque tous nuls $x^{(i)}$ de $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$, $i \geq 0$ tels que $x = \sum_{i\geq 0} x^{(i)}$ et que $\Psi^k(x^{(i)}) = k^i x^{(i)}$ pour tout $k \geq 1$ et $i \in \mathbb{N}$. Une telle décomposition, si elle existe, est évidemment unique. Observons que les éléments qui se décomposent bien sont stables par combinaisons linéaires à coefficients rationnels (c'est évident), par produit (puisque les opérations Ψ^k induisent des morphismes d'anneaux) et par images inverses. Pour préciser le dernier point, on a le lemme suivant :

Lemme ii.23 *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme de schémas tel que $f^\star\colon K_0(X)_{\mathbb{Q}} \to K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ soit injectif, alors un élément x de $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ se décompose bien si et seulement si $f^\star(x)$ se décompose bien.*

En effet, notons $y = f^\star(x)$, supposons que y se décompose bien, on peut alors écrire $y = \sum_{i\geq 0} y^{(i)}$ où $y^{(i)} \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ est tel que $\Psi^k(y^{(i)}) = k^i y^{(i)}$ pour tout entier $k \geq 1$. Pour établir que x se décompose bien, compte tenu de l'injectivité de $f^\star\colon K_0(X) \to K_0(Y)$, il suffit de montrer que pour tout $i \geq 0$, il existe un élément $x^{(i)} \in K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ tel que $f^\star(x^{(i)}) = y^{(i)}$; pour cela, remarquons que chaque élément $y^{(i)}$ peut s'écrire comme un certain polynôme appliqué à l'endomorphisme Ψ^2 de $K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ et évalué en y, en faisant subir le même procédé à l'endomorphisme Ψ^2 de $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ et à x, on obtient un élément $x^{(i)}$ qui est bien tel que $f^\star(x^{(i)}) = y^{(i)}$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Revenons au théorème, le lemme précédent permet d'utiliser le principe de scindage [3] pour n'avoir qu'à montrer que $[L] \in K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ se décompose bien si L est un fibré en droites sur X. Grâce à l'astuce de Jouanolou (théorème ii.13), on peut supposer que X est

[3] Rappelons que cela consiste, étant donné un élément x d'un groupe $K_0(X)$ égal à la classe d'un fibré vectoriel E de rang d à considérer le fibré de drapeaux complets $p\colon \mathrm{Drap}(E) \to X$; l'image inverse de E par p possède tautologiquement une filtration dont les quotients successifs sont des fibrés en droites, ainsi $p^\star(x)$ est égal à une somme de classes de fibrés en droites ; de plus, $p^\star\colon K_0(X) \to K_0(\mathrm{Drap}(E))$ est injectif (utiliser plusieurs fois la formule du fibré projectif, cf. théorème ii.17). Ainsi, pour vérifier certaines égalités faisant intervenir des éléments dans des groupes K_0, on peut souvent se ramener au cas des classes de fibrés en droites.

affine. Mézalor, pour un entier n suffisamment grand, il existe un morphisme de schémas $f\colon X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ et un isomorphisme $L \simeq f^\star(\mathscr{O}(1))$. On est ainsi ramené au cas où $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ et où $x = [\mathscr{O}(1)] \in K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})$.

D'après le théorème II.18, $u = x - 1$ est nilpotent dans $K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})$, plus précisément $u^{n+1} = 0$. On peut donc considérer l'élément

$$v = \log(x) = \log(1+u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} u^i \in K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}} \, .$$

La somme est finie ; pour tout entier $k \geq 1$, on peut calculer $\Psi^k(v)$:

$$\Psi^k(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Psi^k(u^i) \, .$$

L'opérateur Ψ^k induit un homomorphisme d'anneaux, donc

$$\Psi^k(u^i) = (\Psi^k u)^i = (\Psi^k(x-1))^i = (x^k - 1)^i \, ,$$

d'où

$$\Psi^k(v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \left[(u+1)^k - 1 \right]^i \, .$$

On définit une série formelle F à coefficients dans $\mathbb{Q}$ par la formule

$$F^k(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \left[(U+1)^k - 1 \right]^i \in \mathbb{Q}\,[[U]] \, .$$

Cette série formelle a bien un sens, la valuation de $\left[(U+1)^k - 1 \right]^i$ est i et tend donc vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$. On en déduit aussitôt que $\Psi^k(v) = F^k(u)$. Maintenant, on peut observer que les fonctions de la variable complexe $z \longmapsto k\log(1+z)$ et $z \longmapsto \log\left[1 + ((z+1)^k - 1)\right]$ sont définies et coïncident au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, leurs développements de Taylor en 0 sont donc égaux, on en déduit que

$$F^k = k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} U^i \in \mathbb{Q}\,[[U]] \, ,$$

d'où $F^k(u) = kv$; on a ainsi obtenu que $\Psi^k(v) = kv$ pour tout $k \geq 1$.

L'élément v est donc vecteur propre simultané de tous les opérateurs Ψ^k, de « poids » 1, ainsi l'élément $v \in K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})$ « se décompose bien ». Le morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}\,[U]\,/(U^{n+1}) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})$$

envoyant U sur u étant un isomorphisme, en revenant à la formule définissant v, on voit aussitôt que v engendre $K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}}$ en tant que $\mathbb{Q}$-algèbre ; comme v se décompose bien, on en déduit que tout élément de $K_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}})_{\mathbb{Q}}$ se décompose bien, ce qui achève cette deuxième démonstration du théorème dans le cas des schémas réguliers.

3.4 Grassmanniennes

Définition ii.24 *On suppose fixé un schéma de base S. Soit (d, r) un couple d'entiers naturels. On note $\mathrm{Gr}_{d,r}$ (ou $\mathrm{Gr}_{d,r,S}$ s'il y a lieu de préciser le schéma de base) la grassmannienne des sous-espaces de dimension d dans le fibré vectoriel trivial de rang $d+r$ sur S, $\mathrm{Gr}_{d,r}$ est un S-schéma projectif et lisse. Pour être plus précis, on a une bijection fonctorielle, pour tout S-schéma X, entre $\mathrm{Gr}_{d,r}(X)$ et l'ensemble des sous-$\mathscr{O}_X$-Modules $\mathscr{M}$ de $\mathscr{O}_X^{d+r}$ localement facteurs directs et localement libres de rang d. On notera $\mathscr{M}'_{d,r}$ le sous-fibré vectoriel du fibré trivial de rang $d+r$ sur $\mathrm{Gr}_{d,r}$ correspondant à l'identité $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d,r}$, on l'appelera parfois « fibré universel de rang d sur $\mathrm{Gr}_{d,r}$ ». On notera aussi $\mathscr{M}''_{d,r}$ le quotient de $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}_{d,r}}^{d+r}$ par $\mathscr{M}'_{d,r}$.*

Définition ii.25 *On munit l'ensemble $\mathbb{N}^2$ d'une structure d'ensemble ordonné (filtrant) de sorte que si (d, r) et (d', r') sont deux éléments de $\mathbb{N}^2$, on dit que $(d, r) \leq (d', r')$ si $d \leq d'$ et $r \leq r'$ (autrement dit, on munit $\mathbb{N}^2$ de l'ordre produit). Pour tout couple $(d, r), (d', r')$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $(d, r) \leq (d', r')$, on définit une immersion fermée $i_{(d,r),(d',r')} \colon \mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d',r'}$ de sorte que l'application correspondante $\mathrm{Gr}_{d,r}(X) \to \mathrm{Gr}_{d',r'}(X)$ envoie un sous-$\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{M}$ de $\mathscr{O}_X^{d+r}$ (localement facteur direct de rang d) sur $\mathscr{O}_X^{d'-d} \times \mathscr{M} \times \{0\}^{r'-r}$ vu dans $\mathscr{O}_X^{d'-d} \times \mathscr{O}_X^{d+r} \times \mathscr{O}_X^{r'-r}$ que l'on identifie à $\mathscr{O}_X^{d'+r'}$.*

On obtient ainsi un système inductif $\mathrm{Gr}_\bullet$ dans la catégorie des S-schémas lisses indexé par l'ensemble ordonné filtrant $\mathbb{N}^2$; cet ensemble ordonné admet évidemment une suite croissante cofinale. Notons que si $(d, r) \leq (d', r')$, on a les égalités suivantes dans $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$:

$$\begin{aligned} i^\star_{(d,r),(d',r')}\left(\left[\mathscr{M}'_{d',r'}\right]\right) &= \left[\mathscr{M}'_{d,r}\right] + d' - d \ ; \\ i^\star_{(d,r),(d',r')}\left(\left[\mathscr{M}''_{d',r'}\right]\right) &= \left[\mathscr{M}''_{d,r}\right] + r' - r \ . \end{aligned}$$

Notons ainsi $u_{d,r}$ l'élément $\left[\mathscr{M}'_{d,r}\right] - d \in K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$, c'est un élément de rang virtuel 0. Les égalités précédentes impliquent que $(u_{d,r})_{(d,r)\in\mathbb{N}}$ est une famille compatible de classes, à savoir est un élément $u_\bullet \in \lim\limits_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$.

Le théorème suivant est un cas particulier de SGA 6 VI 4.6 :

Théorème ii.26 *Pour tout couple $(d, r) \in \mathbb{N}^2$, la $K_0(S)$-algèbre $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r,S})$ est engendrée par les coefficients de la série formelle $\lambda_t(u_{d,r})$.*

On en déduit aussitôt le corollaire suivant, que nous utiliserons dans la suite :

Corollaire ii.27 *Pour tout couple $(d, r), (d', r')$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tel que $(d, r) \leq (d', r')$, le morphisme de transition $K_0(\mathrm{Gr}_{d',r'}) \to K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$ est surjectif.*

Théorème ii.28 *Pour tout couple d'entiers (d, r) et $i \geq 1$, on note $c_i = \gamma^i(u_{d,r}) \in K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$. Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\lim_{r\in\mathbb{N}} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r}) = K_0(S)\,[[c_1, \ldots, c_d]] \ ;$$

de plus, on a un isomorphisme canonique :

$$\lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r}) = K_0(S)\,[[c_1, \ldots, c_n, \ldots]] \ .$$

Pour d fixé, c'est SGA 6 VI 4.10. Ensuite, pour d variable, on utilise simplement le fait que pour tout entier d, l'image de $c_{d+1} \in K_0(S)\,[[c_1, \dots, c_d, c_{d+1}]]$ dans $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$ est nulle : cet élément est $\gamma^{d+1}(u_{d,r}) = \lambda^{d+1}(u_{d,r} + d) = \left[\wedge^{d+1} \mathscr{M}'_{d,r}\right]$ qui est nul car $\mathscr{M}'_{d,r}$ est un fibré vectoriel de rang d.

Chapitre III

Les opérations instables sur la K-théorie algébrique

Ce chapitre est le cœur de ce travail. Les sections 1 et 2 visent à donner une interprétation fonctorielle des morphismes $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to E$ dans $\mathscr{H}(S)$ où E est un objet de $\mathscr{H}(S)$, S un schéma régulier et Gr la grassmannienne infinie. Sous une hypothèse (la propriété (K)), un tel morphisme revient à se donner une application $K_0(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X, E)$ fonctorielle en $X \in \mathrm{Sm}/S$ (cf. théorème III.27). On applique tout naturellement ceci aux endomorphismes de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ (et plus généralement aux morphismes $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$) dans les sections 3 et 4 afin de relever canoniquement les structures de λ-anneaux spéciaux sur les ensembles $K_0(X)$ (pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$) en une structure de λ-Anneau spécial sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$. La section 5 donne une définition des modèles authentiques de la K-théorie algébrique dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$: en vertu des résultats précédents, tous les modèles sont canoniquement isomorphes ! on vérifie de plus que les constructions classiques (Quillen, Waldhausen) de la K-théorie algébrique donnent bien des modèles authentiques. La section 6 étudie le changement de schéma de base, ce qui pourra nous autoriser à effectuer certaines constructions sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ pour les étendre canoniquement ensuite à tout schéma de base régulier. La section 7 compare les définitions antérieures des produits sur la K-théorie algébrique supérieure à celle introduite à la sous-section 4.2 (en particulier, pour les schémas réguliers, les définitions antérieurs coïncident sur leurs domaines de définitions communs). La section 8 interprète les endomorphismes de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ en termes des anneaux de représentations $\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL}_n$ étudiés par J.-P. Serre dans [67], cela aura donc un sens de comparer les opérations sur la K-théorie algébrique définies ici et celles définies par Soulé dans [70]. La section 9 présente des versions des résultats à coefficients dans des sous-anneaux de $\mathbb{Q}$, ceci servant dans la section 10 qui présente une esquisse d'une application aux catégories virtuelles introduites par Deligne dans [17].

1 Rappels sur la représentabilité de la K-théorie algébrique dans $\mathscr{H}(S)$

Définition III.1 *Soit S un schéma de base noethérien. On note* $\mathrm{Gr} = \operatorname{colim}_{\mathbb{N}^2} \mathrm{Gr}_\bullet$ *(voir page 80), où la colimite est calculée dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le* *site* $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$. *On note aussi, pour tout entier* d, $\mathrm{Gr}_{d,\infty} = \operatorname*{colim}_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{Gr}_{d,r}$, *on a ainsi* $\mathrm{Gr} = \operatorname*{colim}_{d\in\mathbb{N}} \mathrm{Gr}_{d,\infty}$. Gr *est canoniquement pointé (par l'image de* $\mathrm{Gr}_{0,0}$*). On notera encore* Gr *l'image de cet objet dans* $\mathscr{H}_\bullet(S)$ *ou* $\mathscr{H}(S)$. *On note* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *le produit du faisceau constant* $\mathbb{Z}$ *sur* $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ *et de* Gr *; c'est aussi la somme directe indexée par* $\mathbb{Z}$ *de copies de* Gr. *On note* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des couples* (F,f) *où* F *est une partie finie de* $\mathbb{Z}$ *contenant* 0 *et* f *une application* $f\colon F\to\mathbb{N}^2$, $\mathscr{P}$ *est muni d'une structure d'ensemble ordonné filtrant de sorte que* $(F,f)\leq(G,g)$ *si* $F\subset G$ *et que pour tout* $x\in F$, $f(x)\leq g(x)$. *Pour* $(F,f)\in\mathscr{P}$, *notons* $\mathscr{K}_{(F,f)}$ *l'union disjointe des* S*-schémas* $\mathrm{Gr}_{f(x)}$ *pour* $x\in F$. *On a ainsi un système inductif* $\mathscr{K}_\bullet$ *dans* Sm/S *indexé par* $\mathscr{P}$ *dont la limite inductive filtrante en tant que faisceau est* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *que l'on pointe par l'inclusion de* $\{0\}\times\mathrm{Gr}_{0,0}$.

Remarque III.2 *L'ensemble ordonné* $\mathscr{P}$ *admet une suite croissante cofinale, par exemple celle qui associe à* $n\in\mathbb{N}$ *le couple* $(\{-n,-n+1,\dots,-1,0,1,\dots,n-1,n\},f_n)$ *où* f_n *est la fonction constante de valeur* (n,n).

Théorème III.3 (Morel-Voevodsky) *Soit* S *un schéma régulier. Il existe une structure de* H*-groupe sur* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *telle que l'on dispose d'isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n\wedge X_+,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\cong K_n(X)$$

pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$ *et tout entier naturel* n *où* $K_n(-)$ *désigne la* K*-théorie algébrique supérieure de Quillen (cf. [62]). En particulier, pour* $X\in\mathrm{Sm}/S$, *on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\cong K_0(X)\ .$$

Dans ce théorème (cf. [57, proposition 3.9, page 139] et [76, theorem 6.5]), le plus difficile n'est pas de montrer l'existence d'un objet E tel que l'on ait des isomorphismes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n\wedge X_+,E)\cong K_n(X)$, c'est le fait que l'on puisse prendre $E=\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$: un des ingrédients principaux de la démonstration de [57] réside dans la construction d'une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible $\mathrm{Gr}_{d,\infty}\to\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_d$ où $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_d$ est le classifiant simplicial du faisceau de groupes représenté par le schéma en groupes GL_d.

Assertion III.4 *Soit* S *un schéma régulier. Pour tout couple* (d,r) *d'entiers naturels et tout entier relatif* $n\in\mathbb{Z}$, *la classe dans* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{d,r},\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ *de l'inclusion évidente*

$$\mathrm{Gr}_{d,r}\to\{n\}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$$

correspond via *l'isomorphisme du théorème* III.*3 à l'élément* $u_{d,r}+n=\left[\mathscr{M}'_{d,r}\right]-d+n$ *de* $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$ *(voir page 80).*

La démonstration du théorème III.3 figurant dans [*ibid.*] étant très abrégée, cette assertion n'y est pas mentionnée explicitement ; je pense néanmoins qu'elle devrait être considérée par le lecteur comme allant de soi, ce qu'on va supposer dès maintenant. Cependant, le lecteur plus méticuleux pourra se reporter à la section 5 sur les modèles de la K-théorie algébrique : elle contient des arguments permettant de reconstituer une démonstration plus détaillée du théorème III.3 et de vérifier l'assertion III.4.

2 Propriétés (ii) et (K)

2.1 Foncteur φ et propriété (ii)

Définition III.5 *Soit S un schéma noethérien. Soit $X \in \mathscr{H}(S)$ On note $\varphi X \colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}} \to$ **Ens** le préfaisceau d'ensembles sur Sm/S qui à $U \in \mathrm{Sm}/S$ associe*

$$(\varphi X)(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(U, X) \ .$$

Proposition III.6 *Soit S un schéma régulier. On a un isomorphisme canonique*

$$\varphi(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \cong K_0(-)$$

où $K_0(-)$ désigne le préfaisceau d'ensembles qui à $X \in \mathrm{Sm}/S$ associe $K_0(X)$.

Il s'agit d'un cas particulier du théorème III.3. On se souviendra que l'isomorphisme construit vérifie l'assertion III.4.

Définition III.7 *Soit S un schéma noethérien. Soit $X \in \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$.* Via *le foncteur évident $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{H}(S)$, on obtient un objet X de $\mathscr{H}(S)$ auquel on peut appliquer le foncteur $\varphi \colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. On définit un morphisme $\tau_X \colon X \to \varphi X$ dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ de sorte que pour tout $U \in \mathrm{Sm}/S$, l'application*

$$\tau_{X,U} \colon X(U) \to (\varphi X)(U)$$

associe à un élément x de $X(U)$ l'image dans $\mathscr{H}(S)$ du morphisme de préfaisceau d'ensembles $U \to X$ correspondant à x par le lemme de Yoneda.

Définition III.8 (propriété (ii)) *Soit S un schéma régulier. Soit $X \in \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. On dit que X vérifie la propriété (ii) si pour tout $U \in \mathrm{Sm}/S$ tel que U soit un schéma affine (sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$), l'application*

$$X(U) \to (\varphi X)(U)$$

induite par $\tau_X \colon X \to \varphi X$ est surjective.

Ceci signifie que les morphismes $U \to X$ dans $\mathscr{H}(S)$ peuvent être représentés par d'authentiques morphismes de préfaisceaux d'ensembles $U \to X$ (*i.e.* des éléments de $X(U)$), *pourvu que U soit affine.*

Remarque III.9 *Si deux objets X et X' de $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ vérifient la propriété (ii), alors $X \times X'$ aussi.*

La propriété (ii) a été introduite afin d'obtenir la proposition suivante :

Proposition III.10 *Soit S un schéma régulier. Soit X un objet de $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ satisfaisant la propriété (ii). Soit E un objet de $\mathscr{H}(S)$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi X, \varphi E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, \varphi E)$$

induite par la composition à droite par $\tau_X \colon X \to \varphi X$ est injective.

On se donne f et f' deux morphismes $\varphi X \to \varphi E$ tels que $f \circ \tau_X = f' \circ \tau_X$; on veut montrer que pour tout $U \in \mathrm{Sm}/S$, les applications $f_U, f'_U \colon (\varphi X)(U) \to (\varphi E)(U)$ coïncident. Grâce à la propriété (ii), τ_X induit une surjection $X(U) \to (\varphi X)(U)$ pour U affine, on en déduit que $f_U = f'_U$ si $U \in \mathrm{Sm}/S$ est affine.

Soit U un objet quelconque de Sm/S. D'après l'astuce de Jouanolou (cf. théorème II.13), il existe un torseur T sous un fibré vectoriel sur U tel que T soit un schéma affine. On note $p \colon T \to U$ la projection. On considère la superposition de diagrammes suivante :

$$\begin{tikzcd} (\varphi X)(T) \arrow[r, shift left, "f_T"] \arrow[r, shift right, "f'_T"'] & (\varphi E)(T) \\ (\varphi X)(U) \arrow[u, "p^\star"] \arrow[r, shift left, "f_U"] \arrow[r, shift right, "f'_U"'] & (\varphi E)(U) \arrow[u, "p^\star"'] \end{tikzcd}$$

Comme T est affine, les arguments précédents donnent l'égalité $f_T = f'_T$. Pour pouvoir conclure que $f_U = f'_U$, il suffit de montrer que l'application $p^\star \colon (\varphi E)(U) \to (\varphi E)(T)$ est injective ; si on admet provisoirement le lemme suivant, la flèche $p \colon T \to U$ induit un isomorphisme dans $\mathscr{H}(S)$, ce qui permet de montrer que $p^\star \colon (\varphi E)(U) \xrightarrow{\sim} (\varphi E)(T)$ et achever la démonstration de cette proposition.

Lemme III.11 *Soit X un schéma noethérien, soit V un fibré vectoriel sur X. Pour tout torseur T sous V au-dessus de X, le morphisme $T \to X$ dans* Sm/X *induit un isomorphisme dans $\mathscr{H}(X)$.*

Cela résulte des propriétés des objets simpliciaux de Čech (cf. [*ibid.*, page 52]) : si $f \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un morphisme de faisceaux d'ensembles sur $\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}$, on définit un faisceau simplicial $\check{\mathrm{C}}(f)$ de telle sorte que pour tout entier n, $\check{\mathrm{C}}(f)_n$ soit le produit fibré de $n+1$ copies de $\mathscr{A}$ au-dessus de $\mathscr{B}$, les faces et dégénérescences étant respectivement induites par des projections partielles et des diagonales. On a un morphisme $\check{\mathrm{C}}(f) \to \mathscr{B}$ qui est une équivalence faible simpliciale si et seulement si $f \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un épimorphisme (cf. [*ibid.*, lemma 1.15, page 52]). On choisit alors un recouvrement (Zariski) fini $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que pour chaque indice $i \in I$, la restriction du torseur T à U_i soit un torseur trivial (et tant qu'à faire que la restriction du fibré vectoriel V à U_i soit un fibré vectoriel trivial). On note Y la réunion disjointe des schémas U_i, on a un morphisme évident $f \colon Y \to X$ qui induit un épimorphisme de faisceaux sur $\mathrm{Sm}/X_{\mathrm{Nis}}$. De la même manière, on note V_Y et T_Y les images inverses de T et de V par f, on note aussi g le morphisme évident $T_Y \to T$. On dispose alors d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \check{\mathrm{C}}(g) \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{C}}(f) \arrow[d] \\ T \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Les morphismes f et g étant des épimorphismes, les deux flèches verticales sont des équivalences faibles (simpliciales), ainsi, pour montrer que $T \to X$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, il suffit de montrer que $\check{\mathrm{C}}(g) \to \check{\mathrm{C}}(f)$ en est une. Pour cela, d'après [*ibid.*, proposition 2.14, page 74], il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, le morphisme $\check{\mathrm{C}}(g)_n \to \check{\mathrm{C}}(f)_n$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, ce qui nous ramène à montrer qu'une projection $\mathbb{A}^r_Z \to Z$ induit une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, ce qui est évident.

Remarque III.12 *Dans la proposition* III.*10, on peut remplacer* φE *par tout préfaisceau d'ensembles* P *sur* Sm/S *tel que pour toute flèche* $p\colon T \to X$ *dans* $\mathscr{T}$ *(cf. définition* II.*14), l'application* $p^\star\colon P(X) \to P(T)$ *soit bijective, c'est-à-dire que* P *s'identifie à un préfaisceau sur la catégorie localisée* $\mathrm{Sm}/S\,[\mathscr{T}^{-1}]$ *(équivalente à* $\mathrm{SmAff}/S\left[\mathscr{T}_{\mathrm{aff}}{}^{-1}\right]$ *d'après la proposition* II.*16).*

Remarque III.13 *Une étude approfondie des conditions permettant d'obtenir la conclusion de la proposition* III.*10 est réalisée dans l'annexe B. Ce point de vue peut sembler obscur, cependant, dans une première version de ce texte, j'utilisais la propriété (i") de la définition B.13 à la place de la propriété (ii), la démonstration de la proposition* III.*10 était un peu moins simple ; ce n'est qu'en prenant ce point de vue formel que j'ai pu obtenir le théorème B.19 qui montre que (i") et (ii) sont équivalentes et qui implique la proposition* III.*10.*

Proposition III.14 *Soit* S *un schéma régulier. Le faisceau d'ensembles* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$*, vu comme objet de* $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$*, satisfait la propriété (ii).*

Soit $U \in \mathrm{Sm}/S$ affine. On veut montrer la surjectivité de l'application

$$(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})(U) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(U, \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\ .$$

Pour cela, on peut évidemment supposer que U est connexe. Comme U est supposé affine, la catégorie des fibrés vectoriels sur U est équivalence à la catégorie des modules projectifs de type fini sur l'anneau $\Gamma(U,\mathscr{O}_U)$, catégorie exacte dont les suites exactes sont scindées. Si $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(U,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \cong K_0(U)$ (cf. théorème III.3), il existe donc un entier naturel n et un fibré vectoriel $\mathscr{M}$ sur U d'un certain rang d tels que l'on ait l'égalité $\gamma = [\mathscr{M}]-d+n$ dans $K_0(U)$. En utilisant toujours le fait que U soit affine, pour r un entier naturel suffisamment grand, il existe une injection de $\mathscr{M}$ comme facteur direct dans le fibré $\mathscr{O}_U^{d+r}$. On obtient, par définition de la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{d,r}$, un morphisme de S-schémas $f\colon U \to \mathrm{Gr}_{d,r}$ tel que l'on ait un isomorphisme $f^\star\mathscr{M}'_{d,r} \simeq \mathscr{M}$ de fibrés vectoriels sur U. L'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(U,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ défini par le morphisme de faisceaux composé

$$U \xrightarrow{f} \mathrm{Gr}_{d,r} \to \{n\}\times\mathrm{Gr} \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$$

(les deux flèches sans nom étant les inclusions évidentes) est égal à γ en vertu de l'assertion III.4 ; ceci achève d'établir la propriété (ii) pour $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$.

Proposition III.15 *Soit* S *un schéma régulier. Le faisceau d'ensembles* $\mathbb{P}^\infty = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}^n$ *est tel que* $\varphi(\mathbb{P}^\infty)\cong\mathrm{Pic}(-)$ *et satisfait la propriété (ii).*

Ici, $\mathrm{Pic}(-)$ désigne le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/S qui à U associe $\mathrm{Pic}(U)$. L'isomorphisme $\varphi(\mathbb{P}^\infty)$ résulte de [*ibid.*, proposition 3.8, page 138]. Pour établir la propriété (ii) pour $\mathbb{P}^\infty$, on procède exactement comme pour $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$.

2.2 Propriété (ii) et systèmes inductifs

Les objets pour lesquels on a établi la propriété (ii) sont des colimites de systèmes inductifs de faisceaux représentables (indexés par des ensembles ordonnés admettant une suite cofinale). On va voir que cette structure de système inductif permet d'aller plus loin que la proposition III.10.

Théorème fondamental pour les systèmes inductifs

Théorème III.16 *Soit S un schéma régulier. Soit $X_\bullet = (X_i)_{i \in \mathscr{I}}$ un système inductif dans Sm/S indexé par un ensemble ordonné filtrant $\mathscr{I}$ possédant une suite cofinale. On pose $X = \operatorname{colim} X_\bullet$ (la colimite est calculée dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$). On suppose que X satisfait la propriété (ii). Pour tout objet E de $\mathscr{H}(S)$, on peut former un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi X, \varphi E) \arrow[d, "\beta"] & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, \varphi E) \arrow[r, "\sim"] & \lim\limits_{i \in \mathscr{I}} (\varphi E)(X_i)
\end{tikzcd}$$

Alors, les applications α et γ sont surjectives et l'application β est bijective. Si E est muni d'une structure de H-groupe, alors le noyau de α (et de γ) s'identifie au groupe abélien $\mathrm{R}^1\lim\limits_{i \in \mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1 \wedge X_{i+}, E)$.

L'application α est induite par le foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. La flèche β est l'application considérée dans la proposition III.10, elle est donc injective puisque X satisfait la propriété (ii). La bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, \varphi E) \xrightarrow{\sim} \lim_{i \in \mathscr{I}} (\varphi E)(X_i)$$

résulte simplement du lemme de Yoneda. On pose $\gamma = \beta \circ \alpha$.

La flèche $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,E) \to \lim\limits_{i \in \mathscr{I}} (\varphi E)(X_i)$ déduite de γ et de la bijection ci-dessus est bien l'application évidente. Elle est donc surjective d'après la partie « surjectivité » de la suite exacte de Milnor (cf. théorème II.10 et commentaires subséquents). Puisque γ est surjective et β injective, il vient que β est bijective. Le calcul du noyau de α (et de γ, c'est pareil) dans le cas où E est supposé être un H-groupe résulte aussi de la suite exacte de Milnor.

Nous allons voir que le théorème III.16 admet une variante pointée.

Définition III.17 *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie admettant un objet final. On note $\mathscr{C}_\bullet$ la catégorie des objets pointés de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire qu'un objet de $\mathscr{C}$ est un couple (X,x) où X est un objet de $\mathscr{C}$ et x un morphisme $x\colon \bullet \to X$, $\bullet$ désignant un objet final (fixé) de $\mathscr{C}$, un morphisme $(X,x) \to (Y,y)$ entre deux objets de $\mathscr{C}_\bullet$ étant un morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathscr{C}$ tel que $f \circ x = y$. On dispose d'un foncteur d'oubli du point-base $\mathscr{C}_\bullet \to \mathscr{C}$ qui, pourvu que $\mathscr{C}$ admette des sommes directes finies, admet un adjoint à gauche $\mathscr{C} \to \mathscr{C}_\bullet$ qui à un objet X de $\mathscr{C}$ associe $X \bigsqcup \bullet$ pointé par le deuxième terme.*

On note ainsi $\mathbf{Ens}_\bullet$ la catégorie des ensembles pointés. Les préfaisceaux d'ensembles pointés sur Sm/S forment une catégorie $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}(\mathbf{Ens}_\bullet)$, que l'on peut identifier à la catégorie $(\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens})_\bullet$ des objets pointés dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur Sm/S ; on notera simplement $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ cette catégorie.

Théorème III.18 *Soit S un schéma régulier. Soit $X_\bullet = (X_i)_{i\in\mathscr{I}}$ un système inductif dans $\mathrm{Sm}/S_\bullet$ indexé par un ensemble ordonné filtrant $\mathscr{I}$ possédant une suite cofinale. On pose $X = \operatorname{colim} X_\bullet \in \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$. On suppose qu'en tant qu'objet de $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, X satisfait la propriété (ii). Pour tout H-groupe E de $\mathscr{H}_\bullet(S)$, on peut former un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X,\varphi E) \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(X,\varphi E) \end{tikzcd}$$

Alors, les applications α et γ sont surjectives, l'application β est bijective et le noyau de α (et de γ) s'identifie au groupe abélien $\mathrm{R}^1\lim\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1\wedge X_{i+},E)$.

On déduit ce théorème du théorème III.16 en utilisant le lemme suivant :

Lemme III.19 *Soit E un objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ muni d'une structure de H-groupe. Pour tout objet X de $\mathscr{H}_\bullet(S)$, le morphisme évident*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \left\{ f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,E), f^\star(\bullet)=\bullet\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(S,E)\right\}$$

est bijectif. Autrement dit, l'ensemble des « classes d'homotopie pointées » s'identifie à l'ensemble des « classes d'homotopies » pointées[1].

On a une suite cofibrée $S_+\to X_+\to X$ dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$. En appliquant la suite exacte longue d'homotopie associée à la suite fibrée obtenue en appliquant $\mathrm{hom}_\bullet(-,E)$ à la suite cofibrée précédente (E pouvant être supposé fibrant), on obtient une suite exacte longue qui va se scinder en suites exactes courtes de groupes, $S_+\to X_+$ admettant une rétraction évidente et E étant un H-groupe. On obtient ainsi la suite exacte courte suivante

$$1\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,E)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(S,E)\to 1$$

qui permet de conclure.

Objets de présentation finie

En vue d'une application dans le paragraphe suivant, on introduit une variante de la définition de la notion d'espace de présentation finie (cf. [76, page 583]) :

[1] Ce n'est pas toujours le cas, considérer par exemple les morphismes entre classifiants de groupes discrets (non commutatifs) dans les catégories homotopiques usuelles $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ et $\mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}}$.

Définition III.20 *Soit S un schéma noethérien. Soit $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$ la plus petite sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ telle que*

(1) Si $X \in \mathrm{Sm}/S$ et K est un ensemble simplicial fini, alors $(X \times K)_+ \in \mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$;

(2) Pour tout carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$, si $A \to B$ est un monomorphisme et que A, B et C sont dans $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, alors D aussi.

Il est facile de montrer que $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$ est une catégorie essentiellement petite, stable par sommes finies, produits finis et $\wedge$-produit dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$.

Lemme III.21 *Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ un système inductif indexé par un ensemble ordonné filtrant A dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$, on note E sa limite inductive. Soit X un objet de $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$. Alors l'application évidente*

$$\operatorname*{colim}_{\alpha\in A} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X, E_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X, E)$$

est bijective.

Il s'agit là d'une conséquence facile du théorème de Brown-Gersten (cf. [57, lemma 1.18, page 101]), la propriété « B.G. » (cf. [*ibid.*, definition 1.13, page 100]) étant stable par formation de colimites filtrantes.

Lemme III.22 *Soit $(X_i)_{i\in\mathscr{I}}$ un système inductif dans la catégorie des faisceaux simpliciaux pointés sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ indexé par un ensemble ordonné filtrant $\mathscr{I}$. On note X la colimite de ce système. Soit E un objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et deux morphismes $f, g\colon X \to E$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ tels que pour tout $i \in \mathscr{I}$, les morphismes $f_i, g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X_i, E)$ soient égaux où f_i et g_i sont déduits de f et g par composition avec le morphisme canonique $X_i \to X$. Alors pour tout morphisme $h\colon U \to X$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ avec $U \in \mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, on a $f \circ h = g \circ h$.*

C'est évident car d'après le lemme III.21, pour i suffisamment grand, le morphisme $h\colon U \to X$ se factorise dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ par la flèche $X_i \to X$.

Remarque III.23 *Sous les hypothèse du lemme et dans le cas où E est un H-groupe, on peut écrire $f = \delta g$ avec $\delta\colon X \to E$ un morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, le morphisme $\delta g\colon X \to E$ étant le produit des deux morphismes δ et g pour la structure de H-groupe sur E. Le morphisme $\delta\colon X \to E$ a alors la propriété d'induire l'application nulle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U, X) \xrightarrow{\delta\circ -} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U, E)$$

pour tout objet U de $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, on dit alors que δ est une application « fantôme ».

Extension canonique d'une transformation naturelle en degrés supérieurs

Théorème III.24 *Soit S un schéma régulier. Soit $X_\bullet$ un système inductif dans la catégorie $\mathrm{Sm}/S_\bullet$ indexé par un ensemble ordonné filtrant $\mathscr{I}$ admettant une suite cofinale. On note X la limite inductive du système $X_\bullet$ calculée dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$. On suppose que $X_\bullet$ satisfait la propriété (ii). Soit E un objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ muni d'une structure de H-groupe. Alors, pour tout objet U de $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}_\bullet}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,X), \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,E))$$

se factorise (de manière unique) par $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X, \varphi E)$.

En particulier, pour tout entier naturel n, on a une application canonique :

$$\mu_n \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X, \varphi E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi \mathrm{R}\Omega^n X, \varphi \mathrm{R}\Omega^n E)$$

où $\mathrm{R}\Omega^n \colon \mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathscr{H}_\bullet(S)$ est le foncteur « n-ième espace de lacets » (adjoint à droite du foncteur $S^n \wedge -$).

D'après le théorème III.16, l'application

$$\gamma\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X,E) \to \lim_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X_i,E)$$

est surjective. En utilisant le lemme III.19, on voit que sa variante pointée

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \lim_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X_i,E)$$

est également surjective. D'après le lemme III.21, on peut en déduire que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}_\bullet}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,X), \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,E))$$

se factorise par $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,E) \to \lim_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X_i,E)$ pour tout objet U de $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$.

Par ailleurs, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi X, \varphi E) \xrightarrow{\beta} \lim_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X_i,E)$$

est bijective (encore par le théorème III.16), sa variante pointée

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X, \varphi E) \to \lim_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X_i,E)$$

est également bijective grâce au lemme III.19, ce qui permet de conclure qu'il existe bien une flèche (évidemment unique)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X, \varphi E) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}_\bullet}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,X), \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(U,E))$$

vérifiant la condition voulue.

Pour tout entier naturel n, l'application

$$\mu_n \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi X, \varphi E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(\varphi \mathrm{R}\Omega^n X, \varphi \mathrm{R}\Omega^n E)$$

s'obtient à partir de ce qui précède en considérant simultanément tous les objets U de $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$ de la forme $S^n \wedge Y_+$ avec $Y \in \mathrm{Sm}/S$.

2.3 Propriété (K)

Définition III.25 (propriété (K)) *Soit S un schéma régulier. Soit $X_\bullet = (X_i)_{i\in\mathscr{I}}$ un système inductif dans $\mathrm{Sm}/S_\bullet$ indexé par un ensemble ordonné filtrant $\mathscr{I}$ possédant une suite cofinale. Soit E un H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. On dit que E satisfait la propriété (K) relative au système $X_\bullet$ si $\mathrm{R}^1\lim\limits_{i\in\mathscr{I}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1\wedge X_{i+}, E) = 0$, c'est-à-dire, d'après le théorème III.16, que l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi X, \varphi E)$$

est bijective.

Si le système inductif $X_\bullet$ n'est pas précisé, il faudra comprendre la propriété (K) comme étant relative au système inductif $\mathscr{K}_\bullet$ dont la colimite est $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ (cf. définition III.1).

L'annulation d'un groupe $\mathrm{R}^1\lim$ peut souvent se vérifier grâce à la proposition II.3. On a le cas particulier suivant :

Lemme III.26 *Soit S un schéma régulier. Soit E un H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. Si, pour tout quadruplet d'entiers (d, r, d', r') tel que $d \leq d'$ et $r \leq r'$, la flèche évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{d',r'}, \mathrm{R}\Omega E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{d,r}, \mathrm{R}\Omega E)$$

est surjective, alors E satisfait la propriété (K).

Nous verrons que cette propriété (K) est vérifiée dans plusieurs familles d'exemples (cf. section 3 de ce chapitre et remarques V.8 et V.11).

S'il n'y avait qu'une chose à retenir de cette section, ce serait le théorème suivant :

Théorème III.27 *Soit S un schéma régulier. Soit E un objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ possédant une structure de H-groupe. On suppose que E satisfait la propriété (K). Alors, on a des bijections canoniques*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-), \varphi E) \xrightarrow{\sim} \left(\lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{d,r}, E)\right)^{\mathbb{Z}} \;;$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-), \varphi E)\ .$$

On reconnaît qu'une famille compatible $(f_{n,d,r})_{n\in\mathbb{Z},(d,r)\in\mathbb{N}^2}$ (où, pour tout $(n, d, r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^2$, $f_{n,d,r}$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{d,r}, E)$) définit un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}, E)$ par la condition $f_{0,0,0} = \bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}_{0,0}, E)$.

Cela résulte aussitôt des théorèmes III.16 et III.18 dont les hypothèses sont vérifiées puisque $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ satisfait la propriété (ii) (cf. proposition III.14).

Remarque III.28 *D'après la proposition III.15, l'objet $\mathbb{P}^\infty$ de $\mathscr{H}(S)$ satisfait la propriété (ii) et est tel que $\varphi(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathrm{Pic}(-)$ (pour S régulier). Il y a donc un analogue du théorème III.27 pour $\mathbb{P}^\infty$; en particulier, si E est un H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ tel que pour tout entier naturel n, la flèche de transition*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1\wedge\mathbb{P}^{n+1}_+, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1\wedge\mathbb{P}^n_+, E)$$

soit surjective, alors il revient au même de se donner un morphisme $\mathbb{P}^\infty \to E$ dans $\mathscr{H}(S)$, une famille compatible de morphismes $\mathbb{P}^n \to E$ dans $\mathscr{H}(S)$ ou une transformation naturelle $\mathrm{Pic}(-) \to \varphi E$ de préfaisceaux d'ensembles sur Sm/S.

3 Théorèmes principaux

Si S est un schéma régulier, on rappelle que l'on a noté $K_0(-)$ le préfaisceau sur Sm/S qui à $X \in \mathrm{Sm}/S$ associe $K_0(X)$. Dans le théorème qui suit, on s'intéresse aux endomorphismes de $K_0(-)$ vu comme préfaisceau *d'ensembles* (ou d'ensembles pointés) :

Théorème III.29 *Soit S un schéma régulier. Le morphisme évident de groupes*

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))$$

est bijectif [2]*. De même, on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-)) \ .$$

Par ailleurs, on a un isomorphisme de groupes abéliens :

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \simeq \prod_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r}) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} K_0(S)\,[[c_1, \dots, c_n, \dots]]$$

et un élément de $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ *correspondant à une famille* $(F_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ *de séries formelles* via *cet isomorphisme s'identifie à un élément de* $\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ *si et seulement si la série formelle F_0 est de terme constant nul.*

D'après le théorème III.27, il s'agit de montrer que $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ satisfait la propriété (K). D'après le lemme III.26 et le théorème III.3, il suffit de montrer que pour tout couple $(d, r), (d', r')$ d'éléments de $\mathbb{N}^2$ tel que $(d, r) \leq (d', r')$, la flèche de restriction $K_1(\mathrm{Gr}_{d',r'}) \to K_1(\mathrm{Gr}_{d,r})$ est surjective. En utilisant la structure de $K_0(X)$-module sur les groupes $K_i(X)$ et $K'_i(X)$ pour tout schéma (noethérien) X, la suite exacte de localisation en K'-théorie, la comparaison $K_i(X) \xrightarrow{\sim} K'_i(X)$ pour X régulier et l'invariance par homotopie de la K'-théorie (cf. [62]), on montre facilement que si $X \in \mathrm{Sm}/S$ admet une décomposition cellulaire [3], alors pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique $K_0(X) \otimes_{K_0(S)} K_i(S) \to K_i(X)$ est bijectif. Les grassmanniennes admettant une décomposition cellulaire (cf. [20]), la condition de surjectivité pour le K_1 peut se déduire de la même condition pour le K_0, condition qui est bien vérifiée grâce au corollaire II.27. On a ainsi montré les isomorphismes :

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)) \xrightarrow{\sim} \prod_{r\in\mathbb{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r}) \ .$$

[2] La structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ provient de la structure de H-groupe sur le but : il s'agit de la structure de H-groupe sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ évoquée au théorème III.3. Nous verrons dans la section 4 que les diverses structures naturelles sur $K_0(-)$ se relèvent canoniquement sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$; ainsi l'isomorphisme de groupes donné par ce théorème sera en fait un isomorphisme de λ-anneaux spéciaux. Par ailleurs, on prendra garde à ne pas confondre la multiplication pour cette structure d'anneau et la loi de composition interne induite par la composition des morphismes de $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (resp. du foncteur $K_0(-)$) dans lui-même...

[3] On veut dire par là qu'il existe une suite croissante $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = X$ d'ouverts de X telle que V_0 soit vide et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $V_i - V_{i-1}$ possède une structure de sous-schéma de X le rendant S-isomorphe à un espace affine.

La formule donnant $\lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$ n'est autre que celle du théorème II.28. La dernière remarque pour reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ qui s'avèrent être pointés est facile : il suffit d'observer que l'image de la classe du fibré trivial de rang 0 sur S dans $K_0(S)$ par la transformation naturelle associée aux c_i est nulle. Ceci achève la démonstration de ce théorème.

D'après le théorème III.24, le théorème III.29 admet pour corollaire le théorème suivant :

Théorème III.30 *Soit S un schéma régulier. Toute transformation naturelle*

$$\alpha\colon K_0(-)\to K_0(-)$$

de foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\to\mathbf{Ens}_\bullet$ *donne naissance de manière canonique, pour tout entier $n\geq 1$, à une transformation naturelle $K_n(-)\to K_n(-)$ de foncteurs de* $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}$ *vers la catégorie des groupes abéliens. Ces transformations sont induites par l'unique classe d'homotopie pointée* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *induisant à τ au niveau de $K_0(-)$ en vertu du théorème* III*.29.*

On dispose aussi d'un analogue « à plusieurs variables » de ce théorème III.29 :

Théorème III.31 *Soit S un schéma régulier. Pour tout couple (n,m) d'entiers naturels, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n,(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^m)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)^n,K_0(-)^m)$$

est bijective. On a une version pointée :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n,(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^m)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-)^n,K_0(-)^m)\,.$$

Grâce au lemme III.19, il suffit de traiter le cas non pointé. Il est par ailleurs évident que le cas $m=1$ implique le cas général. On suppose donc $m=1$, et n quelconque. D'après la remarque III.9, le fait que $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ satisfasse la propriété (ii) implique que $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n$ la satisfait aussi. Il s'agit de montrer que $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ satisfait la propriété (K) relative au système inductif $\mathscr{K}_\bullet^n$ dont $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n$ est la colimite. Pour conclure que l'application considérée dans le théorème est bijective, il reste donc à montrer qu'un certain groupe $\mathrm{R}^1\lim$ est nul, ce qui se déduira du fait que si $(d_1,\dots,d_n,r_1,\dots,r_n)$ et $(d'_1,\dots,d'_n,r'_1,\dots,r'_n)$ sont des entiers naturels tels que $(d_i,r_i)\leq(d'_i,r'_i)$ pour tout $1\leq i\leq n$, alors l'inclusion évidente

$$\mathrm{Gr}_{d_1,r_1}\times\dots\mathrm{Gr}_{d_n,r_n}\to\mathrm{Gr}_{d'_1,r'_1}\times\dots\mathrm{Gr}_{d'_n,r'_n}$$

induit une surjection sur les groupes K_1. Comme tous ces S-schémas lisses sont cellulaires, cette surjectivité au niveau des groupes K_1 se déduit de la surjectivité au niveau des K_0 comme dans la démonstration du théorème III.29, et la surjectivité au niveau du K_0 provient simplement du fait (déjà utilisé) que toutes les applications $K_0(\mathrm{Gr}_{d'_i,r'_i})\to K_0(\mathrm{Gr}_{d_i,r_i})$ sont surjectives et que le K_0 d'un produit de grassmanniennes est le produit tensoriel (au-dessus du K_0 de la base) des groupes K_0 desdites grassmanniennes [4].

On dispose également d'une version en degrés supérieurs :

[4]Plus généralement, si S est un schéma régulier, si $X\in\mathrm{Sm}/S$ admet une décomposition cellulaire et si $Y\in\mathrm{Sm}/S$, alors l'application canonique $K_0(X)\otimes_{K_0(S)}K_i(Y)\to K_i(X\times_S Y)$ est bijective pour tout $i\in\mathbb{N}$.

Théorème III.32 *Soit S un schéma régulier. Pour tous entiers naturels n et i, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}((\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^n, \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)^n, K_i(-))$$

est bijective. On a une version pointée :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}((\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^n, \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-)^n, K_i(-)) .$$

On a noté $K_i(-)$ le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/S qui à $X \in \mathrm{Sm}/S$ associe $K_i(X)$. D'après le théorème III.3, on a des isomorphismes $\varphi\mathrm{R}\Omega^j(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \cong K_j(-)$ pour tout entier naturel j. Il suffit de remplacer K_1 par K_{i+1} dans les démonstrations des théorèmes III.29 et III.31 pour obtenir cette version.

4 Structures sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$

On fixe un schéma régulier S. D'après les théorèmes III.29 et III.31, les opérations sur $K_0(-)$ se relèvent en des endomorphismes de $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (ou des morphismes entre produits de copies de cet objet) dans $\mathscr{H}(S)$, l'unicité du relèvement garantissant que les relations vérifiées dans $K_0(-)$ seront encore vérifiées sur ces relèvements canoniques. Dans cette section, nous allons appliquer ceci pour relever les structures bien connues sur $K_0(-)$ sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$.

4.1 Structure de Groupe commutatif

On sait déjà que $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ est muni d'une structure de H-groupe (cf. théorème III.3) compatible à la structure de groupe sur les groupes K_n. Cette loi m est commutative, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute dans $\mathscr{H}(S)$ (ou dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, c'est pareil) :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d, "(x,y)\mapsto(y,x)"'] \arrow[dr, "m"] & \\
& \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \\
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche de gauche est l'isomorphisme qui échange les deux facteurs. En effet, pour vérifier que ce diagramme est commutatif dans $\mathscr{H}(S)$, en vertu du théorème III.31, il suffit de vérifier qu'il devient commutatif après application du foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, ce qui est vrai parce que pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ et tout couple (x, y) d'éléments de $K_0(X)$, on a l'égalité $x + y = y + x$. Maintenant que l'on sait que la loi de H-groupe sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ est commutative, il n'y a plus de danger à noter simplement $+\colon (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^2 \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ le morphisme m.

On note $-\colon \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ le morphisme dans $\mathscr{H}(S)$ correspondant à $x \longmapsto -x$ sur $K_0(-)$ et $0\colon \bullet \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ le morphisme correspondant à $0 \in K_0(S)$. On obtient ainsi que $(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, +, -, 0)$ est un Groupe commutatif dans la catégorie $\mathscr{H}(S)$ (et aussi dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, tous les morphismes considérés étant pointés), autrement dit que ces données vérifient formellement une formulation convenable des axiomes des groupes commutatifs (ce qui revient à dire que les axiomes usuels sont vérifiés après application du plongement de Yoneda $\mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(S)^{\mathrm{opp}}\,\mathbf{Ens}$).

4.2 Structure d'Anneau commutatif

Le préfaisceau de groupes abéliens $K_0(-) \in \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ porte une structure d'anneau commutatif (voir page 76). Le théorème III.31 permet de relever la loi multiplicative $K_0(-) \times K_0(-) \to K_0(-)$ en un unique morphisme $\times\colon (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^2 \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ (dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ en fait). Cette construction est aussi mentionnée dans [56, §4.3.1] ; d'une certaine manière, les résultats de cette section systématisent et approfondissent [*loc. cit.*]. On note $1\colon \bullet \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ le morphisme correspondant à $1 \in K_0(S)$.

On obtient ainsi une structure d'Anneau commutatif $(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, +, -, \times, 1, 0)$ dans la catégorie $\mathscr{H}(S)$: tous les axiomes à vérifier s'expriment par la commutativité de certains diagrammes dans $\mathscr{H}(S)$, d'après le théorème III.31, il suffit de tester la commutativité de ces diagrammes en remplaçant $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ par $K_0(-)$ (autrement dit, après application du foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$) et on peut effectuer cette vérification en disant simplement que pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, on a bien un anneau commutatif $K_0(X)$.

Le lemme suivant est inspiré par [*ibid.*, page 74], sa démonstration n'est pas très difficile :

Lemme III.33 *Soit E un H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. Soit (A, B) un couple d'objets de $\mathscr{H}_\bullet(S)$. Alors, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(A \wedge B, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(A \times B, E)$$

est injective et son image est formée des morphismes $f\colon A \times B \to E$ dont les « restrictions » respectives à $A \times \bullet$ et $\bullet \times B$ sont nulles.

Comme dans [*loc. cit.*], on peut observer que pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$ et tout couple (x, y) d'éléments de $K_0(X)$, on a $xy = 0$ si $x = 0$ ou $y = 0$, le théorème III.29 permet donc de montrer que le morphisme $\times\colon (\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\times(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ vérifie les hypothèses du lemme précédent, ce qui montre l'existence d'un unique morphisme $\times_\bullet\colon (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$) faisant commuter le diagramme évident :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d] \arrow[dr, "\times"] & \\
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[r, dotted, "\times_\bullet"'] & \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}
\end{tikzcd}$$

Compte tenu du lemme III.33, la commutativité de la structure d'Anneau sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$

implique la commutativité du diagramme suivant dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\times_\bullet"] & \\
& \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \\
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[ur, "\times_\bullet"] &
\end{tikzcd}$$

où τ est la contrainte de commutativité du $\wedge$-produit.

Proposition III.34 *Soit S un schéma régulier. Pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, le morphisme*

$$\times_\bullet \colon (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^{\wedge 2} \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$$

induit la multiplication d'une structure d'anneau gradué sur le groupe abélien gradué

$$K_\star(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K_n(X)$$

La loi multiplicative est commutative au sens gradué : si $a \in K_i(X)$ et $b \in K_j(X)$, alors $b \cdot a = (-1)^{ij} b \cdot a$ dans $K_{i+j}(X)$.

En effet, pour tout entier naturel n, on a un isomorphisme canonique entre $K_n(X)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$. Pour deux entiers naturels i et j, on définit une multiplication

$$- \cdot - \colon K_i(X) \times K_j(X) \to K_{i+j}(X)$$

comme étant la flèche induite (compte tenu des isomorphismes précédents) par la composition suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^i \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^j \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d, "\wedge"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}((S^i \wedge X_+) \wedge (S^j \wedge X_+), (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})^{\wedge 2}) \arrow[d, "\times_\bullet \circ - \circ \Delta_X"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^{i+j} \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})
\end{tikzcd}$$

où la première flèche provient du $\wedge$-produit et où la seconde s'obtient par composition à gauche par $\times_\bullet$ et à droite par le morphisme $S^{i+j} \wedge X_+ \to (S^i \wedge X_+) \wedge (S^j \wedge X_+)$ induit par la diagonale $\Delta_X \colon X \to X \times X$. On vérifie facilement que l'on obtient bien ainsi une structure d'anneau gradué, et la formule $a \cdot b = (-1)^{ij} b \cdot a$ pour $a \in K_i(X)$ et $b \in K_j(X)$ vient simplement du fait que la permutation σ de $\{1, \ldots, i+j\}$ définie par $\sigma(k) = k + j$ si $1 \leq k \leq i$ et $\sigma(k) = k - i$ si $i + 1 \leq k \leq i + j$ induit la multiplication par $(-1)^{ij}$ sur le cogroupe $S^{i+j} = (S^1)^{\wedge(i+j)}$ dans $\mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}}$.

On vérifiera plus tard que cette structure multiplicative sur la K-théorie algébrique coïncide avec les structures multiplicatives définies antérieurement par Quillen, Loday et Waldhausen (cf. section 7).

4.3 Structure de λ-Anneau

Dans les définitions II.19, II.20 et II.21, on a rappelé la construction de diverses transformations naturelles $K_0(-) \to K_0(-)$ de foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$. Le théorème III.29 leur fait donc correspondre des familles $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Psi^k)_{k\geq 1}$ d'endomorphismes de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$. À l'exception de λ^0 et de γ^0, toutes ces transformations naturelles sont pointées (*i.e* envoient 0 sur 0), les classes d'homotopies $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ associées peuvent donc être vues comme des morphismes dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ (cf. lemme III.19).

Proposition III.35 *La famille de morphismes* $\lambda^n\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *dans* $\mathscr{H}(S)$ *pour* $n\in\mathbb{N}$ *font de* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *un λ-Anneau dans la catégorie* $\mathscr{H}(S)$.

D'après la définition donnée dans SGA 6 V 2.1, il s'agit de vérifier d'une part que $\lambda^0 = 0$ et $\lambda^1 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ (ce qui est évident) et d'autre part que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a l'égalité suivante

$$\lambda^n(a+b) = \sum_{p+q=n} \lambda^p(a)\cdot\lambda^q(b)$$

où (a,b) est un couple de morphismes $Z\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ avec Z un objet de $\mathscr{H}(S)$. Pour vérifier cette dernière assertion, il suffit évidemment de considérer le cas universel : $Z = (\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^2$ et les deux projections pour morphismes a et b, la compatibilité voulue se reformule donc en l'égalité entre deux morphismes $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^2 \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$, ce qui d'après le théorème III.31 peut se tester après application du foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. Les axiomes de λ-Anneau pour $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ se déduisent donc des axiomes de λ-anneau pour $K_0(X)$ pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$.

En vertu du théorème III.30, on obtient, pour tout entier $i\in\mathbb{N}$, des transformations naturelles $K_i(-)\to K_i(-)$ (additives pour $i\geq 1$) induites par les endomorphismes $(\lambda^n)_{n\geq 1}$, $(\gamma^n)_{n\geq 1}$ et $(\Psi^k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$.

4.4 Structure de λ-Anneau spécial

Proposition III.36 *Le λ-Anneau* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *dans la catégorie* $\mathscr{H}(S)$ *obtenu à la proposition* III.*35 est un λ-Anneau spécial.*

On utilise la définition donnée dans SGA 6 V 2.4 qui se traduit sous la forme d'une famille de relations. Comme précédemment, il suffit de tester ces relations après application du foncteur φ, autrement dit vérifier que pour tout $X\in\mathrm{Sm}/S$, le λ-anneau $K_0(X)$ est spécial, ce qui est établi dans SGA 6 VI 3.2.

Proposition III.37 *Pour tout entier $k\geq 1$, les endomorphismes Ψ^k de* $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ *dans* $\mathscr{H}(S)$ *sont des endomorphismes d'Anneaux. Pour tout couple (k,k') d'entiers ≥ 1, on a l'égalité*

$$\Psi^k\circ\Psi^{k'} = \Psi^{kk'} \in \mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\ .$$

Il s'agit d'un corollaire de la proposition III.36 en vertu de SGA 6 VI 7.5 i).

Pour tout entier $k \geq 1$, on peut déduire de la proposition précédente la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[r, "\times_\bullet"] \arrow[d, "\Psi^k \wedge \Psi^k"] & \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \arrow[d, "\Psi^k"] \\
(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[r, "\times_\bullet"] & \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}
\end{tikzcd}$$

En particulier, si $X \in \mathrm{Sm}/S$, $a \in K_i(X)$ et $b \in K_j(X)$, on a bien

$$\Psi^k(a \cdot b) = \Psi^k(a) \cdot \Psi^k(b) \ .$$

5 Modèles de la K-théorie algébrique

Pour le moment, nous avons volontairement privilégié l'objet $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ de $\mathscr{H}(S)$ pour représenter la K-théorie algébrique dans la mesure où il nous a permis d'aboutir au théorème III.29. La comparaison de nos constructions d'opérations sur la K-théorie algébrique avec les constructions antérieures (qui notamment sera l'objet de la section 7) deviendra très aisée une fois que l'on aura défini précisément ce qu'on entend par « modèle » de la K-théorie algébrique et étudié la manière dont ces modèles se comparent naturellement entre eux.

5.1 Modèles putatifs

Définition III.38 *Soit S un schéma régulier. Un modèle putatif de la K-théorie algébrique sur S consiste en la donnée d'un objet E de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et d'un isomorphisme $\alpha_E\colon K_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi E$ dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ (voir la définition III.5 pour ce foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$).*

Pour tout schéma régulier S, l'objet $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ de $\mathscr{H}_\bullet(S)$, muni de l'isomorphisme

$$\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}\colon K_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

donné par le théorème III.3, est un modèle putatif de la K-théorie algébrique. L'isomorphisme $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ est caractérisé par le fait que si $\mathscr{M}'_{d,r}$ est le fibré universel de rang d sur $\mathrm{Gr}_{d,r}$ alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, l'image de $u_{d,r}+n = \left[\mathscr{M}'_{d,r}\right] - d + n \in K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$ par $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ est la classe d'homotopie de l'inclusion $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \{n\} \times \mathrm{Gr} \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$; en effet, l'assertion III.4 affirme que ces relations sont vérifiées et la propriété (ii) pour $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ fait de ces relations une caractérisation de $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$.

On appellera $(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, \alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}})$ le modèle putatif canonique de la K-théorie algébrique.

Lemme III.39 *Soit S un schéma régulier. Pour tout modèle putatif (E, α_E) de la K-théorie algébrique sur S, il existe un morphisme $\tau_E\colon \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to E$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ faisant* *commuter le diagramme suivant (formé d'isomorphismes) :*

$$\begin{tikzcd} & \varphi(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[dd, "\varphi(\tau_E)"] \\ K_0(-) \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}"] \arrow[dr, "\alpha_E"'] & \\ & \varphi E \end{tikzcd}$$

Comme on n'a pas supposé que E était un H-groupe, on ne peut pas utiliser la suite exacte de Milnor (cf. théorème II.10) telle qu'on l'a énoncée. On peut cependant déduire de [25, proposition 2.15, Chapter VI] qu'il existe un élément $\tau_E \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}, E)$ tel que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout couple d'entiers naturels (d, r), on ait l'égalité

$$\alpha_E(u_{d,r}+n) = \varphi(\tau_E)(\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}(u_{d,r}+n))$$

dans $\varphi E(\mathrm{Gr}_{d,r})$. Pour montrer que le diagramme ci-dessus est bien commutatif, il suffit de montrer que les deux flèches $K_0(-) \to \varphi(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ données par $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ et $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}\circ{\alpha_E}^{-1}\circ\varphi(\tau_E)\circ\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ sont égales, ce qui résulte de l'égalité précédente et de la propriété caractérisant $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ rappelée plus haut. On a ainsi établi le lemme.

5.2 Modèles authentiques

Définition III.40 *Soit S un schéma régulier. Soit (E, α_E) un modèle putatif de la K-théorie algébrique sur S, on dit que (E, α_E) est un modèle (authentique) de la K-théorie algébrique sur S s'il existe un morphisme $\tau_E\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to E$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ faisant commuter le diagramme du lemme III.39 et que ce morphisme τ_E soit un isomorphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$.*

Remarquons aussitôt que si (E, α_E) est un modèle authentique de la K-théorie algébrique sur S, alors le morphisme $\tau_E\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to E$ est unique : cela résulte aussitôt du théorème III.29. Plus précisément, tous les modèles authentiques de la K-théorie algébrique sur S sont canoniquement isomorphismes entre eux :

Proposition III.41 *Soit S un schéma régulier. On se donne (E, α_E) et (F, α_F) deux modèles authentiques de la K-théorie algébrique sur S. Alors, il existe un unique morphisme $\tau_{E,F}\colon E \to F$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & \varphi E \arrow[dd, "\varphi(\tau_{E,F})"] \\ K_0(-) \arrow[ur, "\alpha_E"] \arrow[dr, "\alpha_F"'] & \\ & \varphi F \end{tikzcd}$$

De plus, $\tau_{E,F}$ est un isomorphisme. Si (G, α_G) est un troisième modèle authentique, on a la relation de cocycle $\tau_{E,G} = \tau_{F,G}\circ\tau_{E,F}$.

Si (E, α_E) est un modèle authentique de la K-théorie algébrique, l'existence d'un unique isomorphisme avec le modèle authentique canonique $(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, \alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}})$ implique que E est canoniquement muni d'une structure de H-groupe commutatif.

Remarque III.42 *On pourrait définir la catégorie des modèles authentiques de la K-théorie algébrique sur un schéma régulier S, un morphisme $(E, \alpha_E) \to (F, \alpha_F)$ étant un morphisme $\tau_{E,F} \colon E \to F$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ tel que $\tau_{E,F} \circ \alpha_E = \alpha_F$. La proposition* III.*41 montre que cette catégorie, qui est munie d'un objet privilégié $(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, \alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}})$ est équivalente à la catégorie ponctuelle.*

Définition III.43 *Soit S un schéma régulier. Soit (E, α_E) un modèle authentique de la K-théorie algébrique sur S. Pour tout entier naturel n et tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, on pose*

$$K_n^E(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, E)$$

La proposition III.41 admet le corollaire évident suivant :

Corollaire III.44 *Soit S un schéma régulier. Si (E, α_E) et (F, α_F) sont deux modèles authentiques de la K-théorie algébrique, alors on a des isomorphismes canoniques (induits par $\tau_{E,F}$) :*

$$K_n^E(X) \xrightarrow{\sim} K_n^F(X)$$

pour tout entier naturel n et tout objet $X \in \mathrm{Sm}/S$.

Ainsi, les groupes de K-théorie algébrique définis en utilisant deux modèles authentiques sont canoniquement isomorphes.

Remarque III.45 *Il n'est ainsi plus nécessaire de faire apparaître le modèle authentique choisi dans la notation des groupes de K-théorie algébrique. Il fait également sens de comparer les applications induites par des morphismes dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ entre plusieurs objets sous-jacents à des modèles authentiaues de la K-théorie algébrique, comme l'indique le théorème suivant.*

Théorème III.46 *Soit S un schéma régulier. On se donne deux modèles authentiques (E, α_E) et $(E', \alpha_{E'})$ de la K-théorie algébrique sur S et $f \colon E \to E'$ un morphisme dans $\mathscr{H}(S)$. On note $f_0 \colon K_0(-) \to K_0(-)$ le morphisme dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ induit par f (autrement dit, $\alpha_{E'} \circ f_0 = \varphi f \circ \alpha_E$). Soit $\tilde{f}_0$ l'endomorphisme de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ correspondant à f_0 par l'isomorphisme $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))$ du théorème* III.*29. Alors, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathscr{H}(S)$:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \arrow[r, "\tau_E", "\sim"'] \arrow[d, "\tilde{f}_0"'] & E \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \arrow[r, "\tau_{E'}", "\sim"'] & E' \end{tikzcd}$$

De plus, si $f \colon E \to E'$ est un morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, les applications $K_n(-) \to K_n(-)$ induites par f et $\tilde{f}_0$ coïncident.

C'est évident.

Lemme III.47 *Soit S un schéma régulier. Soit E un objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ muni de deux structures (E,α) et (E,β) de modèles putatifs de la K-théorie algébrique. Si (E,α) est un modèle authentique, alors (E,β) aussi.*

On dispose d'isomorphismes $\alpha,\beta\colon K_0(-)\xrightarrow{\sim}\varphi E$. On en déduit un isomorphisme $\gamma = \alpha^{-1}\circ\beta\colon K_0(-)\xrightarrow{\sim} K_0(-)$. D'après le théorème III.29, il existe un unique endomorphisme $\tilde\gamma$ de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ correspondant à γ par l'isomorphisme (de monoïdes pour la composition)

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-))\ .$$

Comme γ est un isomorphisme, $\tilde\gamma$ aussi. Notons $\tau_{E,\alpha}$ l'isomorphisme $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to E$ canoniquement associé au modèle authentique (E,α). Posons $\tau_{E,\beta}=\tau_{E,\alpha}\circ\tilde\gamma$. On voit aussitôt que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & \varphi(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[dd, "\varphi(\tau_{E,\beta})"] \\ K_0(-) \arrow[ur, "\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & \varphi E \end{tikzcd}$$

Comme $\tau_{E,\beta}\colon\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to E$ est un isomorphisme, il vient que (E,β) est un modèle authentique de la K-théorie algébrique.

5.3 Modèles classiques

Il va s'agir ici de montrer que les préfaisceaux simpliciaux pointés donnés par diverses constructions de la K-théorie algébrique (pour des schémas réguliers) sont d'authentiques modèles de la K-théorie algébrique au sens de la définition III.40. Essentiellement, il faut vérifier d'une part que les différentes définitions sont suffisamment fonctorielles (en le schéma ou l'anneau) pour donner des préfaisceaux simpliciaux pointés (et donc des objets de $\mathscr{H}_\bullet(S)$ qui seront des modèles putatifs de la K-théorie algébrique) et d'autre part que les théorèmes de comparaison entre les différentes définitions sont assez fonctoriels pour définir des isomorphismes dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. Ce travail est l'occasion de donner de plus amples détails sur une variante de la démonstration de [57, proposition 3.9, page 139] et de préciser comment cet isomorphisme se comporte sur les fibrés universels sur les grassmanniennes (cf. assertion III.4, voir le théorème III.61 plus bas).

Les diverses constructions que nous allons comparer prennent comme point de départ la catégorie exacte des fibrés vectoriels sur un schéma X. Pour obtenir des préfaisceaux simpliciaux pointés (et donc des objets dans les catégories homotopiques $\mathscr{H}_\bullet(S)$ que l'on considère), il convient de donner une définition strictement fonctorielle en X d'une petite catégorie $\mathscr{P}(X)$ équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels sur X.

Définition III.48 *Soit X un schéma quasi-compact. Un objet $\mathscr{M}$ de $\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)$ consiste en la donnée d'un entier naturel n, d'une suite $U_1,\dots,U_n$ d'ouverts de X en formant un recouvrement, d'une suite $r_1,\dots,r_n$ d'entiers naturels et d'une famille $(M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de matrices M_{ij} inversibles*[5] *de tailles respectives (r_j,r_i) à coefficients dans l'anneau $\Gamma(U_i\cap U_j,\mathscr{O}_X)$ telles que pour tout triplet (i,j,k) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$, on ait la relation de cocycle*

$$M_{ij}|U_{ijk} = M_{jk}|U_{ijk}\times M_{ij}|U_{ijk}$$

où $U_{ijk}=U_i\cap U_j\cap U_k$. À un tel objet $\mathscr{M}$, on associe le foncteur qui à un $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$ associe l'ensemble des suites $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ où pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, φ_i est un r_i-uplet (représenté comme un vecteur ligne) d'éléments de $\Gamma(U_i,\mathscr{F})$ telles que pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$, on ait l'égalité suivante de r_i-uplets dans $\Gamma(U_{ij},\mathscr{F})$:

$$\varphi_i|U_{ij} = \varphi_j|U_{ij}\times M_{ij}|U_{ij}$$

où $U_{ij}=U_i\cap U_j$; il est clair que ce foncteur est coreprésentable par un $\mathscr{O}_X$-Module $\widetilde{\mathscr{M}}$ qui est localement libre de rang fini. Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sont deux objets de $\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)}(\mathscr{M},\mathscr{M}')=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X-\mathrm{Mod}}(\widetilde{\mathscr{M}},\widetilde{\mathscr{M}'})$.

Si $f\colon X\to S$ est un morphisme entre deux schémas quasi-compacts, on a un foncteur évident $f^\star\colon \mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(S)\to\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)$. Si $g\colon Y\to X$ est un autre tel morphisme, on a une *égalité* de foncteurs $g^\star\circ f^\star=(f\circ g)^\star$.

Pour tout schéma quasi-compact X, la catégorie $\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)$ est additive. On peut « rigidifier » le foncteur « somme directe » de manière standard (cf. [2, §1.2.1]) pour obtenir une catégorie $\mathscr{P}(X)$ munie d'un foncteur $\oplus\colon \mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ faisant partie d'une structure monoïdale strictement associative avec unité telle que si A et B sont deux objets de $\mathscr{P}(X)$, $A\oplus B$ soit muni des données qui en font le biproduit de A et B dans $\mathscr{P}(X)$ et d'une équivalence de catégorie $\mathscr{P}^{\mathrm{pre}}(X)\to\mathscr{P}(X)$ (toutes ces données étant strictement compatibles aux foncteurs images inverses définies par des morphismes entre schémas quasi-compacts).

On a ainsi obtenu un préfaisceau $\mathscr{P}$ sur la catégorie des schémas quasi-compacts à valeurs dans la catégorie des petites catégories exactes, de sorte que pour tout schéma quasi-compact X, $\mathscr{P}(X)$ soit équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels sur X (identifiés à des $\mathscr{O}_X$-Modules *via* leur faisceau des sections).

Définition III.49 *On note $\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ le préfaisceau simplicial pointé sur la catégorie des schémas quasi-compacts qui à X associe l'ensemble simplicial $\mathbf{B}Q\mathscr{P}(X)$ que Quillen fait correspondre à la catégorie exacte $\mathscr{P}(X)$ dans [62, §2].*

Définition III.50 *On note $\mathscr{W}$ le préfaisceau simplicial pointé sur la catégorie des schémas quasi-compacts qui à X associe $\mathrm{Sing}\,|iS_\bullet\mathscr{P}(X)|$ où $|iS_\bullet\mathscr{P}(X)|$ est l'espace topologique pointé défini par Waldhausen dans [82, §1.9].*

[5] Je considère qu'une matrice est inversible à partir du moment où le morphisme de modules libres qu'elle définit est un isomorphisme. Sur l'anneau nul, toutes les matrices (y compris celle qui ne sont pas carrées) sont des matrices inversibles. Exiger que M_{ij} soit inversible n'implique donc pas forcément l'égalité $r_i=r_j$.

Théorème III.51 (Waldhausen, [*loc. cit.*]) *Pour toute catégorie exacte $\mathscr{E}$, on a un zigzag (fonctoriel en $\mathscr{E}$) d'équivalences faibles pointées entre $\mathbf{B}Q\mathscr{E}$ et $\mathrm{Sing}\,|iS_\bullet\mathscr{E}|$.*

Corollaire III.52 *Soit S un schéma noethérien. Si on note encore $\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ et $\mathscr{W}$ les préfaisceaux simpliciaux pointés sur Sm/S induits par ceux du même nom sur la catégorie des schémas quasi-compacts, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{B}Q\mathscr{P} \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}$$

dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)$.

Remarque III.53 *Ici, $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)$ désigne la catégorie homotopique obtenue à partir de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles simpliciaux pointés sur Sm/S en inversant formellement les morphismes $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tels que pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, l'application $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$ soit une équivalence faible d'ensembles simpliciaux autrement dit $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)$ est la catégorie homotopique simpliciale du site constitué par la catégorie Sm/S munie de la topologie grossière. L'isomorphisme obtenu dans ce corollaire induit à plus forte raison un isomorphisme dans la catégorie homotopique pointée $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$ du « grand » site formé par la catégorie Sm/S munie de la topologie de Nisnevich.*

Théorème III.54 ([26], [72, theorem 7.7]) *Soit $\mathscr{E}$ une catégorie exacte dont les suites exactes sont scindées. On note $\mathcal{S}_\mathscr{E}$ la sous-catégorie de $\mathscr{E}$ dont les flèches sont les isomorphismes de $\mathscr{E}$. Alors, il existe un zigzag d'équivalences faibles (fonctoriel en $\mathscr{E}$) entre $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{E}$ et $\mathbf{B}(\mathcal{S}_\mathscr{E}^{-1}\mathcal{S}_\mathscr{E})$, où la catégorie $\mathcal{S}_\mathscr{E}^{-1}\mathcal{S}_\mathscr{E}$ est définie dans [26].*

Définition III.55 *Pour tout schéma quasi-compact X, on note $\mathcal{S}_X$ la sous-catégorie de $\mathscr{P}(X)$ ayant les mêmes objets mais ayant les isomorphismes de $\mathscr{P}(X)$ comme morphismes. On note $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ (resp. $\mathbf{B}\mathcal{S}$) le préfaisceau simplicial pointé sur la catégorie des schémas quasi-compacts qui à X associe $\mathbf{B}\mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{S}_X$ (resp. $\mathbf{B}\mathcal{S}_X$). On a un morphisme évident $\mathbf{B}\mathcal{S} \to \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$.*

Corollaire III.56 *Soit S un schéma noethérien. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$$

dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$.

On peut considérer le préfaisceau de catégories exactes $\mathscr{P}'$ sur la catégorie des schémas quasi-compacts qui à X associe la catégorie additive $\mathscr{P}'(X) = \mathscr{P}(X)$ que l'on considère comme catégorie exacte en disant que les suites exactes sont les suites exactes scindées. On a un foncteur exact évident $\mathscr{P}'(X) \to \mathscr{P}(X)$ pour tout X dont on déduit un morphisme $\mathbf{B}Q\mathscr{P}' \to \mathbf{B}Q\mathscr{P}$ de préfaisceaux simpliciaux pointés sur la catégorie Sm/S, ce morphisme est une équivalence faible simpliciale pour la topologie de Nisnevich (et même pour la topologie de Zariski) sur Sm/S puisque si X est un schéma affine, les suites exactes sont scindées dans $\mathscr{P}(X)$. Le théorème III.54 donne un isomorphisme $\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P}') \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$, ce qui permet de conclure.

Théorème III.57 *Soit S un schéma noethérien. Soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. Pour chacun des préfaisceaux simpliciaux pointés E sur Sm/S parmi $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$, $\Omega\mathscr{W}$ et $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$, la flèche canonique d'ensembles simpliciaux pointés*

$$E(X) \to \mathrm{R}\Gamma(X_{\mathrm{Nis}}, E)$$

est une équivalence faible pourvu que l'on soit dans l'un des deux cas suivants :
– *le schéma X est divisoriel (cf. définition II.12) et E est $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ ou $\Omega\mathscr{W}$;*
– *le schéma X est affine.*

On utilise le fait que la K-théorie algébrique des complexes parfaits de Thomason-Trobaugh (cf. [74]) vérifie la conclusion du théorème pour tout schéma noethérien X (cf. [*ibid.*, theorem 10.8, remark 10.11], [57, proposition 1.16, page 100] et [13]). On dispose par ailleurs d'une flèche naturelle de $\Omega\mathscr{W}$ vers un préfaisceau simplicial pointé « calculant » la K-théorie algébrique des complexes parfaits dont on sait qu'elle induit des équivalences faibles pour X divisoriel [74, proposition 3.10]. La conclusion du théorème est donc vraie pour X divisoriel et $E = \Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ ou $E = \Omega\mathscr{W}$. Enfin, le résultat pour $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ et X affine résulte du corollaire III.56 et de sa démonstration.

Corollaire III.58 *Soit S un schéma régulier. Les objets $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$, $\Omega\mathscr{W}$ et $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ de $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$ sont $\mathbb{A}^1$-locaux.*

Compte tenu du théorème précédent, cela résulte aussitôt de l'invariance par homotopie de la K-théorie algébrique pour les schémas réguliers (cf. [62, proposition 4.1, §7] et [*ibid.*, §7.1])

⋆
⋆ ⋆

Pour tout schéma quasi-compact X et tout entier naturel n, on a un morphisme de groupes évident de $\mathrm{GL}_n(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))$ vers le groupe des automorphismes du fibré vectoriel trivial de rang n sur X (que l'on peut voir comme un objet de $\mathcal{S}_X$), il lui correspond donc un morphisme d'ensembles simpliciaux pointés $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \to \mathbf{B}\mathcal{S}_X$. On en déduit un morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointés sur la catégorie des schémas quasi-compacts

$$\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \to \mathbf{B}\mathcal{S}\ .$$

Pour tout schéma noethérien S, le morphisme de préfaisceaux simpliciaux pointés sur Sm/S correspondant est une équivalence faible simpliciale pour la topologie de Zariski : localement, tout fibré vectoriel est trivial.

On a par ailleurs un morphisme $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \to \mathbb{Z} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ (où GL_∞ est le préfaisceau de groupes limite inductive des préfaisceaux représentés par les schémas en groupes GL_n, les morphismes de transition étant les inclusions classiques) induit par les inclusions $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \to \{n\} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \to \{n\} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$.

Théorème III.59 *Pour tout schéma noethérien S, on a un diagramme commutatif dans $\mathscr{H}_{\bullet}(\mathrm{Sm}/S)$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\mathcal{S} \arrow[r] & \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} \\
\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Z}\times\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \arrow[u, "\chi"']
\end{tikzcd}$$

De plus, pour tout schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ dans Sm/S, le morphisme dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ obtenu en évaluant χ sur X induit, pour tout entier relatif n, un isomorphisme en homologie singulière entre $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty(A)$ et la composante connexe de $\mathbf{B}\mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{S}_X$ correspondant au fibré vectoriel « virtuel » trivial de rang n.

La construction de cette flèche $\chi\colon \mathbb{Z}\times\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ et la vérification des propriétés mentionnées est réalisée dans [26, page 224]. Pour définir cette flèche, on a besoin de remplacer $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ par une colimite homotopique du système inductif $(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition III.60 *Soit S un schéma régulier. Le morphisme $\chi\colon \mathbb{Z}\times\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, autrement dit un isomorphisme dans $\mathscr{H}_{\bullet}(S)$.*

On note $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_0$ le préfaisceau simplicial pointé qui à $X\in\mathrm{Sm}/S$ associe la composante connexe du point-base dans $\mathbf{B}\mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{S}_X$. Il s'agit de montrer que le morphisme $\chi_0\colon \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_0$ induit par χ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible. J'ai appris l'argument suivant de Fabien Morel. On utilise le foncteur $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ de [57, page 87] ; on a un carré commutatif où les flèches verticales sont des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \arrow[r, "\chi_0"] \arrow[d] & \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_0 \arrow[d] \\
\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \arrow[r, "\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\chi_0)"] & \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_0)
\end{tikzcd}$$

Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine appartenant à la catégorie Sm/S. Si on évalue le diagramme précédent sur X, la flèche de droite devient une équivalence faible d'ensembles simpliciaux et les autres des morphismes entre ensembles simpliciaux pointés (connexes) induisant des isomorphismes en homologie singulière ; compte tenu du théorème III.59, cela résulte du fait que si B est un anneau régulier,

$$\Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}) \to \Gamma(\operatorname{Spec} B[T], \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})$$

est une équivalence faible (ce qui découle du théorème III.54 et de l'invariance par homotopie de la K-théorie de Quillen pour les schémas réguliers, cf. [62, proposition 4.1, §7]). On obtient ainsi une classe d'homotopie $S = \Gamma(X, \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)) \to \Gamma(X, \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}_0) = T$ entre espaces pointés connexes dont on sait qu'elle induit un isomorphisme en homologie singulière, si on montre que c'est une équivalence faible, on aura établi que $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\chi_0)$ (et donc χ_0) est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible. On sait que T est un H-groupe, pour conclure que cette flèche est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux pointés, il suffit de montrer que le groupe fondamental de S agit trivialement sur les groupes d'homotopie de S (en particulier, le groupe fondamental de S est abélien) [6]. Si on avait une structure de H-espace sur $\Gamma(X, \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty))$, ce serait gagné, mais on ne le sait pas *a priori*. On peut néanmoins définir un morphisme de préfaisceaux de groupes $m\colon \mathrm{GL}_\infty \times \mathrm{GL}_\infty \to \mathrm{GL}_\infty$ en passant à la limite inductive des morphismes convenables $f_n\colon \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_{2n}$, ce qui donne une loi m sur $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ et sur $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$. Pour tout entier naturel n, on peut montrer que le morphisme d'inclusion $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_\infty$ est élémentairement $\mathbb{A}^1$-homotope aux morphismes composés $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \xrightarrow{f_n} \mathrm{GL}_{2n} \xrightarrow{i} \mathrm{GL}_\infty$ induits par f_n et les inclusions $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ données par $g \mapsto (g, 1)$ et $g \mapsto (1, g)$. On en déduit que concernant la loi $m\colon\ \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \times \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \to \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$, les morphismes $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \to \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$ induits par « $x \mapsto m(x, \bullet)$ » et « $x \mapsto m(\bullet, x)$ » ne sont peut-être pas Δ^1-homotopes (l'homotopie devant fixer le point-base) à l'identité, mais ils le deviennent cependant après restriction à $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n)$ pour tout entier naturel n, ce qui est suffisant pour conclure.

D'après [57, proposition 3.7, page 138], on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Gr} \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ (pour tout schéma noethérien S). Le théorème suivant précise un peu le théorème III.3.

Théorème III.61 *Soit S un schéma régulier. Il existe un isomorphisme* $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}\colon \varphi(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} K_0(-)$ *dans* $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ *tel que pour tout couple d'entiers naturels (d, r) et tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, la classe d'homotopie de l'inclusion évidente* $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \{n\} \times \mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ *corresponde* via $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}$ *à l'élément $u_{d,r} + n = \left[\mathscr{M}'_{d,r}\right] - d + n$ dans* $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$.

De plus, les objets $\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P})$, $\mathrm{R}\Omega(\mathscr{W})$ *et* $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ *de* $\mathscr{H}_\bullet(S)$ *peuvent être munis d'une structure de modèle authentique de la K-théorie algébrique compatible avec les identifications usuelles sur les groupes K_0.*

Pour tout schéma affine X, on a une bijection tautologique $\pi_0(\mathbf{B}\mathcal{S}_X^{-1}\mathcal{S}_X) \xrightarrow{\sim} K_0(X)$. Compte tenu du théorème III.57 et du corollaire III.58, on en déduit une bijection

$$(\varphi\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S})(X) \xrightarrow{\sim} K_0(X)$$

pour X affine, ce qui s'étend naturellement en un isomorphisme de préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie Sm/S :

$$\varphi(\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} K_0(-)$$

[6] Je n'ai malheureusement pas trouvé de référence satisfaisante pour ce résultat précis ; en voici une esquisse de démonstration. Soit $f\colon X_1 \to X_2$ une application entre espaces pointés connexes tels que pour $i \in \{1, 2\}$, le groupe $\pi_1(X_i)$ agisse trivialement sur tous les groupes $\pi_n(X_i)$; on suppose que $H_\star(X_1) \xrightarrow{\sim} H_\star(X_2)$ et on veut montrer que pour tout $n \geq 1$, l'application $\pi_n(X_1) \to \pi_n(X_2)$ est bijective. On peut supposer que f est une fibration de fibre F. On a à notre disposition la suite exacte longue d'homotopie associée à cette fibration ainsi que la suite spectrale de Serre

$$E^2_{pq} = H_p(X_2, H_q(F)) \Longrightarrow H_{p+q}(X_1)\ .$$

Soit $n \geq 1$. Supposons que l'on sache que les groupes $H_i(F)$ (et donc aussi $\pi_i(F)$, $\pi_1(F)$ étant abélien et F connexe) pour $1 \leq i < n$ soient nuls ; la suite spectrale de Serre montre que $H_0(X_2, \pi_n(F)) = 0$; comme $\pi_1(X_2)$ agit de façon nilpotente sur le groupe $\pi_n(F)$ (cf. [33, theorem 2.2, Chapter II]), on en déduit que $\pi_n(F) = 0$, ce qui permet de conclure par récurrence.

grâce à la proposition II.16. Grâce à l'$\mathbb{A}^1$-équivalence faible $\mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$, on obtient un isomorphisme $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. On dispose aussi d'une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible $\chi\colon \mathbb{Z} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$. On dispose ainsi d'un isomorphisme $\mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et donc d'un isomorphisme $\alpha_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}\colon K_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. Un examen attentif de la situation permet de montrer sans grande difficulté que cet isomorphisme vérifie la condition voulue concernant les classes des fibrés vectoriels universels (et leurs translatés) sur les grassmanniennes.

Ensuite, on a vu que $\mathbb{Z}\times\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ et $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ étaient isomorphes (dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$) aux objets $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$, $\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P})$ et $\mathrm{R}\Omega\mathscr{W}$. Ainsi, ils possèdent chacun tautologiquement au moins une structure de modèle authentique de la K-théorie algébrique ; d'après le lemme III.47, toute structure de modèle putatif (autrement dit un isomorphisme $K_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi E$) sur un de ces objets E définit un modèle authentique de la K-théorie algébrique. Dans la suite, on supposera toujours que la structure de modèle authentique sur $\mathbf{B}\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}$, $\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P})$ et $\mathrm{R}\Omega\mathscr{W}$ est donnée par les identifications usuelles (cf. [62, §2] pour la K-théorie de Quillen). On peut d'ailleurs vérifier que les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles construites précédemment entre ces différents objets sont compatibles avec ces identifications classiques (au moins au signe près [7]) ; un argument convaincant pour faire cette vérification sans trop se salir les mains est donné par le lemme suivant :

Lemme III.62 *Soit τ un endomorphisme additif du foncteur qui à une catégorie exacte $\mathscr{E}$ associe son groupe de Grothendieck $K_0(\mathscr{E})$. Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que pour toute catégorie exacte $\mathscr{E}$, l'application $K_0(\mathscr{E}) \to K_0(\mathscr{E})$ induite par τ soit la multiplication par n.*

C'est évident ! Notons $\mathscr{U}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules formée des groupes abéliens *égaux* à $\mathbb{Z}^n$ pour un entier naturel n, cette catégorie $\mathscr{U}$ est équivalente à la catégorie des groupes abéliens libres de rang fini. Notons u l'objet de $\mathscr{U}$ correspondant au $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$. Comme $K_0(\mathscr{U})$ est un groupe abélien libre de rang 1 engendré par u, on peut définir un entier relatif n par la formule $\tau([u]) = n\,[u]$. Je dis que τ est la multiplication par cet entier n. Pour montrer cela, par additivité, il suffit de montrer que si $\mathscr{E}$ est une catégorie exacte et E un objet de $\mathscr{E}$, alors $\tau([E]) = n\,[E]$ dans $K_0(\mathscr{E})$. Or, il existe un foncteur exact $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{E}$ envoyant u sur E. La fonctorialité de τ donne les égalités :

$$\tau([E]) = \tau(f_\star(u)) = f_\star(\tau([u])) = f_\star(n\,[u]) = nf_\star([u]) = n\,[E] \ .$$

6 Changement de schéma de base

Dans [57, pages 91–92, 108] sont définis des foncteurs $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(T)$ pour tout morphisme $f\colon T \to S$ entre schémas noethériens. La construction n'est en pas absolument triviale puisque l'on ne dispose *a priori* pas d'un morphisme de (grands) sites $f\colon \mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}} \to$

[7]Les objets $\mathrm{R}\Omega(\mathbf{B}Q\mathscr{P})$ et $\mathrm{R}\Omega\mathscr{W}$ sont des espaces de lacets, ils possèdent donc une involution -1 provenant de la structure de H-cogroupe sur S^1 ; donc, si on a pas le bon signe, on peut corriger la construction en utilisant l'involution précédente. De toute façon, pour que cela ait réellement un sens de « prétendre avoir le bon signe », il faudrait préciser de façon déraisonnablement minutieuse toutes les identifications faites...

$\mathrm{Sm}/T_{\mathrm{Nis}}$ (c'est néanmoins le cas si f est lisse), c'est ce qui justifie l'apparition d'un foncteur dérivé total à gauche du foncteur $f^\star$ que l'on peut définir au niveau des faisceaux simpliciaux (comme on vient de le dire, ce foncteur ne commute pas forcément aux limites projectives finies).

Pour tout faisceau simplicial $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$, on a un morphisme $\mathrm{L}f^\star\mathscr{F} \to f^\star\mathscr{F}$ qui est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est $f^\star$-*admissible* (cf. [*ibid.*, definition 1.49, page 63]). Si $X \in \mathrm{Sm}/S$, alors le faisceau représenté par X est $f^\star$-admissible. De plus, si

$$\mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_1 \to \dots$$

est un système inductif indexé par $\mathbb{N}$ formé de monomorphismes entre objets $f^\star$-admissibles restant des monomorphismes de faisceaux après application de $f^\star$, alors $\operatorname{colim} \mathscr{F}_\bullet$ est $f^\star$-admissible (cf. [*ibid.*, lemma 1.53, page 64]). En particulier, la limite inductive d'un système inductif dans Sm/S indexé par $\mathbb{N}$ dont les flèches de transition sont des immersions est un objet $f^\star$-admissible. On en déduit aussitôt la proposition suivante :

Proposition III.63 *Pour tout morphisme $f\colon T \to S$ entre schémas noethériens, le faisceau simplicial $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ sur Sm/S est $f^\star$-admissible et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{L}f^\star(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$$

dans $\mathscr{H}(T)$.

Proposition III.64 *Soit $f\colon T \to S$ un morphisme entre schémas réguliers, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$, soit n un entier naturel. Le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathscr{H}_\bullet(T)$ induit une application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(T)}(S^n \wedge (X \times_S T)_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

c'est-à-dire, compte tenu des isomorphismes du théorème III.3*, une application $K_n(X) \to K_n(X \times_S T)$: c'est l'application image inverse en K-théorie algébrique associée au morphisme de schémas évident $X \times_S T \to X$.*

La fonctorialité contravariante de la K-théorie algébrique évoquée dans l'énoncé provient des constructions de Quillen ou de Waldhausen, par exemple. Cette proposition se démontre assez formellement en considérant $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (ou le préfaisceau associé associé aux modèles classiques de la K-théorie algébrique) comme un préfaisceau sur la catégorie des schémas réguliers (et non seulement les schémas lisses sur un schéma régulier fixé) ; un tel préfaisceau donne naissance par restriction à des modèles de la K-théorie algébrique dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ pour un schéma régulier S variable.

Nous n'utiliserons véritablement cette proposition que dans le cas $n = 0$ où on peut donner une démonstration plus concrète. On veut comparer deux transformations naturelles $K_0(-) \to K_0(- \times_S T)$ entre foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$: d'une part l'application induite par le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathscr{H}_\bullet(T)$ et d'autre part l'application $K_0(X) \to K_0(X \times_S T)$ naturelle en $X \in \mathrm{Sm}/S$ provenant de l'image inverse de fibrés vectoriels *via* le morphisme de projection $X \times_S T \to X$. Les deux foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$ considérés ici sont en fait des préfaisceaux sur la catégorie localisée $\mathrm{Sm}/S\,[\mathscr{T}^{-1}]$. D'après la remarque III.12, il suffit de vérifier que les deux transformations naturelles coïncident sur les classes $u_{d,r} + n \in K_0(\mathrm{Gr}_{d,r,S})$ pour $(d, r) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, ce qui compte tenu des identifications faites, résulte aussitôt de l'assertion III.4.

Corollaire III.65 *Soit $f\colon T \to S$ un morphisme entre schémas réguliers. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] & \prod_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r,S}) \arrow[d, "f^\star"] \\
\mathrm{End}_{\mathscr{H}(T)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sim"] & \prod_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r,T})
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes du théorème III.*29, la flèche de gauche étant induite par le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(T)$ et l'isomorphisme de la proposition* III.*63, et la flèche de droite par les applications « image inverse » sur les groupes K_0 associés aux projections $\mathrm{Gr}_{d,r,T} \to \mathrm{Gr}_{d,r,S}$ induites par f.*

Corollaire III.66 *Soit S un schéma régulier. Soit $T \in \mathrm{Sm}/S$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] \arrow[d, "\mathrm{L}f^\star"] & \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)) \arrow[d, "f^\star"] \\
\mathrm{End}_{\mathscr{H}(T)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/T^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))
\end{tikzcd}$$

où le morphisme de droite est induit par le foncteur $f^\star\colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathrm{Sm}/T^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ induit par le foncteur $f_\sharp\colon \mathrm{Sm}/T \to \mathrm{Sm}/S$ qui à un objet $X \in \mathrm{Sm}/T$ associe X vu comme S-schéma lisse et où les flèches horizontales (notées φ) sont induites par les isomorphismes du théorème III.*29.*

Corollaire III.67 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathscr{R}_S$ la sous-catégorie pleine de celle des S-schémas formée des S-schémas sont le schéma sous-jacent est régulier. Soit ψ une transformation naturelle du foncteur $K_0\colon \mathscr{R}_S^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$ dans lui-même. Pour tout objet T de $\mathscr{R}_S$, on note $\psi_{|T} \in \mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/T^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))$ la transformation naturelle induite par ψ* via *le foncteur évident $\mathrm{Sm}/T \to \mathscr{R}_S$. On note $\Psi_{|T} \in \mathrm{End}_{\mathscr{H}(T)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ le morphisme correspondant à $\psi_{|T}$ par l'isomorphisme du théorème* III.*29. Alors, pour tout morphisme $f\colon T' \to T$ dans $\mathscr{R}_S$, on a $\mathrm{L}f^\star(\Psi_{|T}) = \Psi_{|T'} \in \mathrm{End}_{\mathscr{H}(T)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$.*

Remarque III.68 *Les corollaires* III.*65,* III.*66 et* III.*67 admettent évidemment des variantes « à plusieurs variables » concernant les morphismes $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})^n \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ et leur comportement vis-à-vis des foncteurs « image inverse ».*

On déduit de ces résultats le théorème suivant :

Théorème III.69 *Soit $T \to S$ un morphisme entre schémas réguliers. La structure de λ-Anneau spécial sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}_T$ dans $\mathscr{H}(T)$ définie dans la section 4 provient de celle sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}_S$ par application du foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(T)$.*

Remarque III.70 *Un cas particulier important de ce théorème est celui où l'on considère un morphisme $T \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Cela rend raisonnable le principe qui consiste à faire certaines constructions sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ *et à étendre ensuite ces constructions à tout schéma de base (régulier) T en appliquant un foncteur image inverse $\mathscr{H}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \to \mathscr{H}(T)$.*

Remarque III.71 *Soit S un schéma régulier, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. En utilisant la structure de λ-Anneau sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}_S$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, on a défini un produit et des opérations sur $K_\star(X)$. Maintenant, si X est un schéma régulier, on peut toujours prendre $S = X$ et obtenir ces structures sur $K_\star(X)$. Il résulte de ce qui précède que les structures ainsi obtenues sur $K_\star(X)$ ne dépendent pas du schéma de base régulier S choisi de sorte que $X \in \mathrm{Sm}/S$.*

7 Comparaison avec les produits définis antérieurement

Dans cette section, nous allons comparer notre construction d'une structure multiplicative sur la K-théorie algébrique des schémas réguliers obtenue dans la proposition III.34 avec les constructions de Quillen, Loday et Waldhausen.

7.1 Construction de D. Quillen

Dans [62, §3], Quillen définit pour tout schéma X et tout entier naturel i une application bilinéaire

$$K_0(X) \times K_i(X) \to K_i(X)$$

qui fait de $K_i(X)$ un $K_0(X)$-module.

Théorème III.72 *Soit S un schéma régulier, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. Les applications $K_0(X) \times K_i(X) \to K_i(X)$ induites par la construction de la proposition* III*.34 pour tout entier naturel i coïncident avec la construction de Quillen.*

Grâce à la remarque III.71, on peut supposer que $X = S$. Par bilinéarité des deux applications à comparer, il suffit d'étudier le produit avec un élément de la forme $[E] \in K_0(S)$ où E est un fibré vectoriel sur S. Pour tout $Y \in \mathrm{Sm}/S$, on considère le foncteur exact $(a_Y^\star E) \otimes -$ de la catégorie des fibrés vectoriels sur Y dans elle-même, $a_Y \colon Y \to S$ étant le morphisme structural. On voit aisément que l'on peut « rigidifier » cette construction pour en faire un foncteur $\mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(Y)$ strictement compatible aux foncteurs image inverse ; en utilisant la fonctorialité de la construction Q, on obtient un endomorphisme τ du préfaisceau simplicial $\Omega \operatorname{Ex}^\infty \mathbf{B}Q\mathscr{P}$ qui induit, par construction, les morphismes $K_i(Y) \to K_i(Y)$ correspondant à la multiplication par $a_Y^\star [E]$ dans la construction de Quillen.

La transformation naturelle induite $\varphi(\tau) \colon K_0(-) \to K_0(-)$ (où $K_0(-)$ est vu comme un préfaisceau sur la catégorie Sm/S) est évidemment la multiplication par $[E]$ pour les structures d'anneaux usuelles sur les groupes $K_0(-)$.

Notons τ' le morphisme composé

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \arrow[r, equal] \arrow[ddr, bend right, "\tau'"'] & S \times_S (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d, "([E], \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}})"] \\
 & (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \times (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}
\end{tikzcd}$$

Par définition, $\varphi(\tau) = \varphi(\tau')$, d'après le théorème III.29, on en déduit l'égalité $\tau = \tau'$ dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ (on rappelle que l'on a canoniquement identifié $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ et $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, $\Omega\,\mathrm{Ex}^\infty\,\mathbf{B}Q\mathscr{P}$ étant un modèle authentique de la K-théorie algébrique, cf. théorème III.61), ce qui permet de conclure.

7.2 Construction de J.-L. Loday

Dans [53, §2.1], Loday définit des accouplements $K_i(A) \times K_j(A) \to K_{i+j}(A)$ pour tout anneau A et des entiers $i > 0$, $j > 0$.

Théorème III.73 *Soit S un schéma régulier, soit $X = \mathrm{Spec}\, A \in \mathrm{Sm}/S$. Les applications $K_i(A) \times K_j(A) \to K_{i+j}(A)$ induites par la construction de la proposition III.34 pour $i > 0$ et $j > 0$ coïncident avec la construction de Loday.*

L'idée de la démonstration est d'imiter la construction de Loday pour la rendre fonctorielle en l'anneau régulier A. La construction de Loday et le théorème ci-dessus ne font pas du tout intervenir les groupes K_0 puisqu'on se concentre sur la composante connexe du point-base d'un modèle de la K-théorie algébrique. Nous allons donc commencer par mentionner des variantes de résultats précédents en remplaçant $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ par Gr.

Définition III.74 *Soit X un schéma quasi-compact, on note $\tilde{K}_0(X)$ le sous-groupe de $K_0(X)$ formé des « classes de fibrés virtuels de rang 0 », autrement dit le noyau de l'application rang $K_0(X) \to \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$.*

Lemme III.75 *Soit X un schéma régulier. On a un isomorphisme canonique $\tilde{\alpha} \colon \tilde{K}_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathrm{Gr})$ dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$.*

Cela résulte facilement de l'isomorphisme $\alpha \colon K_0(-) \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ et de ses propriétés.

Les théorèmes III.29, III.30 et III.31 admettent des variantes évidentes obtenues en remplaçant $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ par Gr et $K_0(-)$ par $\tilde{K}_0(-)$ (concernant le théorème III.30, noter que l'on a un isomorphisme $\mathrm{R}^{\mathbb{A}^1}\Omega(\mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^{\mathbb{A}^1}\Omega(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ puisque $\mathrm{R}^{\mathbb{A}^1}\Omega(\mathbb{Z}) = \bullet$).

Avant d'obtenir une structure de H-groupe commutatif sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (et donc sur Gr par la même méthode) dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, nous avions vu au cours de la démonstration de la proposition III.60 qu'il y avait un candidat naturel pour la loi $+$ d'une structure de H-groupe sur $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$. Nous allons examiner cela plus en détail puisque la construction de Loday fait intervenir la loi $-$ sur le modèle de la K-théorie algébrique qu'il considère (construction $+$ de Quillen).

Si S est un schéma régulier, on considère la sous-catégorie pleine SmAff/S de Sm/S formée des schémas affines. On note $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$ (resp. $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S_{\mathrm{Nis}})$) la catégorie homotopique simpliciale formée à partir des préfaisceaux simpliciaux pointés sur SmAff/S munie de la topologie grossière (resp. munie de la topologie de Nisnevich).

Lemme III.76 *Soit S un schéma régulier. L'objet $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$ admet une structure de H-groupe commutatif dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$.*

Il convient de prévenir le lecteur que cet énoncé et la démonstration qui suit présente deux subtilités : on se restreint à la catégorie SmAff/S et nonobstant la topologie de Nisnevich qui intervient dans la démonstration, il est question ici d'équivalences faibles simpliciales ne faisant pas intervenir de topologie sur SmAff/S.

Tout d'abord, la catégorie $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S_{\mathrm{Nis}})$ est tautologiquement équivalente à la catégorie $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$. Il résulte de la démonstration de la proposition III.60 que si on choisit une résolution $\mathbb{A}^1$-locale et fibrante $i\colon \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \to \mathscr{G}$ (pour la structure de catégorie de modèles sur la catégorie des préfaisceaux simpliciaux pointés sur Sm/S *munie de la topologie de Nisnevich*), alors pour tout $X \in \mathrm{SmAff}/S$, i induit une équivalence faible entre $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)(X)$ et la composante connexe de $\mathscr{G}(X)$ contenant le point-base.

Maintenant, $\mathscr{G}$ s'identifie dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ à Gr, il porte donc tout naturellement une structure de H-groupe abélien que l'on peut considérer (grâce au caractère fibrant de $\mathscr{G}$) comme étant induite par des morphismes « somme » $+\colon \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ et « opposé » $-\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}$.

Notons $\mathscr{G}_0$ le préfaisceau simplicial sur Sm/S qui à X associe la composante connexe de $\mathscr{G}(X)$ contenant le point-base. Les morphismes $+$ et $-$ au niveau de $\mathscr{G}(X)$ se restreignent évidemment à $\mathscr{G}_0(X)$ qui admet donc aussi une structure de H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)$. La restriction de $\mathscr{G}_0$ à la catégorie SmAff/S possède donc une structure de H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$, d'après ce qu'il a été rappelé plus haut, le morphisme $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \to \mathscr{G}_{0,|\mathrm{SmAff}/S}$ induit un isomorphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$, ce qui nous donne bien une structure de H-groupe dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$ sur $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$.

Définition III.77 *Soit S un schéma régulier. On pose $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ = \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$, c'est un H-groupe abélien de $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$. On dispose d'un morphisme canonique $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$, et pour tout $X \in \mathrm{SmAff}/S$, la flèche induite*

$$\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty(X) \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+(X)$$

est un homologisme d'ensembles simpliciaux (c'est-à-dire que ce morphisme induit un isomorphisme en homologie singulière).

La proposition suivante nous sera très utile pour établir le théorème III.73.

Proposition III.78 *Soit $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Par « renumérotation », cette bijection σ induit un automorphisme c_σ du faisceau de groupes GL_∞. Pour tout schéma régulier S, le morphisme induit $\mathbf{B}c_\sigma \in \mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$ est l'identité.*

Si X est un schéma (quasi-compact), on peut identifier $\mathrm{GL}_\infty(X)$ à l'ensemble des familles $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ telles que pour N suffisamment grand, on ait d'une part $a_{i,j}=\delta_{i,j}$ dès que $i\geq N$ ou que $j\geq N$ et d'autre part $\det(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ inversible, la structure de groupe étant induite par la formule de multiplication des matrices (qui a bien un sens ici, bien que les matrices considérées soient de taille infinie). On note $c_\sigma\colon \mathrm{GL}_\infty(X)\to\mathrm{GL}_\infty(X)$ le morphisme de groupes qui à un élément de la forme $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ associe la famille $(a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ (dont on montre sans difficulté qu'elle vérifie encore la condition ci-dessus).

Soit S un schéma régulier. Pour montrer que $\mathbf{B}c_\sigma\in\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$ est l'identité, compte tenu de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Gr}\xrightarrow{\sim}\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et de la donnée d'une structure de H-groupe abélien sur Gr, il suffit de montrer l'égalité voulue après oubli des points-bases, à savoir dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$. Grâce notamment à la variante du théorème III.29 pour Gr au lieu de $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ et des isomorphismes $\mathrm{Gr}_{d,\infty}\xrightarrow{\sim}\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_d$ pour $d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ dans $\mathscr{H}(S)$ (cf. [57, lemma 3.7, page 138]), on voit qu'il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, si $i_n\colon\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n\to\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ est l'inclusion évidente, alors on a l'égalité $i_n=\mathbf{B}c_\sigma\circ i_n$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n,\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$. Pour établir ce fait, il est aisé de se ramener au cas où il existe un entier N tel que $\sigma(i)=i$ pour $i>N$, la bijection σ induit ainsi un élément τ du groupe symétrique à N lettres. Il suffit alors de traiter le cas $n=N$.

On est finalement ramené à montrer que pour tout entier naturel N et toute permutation τ sur N lettres, on a $i_N=i_N\circ\mathbf{B}c_\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_N,\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$ où c_τ est l'automorphisme de GL_N induit par τ selon la recette évoquée précédemment pour GL_∞. Pour établir cela, il suffit de montrer que $\mathbf{B}c_\tau$ est l'identité dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_N)$ (ou mieux, dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(\mathrm{Sm}/S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_N)$), ce qui résulte du fait que c_τ est un automorphisme intérieur (la conjugaison par un élément de $\mathrm{GL}_N(S)$). (Notez que je ne dis pas que $\mathbf{B}c_\tau$ est l'identité dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{Sm}/S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_N)$, puisque c'est faux à moins que c_τ ne soit l'identité.).

Corollaire III.79 *Soit S un schéma régulier. Pour toute bijection $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, c_σ induit un automorphisme de $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ qui est l'identité dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+)$.*

Tout d'abord, $\mathbf{B}c_\sigma$ définit automorphisme de $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$, en appliquant le foncteur $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ et en se restreignant ensuite à SmAff/S, on obtient un automorphisme de $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$. On sait que $\mathbf{B}c_\sigma$ induit l'identité dans $\mathrm{End}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty)$, en appliquant la technique « résolution $\mathbb{A}^1$-fibrante — restriction à la composante connexe du point-base » déjà utilisée dans le lemme III.76, on obtient le résultat voulu.

On peut maintenant procéder à la démonstration du théorème III.73 et imiter les constructions de Loday dans [53, Chapitre II] en remplaçant $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+(A)$ pour un anneau A donné par l'objet $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ de $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$, où S est un schéma régulier.

Pour tout entier naturel n, notons ε^n « le » fibré vectoriel trivial de rang n (sur S), le S-schéma en groupes GL_n n'est autre que $\mathrm{GL}(\varepsilon^n)$. Pour tout couple d'entiers (p,p') d'entiers naturels, le produit tensoriel des fibrés vectoriels définit un morphisme de schémas en groupes

$$\otimes_{p,p'}\colon\ \mathrm{GL}(\varepsilon^p)\times\mathrm{GL}(\varepsilon^{p'})\to\mathrm{GL}(\varepsilon^p\otimes\varepsilon^{p'})\ .$$

Toute manière ϕ de numéroter les éléments de la base canonique de $\varepsilon^p\otimes\varepsilon^{p'}$ détermine un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varepsilon^{pp'}\xrightarrow{\sim}\varepsilon^p\otimes\varepsilon^{p'}$, on peut récrire le morphisme $\otimes_{p,p'}$ sous la forme d'un morphisme de schémas en groupes :

$$\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_{p'} \to \mathrm{GL}_{pp'} \ .$$

On note $f_{p,p'} \colon \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_p \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p'} \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{pp'}$ « le » morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$ qui s'en déduit. Pour tout entier naturel q, notons $i_q^+ \colon \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_q \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ le morphisme composé $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_q \overset{i_q}{\to} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$.

Le lemme suivant résulte aussitôt du corollaire III.79 :

Lemme III.80 *Le morphisme $i_{pp'}^+ \circ f_{p,p'} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_p \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p'}, \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+)$ ne dépend pas du choix de la numérotation ϕ.*

Pour tout couple (p,p') d'entiers naturels, on définit un élément

$$\gamma_{p,p'} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_p \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p'}, \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+)$$

par la formule suivante, qui fait intervenir la structure de H-groupe sur $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ de la définition III.77 :

$$\gamma_{p,p'} = i_{pp'}^+ \circ f_{p,p'} - i_{pp'}^+ \circ f_{p,p'} \circ (e \times \mathrm{id}) - i_{pp'}^+ \circ f_{p,p'} \circ (\mathrm{id} \times e) \ .$$

Lemme III.81 *Soit S un schéma régulier. Pour tous entiers naturels (p_1, p_1', p_2, p_2') tels que $p_1 \leq p_2$ et $p_1' \leq p_2'$, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p_1} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p_2} \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_{p_1,p_1'}"'] & \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p_2} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_{p'2} \arrow[d, "\gamma_{p_2,p_2'}"] \\
& \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+
\end{tikzcd}$$

où la flèche du haut est l'inclusion évidente.

Cela résulte aisément des définitions et du corollaire III.79.

Ce lemme permet de montrer qu'*il existe* un morphisme $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$ compatible avec les morphismes $\gamma_{p,p'}$ (pour tout couple d'entiers naturels (p,p')). En utilisant la construction $\mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}$ et le fait que $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ \to \mathrm{Sing}^{\mathbb{A}^1}\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ est un isomorphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(\mathrm{SmAff}/S)$, on peut insérer le morphisme que l'on vient de définir dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ \arrow[r, "\mu"] & \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+
\end{tikzcd}$$

Par construction, pour tout $X = \mathrm{Spec}\, A \in \mathrm{SmAff}/S$, le morphisme

$$\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+(A) \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+(A) \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+(A)$$

induit par μ est un morphisme qui définit la structure multiplicative sur la K-théorie supérieure dans [*ibid.*]. Il reste à montrer que la flèche $\mu\colon \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+ \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ s'identifie bien, comme morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ et modulo l'isomorphisme canonique $\mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty^+$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, à l'application $\mathrm{Gr}\times\mathrm{Gr} \to \mathrm{Gr}$ induite par la structure multiplicative introduite page 96. Il suffit pour cela de s'assurer qu'après application du foncteur φ, le morphisme μ induit la multiplication usuelle $\tilde{K}_0(X) \times \tilde{K}_0(X) \to \tilde{K}_0(X)$ pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$. Compte tenu des définitions, il s'agit essentiellement de vérifier que le « produit tensoriel de matrices » $\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_{p'} \to \mathrm{GL}_{pp'}$ induit au niveau des torseurs sous ces groupes une application qui s'identifie au produit tensoriels des fibrés vectoriels *via* la correspondance entre torseurs sous GL_n et fibrés vectoriels de rang un certain entier naturel n, ce qui est tautologique. Ceci achève la démonstration du théorème III.73.

7.3 Construction de F. Waldhausen

Un cas particulier de [82, page 342] dit que si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des catégories exactes et que $F\colon \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ est un foncteur biexact (au sens de [*loc. cit.*]), alors on a un zigzag (fonctoriel en les données) définissant une classe d'homotopie pointée

$$|iS_\bullet\mathscr{A}| \times |iS_\bullet\mathscr{B}| \to |iS_\bullet\mathscr{C}|$$

induisant des accouplements

$$-\cdot-\colon K_i(\mathscr{A}) \times K_j(\mathscr{B}) \to K_{i+j}(\mathscr{C})$$

pour tout couple (i,j) d'entiers naturels.

J'admets ici que pour $i = j = 0$, l'image de $([A], [B])$ par cet accouplement est bien $[F(A,B)]$ si A et B sont respectivement des objets de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, autrement dit que la construction de Waldhausen donne bien l'accouplement évident sur les groupe K_0. Si on n'en est pas persuadé, une variante à deux variables du lemme III.62 montre qu'il existe un entier relatif n tel que pour tout foncteur biexact $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ et tous objets A et B de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ respectivement, on ait

$$[A]\cdot[B] = n\,[F(A,B)] \ .$$

Si on est prêt à admettre que, modulo les questions de signe, la construction de Waldhausen donne bien une structure d'anneau sur $K_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, alors, on ne peut guère plus avoir que $n = 1$.

En « rigidifiant » le produit tensoriel des fibrés vectoriels sur des schémas variables, on peut définir, pour tout schéma quasi-compact X, un foncteur biexact $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$, fonctoriel en X. La construction de Waldhausen, donne donc, pour tout schéma noethérien S, un morphisme $\mathscr{W} \times \mathscr{W} \to \mathscr{W}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ (cf. définition III.50).

Théorème III.82 *Soit S un schéma régulier, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$. Les applications $K_i(X) \times K_j(X) \to K_{i+j}(X)$ induites par la construction de la proposition* III.*34 pour tout couple (i,j) d'entiers naturels coïncident avec la construction de Waldhausen.*

L'objet $\mathscr{W}$ étant un modèle authentique de la K-théorie algébrique, il suffit de vérifier que le théorème est vrai dans le cas $i = j = 0$, et pour cela, voir ci-dessus.

8 Anneaux des représentations des groupes GL_n

8.1 Construction du morphisme $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$

Définition III.83 *Soit k un corps, soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur k. On note $\mathrm{R}_k\, G$ le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des représentations algébriques de G de dimension finie (cf. [67, §1]). On note $\mathbf{B}G$ le classifiant simplicial du faisceau de groupes représenté par G sur Sm/k ; ce $\mathbf{B}G$ définit donc un objet de $\mathscr{H}_\bullet(k)$. Comme on pourrait le faire pour tout objet de $\mathscr{H}(k)$, on pose*

$$K_0(\mathbf{B}G) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \ ;$$

la structure de λ-Anneau spécial sur $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ (cf. proposition III.36) fait de $K_0(\mathbf{B}G)$ un λ-Anneau spécial.

Proposition III.84 *Soit k un corps, soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur k. Il existe un morphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G) \ .$$

Il s'agit de surcroît d'un morphisme de λ-anneaux.

Définissons ce morphisme sur les générateurs de $\mathrm{R}_k\, G$. Soit donc V un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de k-schémas en groupes. On choisit une base de V pour représenter V sous la forme d'un morphisme $\tilde{\rho}\colon G \to \mathrm{GL}_n$ où $n = \dim_k V$. En appliquant le foncteur $\mathbf{B}$, on obtient un morphisme $\mathbf{B}G \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n$; en composant avec l'inclusion $\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n \to \{n\} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty \to \mathbb{Z} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ et en utilisant l'isomorphisme canonique $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \cong \mathbb{Z} \times \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty$ dans $\mathscr{H}(k)$, on construit finalement un élément $[\rho] \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) = K_0(\mathbf{B}G)$. Si on choisit une autre base de V, on obtient deux morphismes $G \to \mathrm{GL}_n$ conjugués par un automorphisme intérieur de GL_n ; les morphismes $\mathbf{B}G \to \mathbf{B}\,\mathrm{GL}_n$ qui s'en déduisent sont donc égaux dans la catégorie $\mathscr{H}(k)$, ce qui montre que la classe $[\rho] \in K_0(\mathbf{B}G)$ est indépendante de la base de V choisie.

Montrons maintenant que cette correspondance passe au quotient par les relations données par les suites exactes de représentations. Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une k-représentation algébrique de G de dimension finie, soit V' un sous-espace vectoriel de V stable par G. Choisissons V'' un sous-espace vectoriel de V supplémentaire de V'. On peut représenter la représentation $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ sous forme matricielle dans la décomposition vectorielle $V = V' \oplus V''$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho' & \Psi \\ 0 & \rho'' \end{pmatrix}$$

où $\rho'\colon G \to \mathrm{GL}(V')$ et $\rho''\colon G \to \mathrm{GL}(V'')$ sont deux représentations de G. Il s'agit de montrer que $[\rho] = [\rho'] + [\rho'']$ dans $K_0(\mathbf{B}G)$. Il est clair que l'on a $[\rho'] + [\rho''] = [\rho' \oplus \rho'']$, il s'agit donc de montrer l'égalité

$$[\rho] = [\rho' \oplus \rho'']$$

dans $K_0(\mathbf{B})$.

Notons $T \subset \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(V' \oplus V'')$ le sous-schéma en groupes des « matrices triangulaires supérieures par blocs » et D le sous-schéma en groupes des « matrices diagonales par blocs ». On a une inclusion évidente $D \subset T$, ainsi qu'une rétraction $T \to D$: en effet, on a un morphisme évident $T \to \mathrm{GL}(V') \times \mathrm{GL}(V/V')$, ce dernier groupe étant identifié à D du fait de l'isomorphisme vectoriel $V'' \xrightarrow{\sim} V/V'$.

Lemme III.85 *L'inclusion $\mathbf{B}D \to \mathbf{B}T$ et sa rétraction $\mathbf{B}T \to \mathbf{B}D$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre dans $\mathscr{H}_\bullet(k)$.*

D'après [57, proposition 2.14, page 74], il suffit de montrer que pour tout entier naturel n, le morphisme $(\mathbf{B}D)_n \to (\mathbf{B}T)_n$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, ce qui résulte aussitôt du fait qu'« ensemblistement », T est le produit de D et d'un espace affine.

Les deux représentations ρ et $\rho' \oplus \rho''$ peuvent s'interpréter comme des morphismes de groupes $G \to T$; ces deux morphismes deviennent égaux après composition avec $T \to D$. Comme $\mathbf{B}T \to \mathbf{B}D$ est une $\mathbb{A}^1$-équivalence faible en vertu du lemme précédent, il vient que les morphismes $\mathbf{B}G \to \mathbf{B}T$ dans $\mathscr{H}(k)$ définis par les réprésentations ρ et $\rho' \oplus \rho''$ sont égaux ; on a ainsi montré l'égalité $[\rho] = [\rho'] + [\rho'']$, ce qui achève la construction du morphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)\,.$$

Pour conclure, il reste le lemme suivant auquel il ne conviendrait pas de me soustraire :

Lemme III.86 *Le morphisme de groupes abéliens $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$ est un morphisme de λ-anneaux.*

Il s'agit de montrer une compatibilité entre le produit tensoriel et les puissances extérieures de représentations et les structures définies sur $K_0(\mathbf{B}G)$ à partir des mêmes opérations sur les fibrés vectoriels sur les schémas sur Sm/k. Laissons de côté la structure multiplicative, la démonstration est du même type que pour les puissances extérieures (voir aussi la fin de la démonstration du théorème III.73).

Montrons que ce morphisme est compatible avec les structures de λ-anneaux sur ces groupes. Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d$ une représentation algébrique de dimension d de G, on veut montrer $\lambda^i[\rho] = [\wedge^i \rho]$ dans $K_0(\mathbf{B}G)$. Compte tenu de la définition du morphisme $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$, on peut supposer évidemment supposer que $G = \mathrm{GL}_d$ et que ρ est la représentation $\mathrm{id}_{\mathrm{GL}_d}\colon \mathrm{GL}_d \to \mathrm{GL}_d$. Notons $\Lambda^i\colon \mathrm{GL}_d \to \mathrm{GL}_n$ la i-ème puissance extérieure de la représentation $\mathrm{id}_{\mathrm{GL}_d}\colon \mathrm{GL}_d \to \mathrm{GL}_d$. On veut montrer l'égalité entre les deux éléments $[\Lambda^i]$ et $\lambda^i[\mathrm{id}_{\mathrm{GL}_d}]$ dans $K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_d)$ (noter que ceci a un sens au-dessus d'un schéma régulier S quelconque).

D'après les résultats sur la K-théorie algébrique rappelés dans la démonstration du théorème III.29, voir notamment le corollaire II.27, on a un isomorphisme

$$K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_d) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathrm{Gr}_{d,\infty}) \xrightarrow{\sim} \lim_{r\in\mathbb{N}} K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})\,.$$

En considérant les fibrés vectoriels « universels » sur les grassmanniennes et en utilisant l'assertion III.4, on voit qu'il suffit de montrer que si $\mathscr{M}$ est un fibré vectoriel de rang d sur un schéma X, alors la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel $\wedge^i \mathscr{M}$ sur X (i-ème puissance extérieure de $\mathscr{M}$) est l'image de la classe de $\mathscr{M}$ par l'application

$$H^1(X; \mathrm{GL}_d) \to H^1(X; \mathrm{GL}_n)$$

induite par $\Lambda^i\colon \mathrm{GL}_d \to \mathrm{GL}_n$ *via* l'identification entre GL_N-torseurs et fibrés vectoriels de rang N. Ce dernier point est une pure formalité.

Proposition III.87 *Soit k un corps, soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur k. L'anneau $K_0(\mathbf{B}G)$ est naturellement augmenté par une application rang $K_0(\mathbf{B}G) \to \mathbb{Z}$.*

On a une décomposition

$$K_0(\mathbf{B}G) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z}) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathrm{Gr})\ .$$

On dispose donc tautologiquement d'une augmentation de $K_0(\mathbf{B}G)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z})$. Le lemme suivant montre que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbf{B}G, \mathbb{Z})$ s'identifie à $\mathbb{Z}$, ce qui permet de conclure.

Lemme III.88 *Soit S un schéma régulier connexe, soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau simplicial sur Sm/S tel que le morphisme de faisceaux $\pi_0\mathscr{F} \to \bullet$ soit un isomorphisme*[8]. *Alors, pour tout ensemble A, l'application évidente*

$$A \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathscr{F}, A)$$

est bijective (dans le membre de droite, on considère A comme faisceau constant).

La démonstration consiste d'abord à observer que le faisceau constant de valeur A est acyclique pour la topologie de Nisnevich (cf. définition I.100), ce qui permet de vérifier qu'il est $\mathbb{A}^1$-local. On se ramène ainsi à considérer les morphismes dans $\mathscr{H}_{\mathrm{s}}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$. On laisse la suite de la démonstration en exercice au lecteur (utiliser que si $\mathscr{G}$ est un faisceau simplicial, alors un morphisme de faisceaux simpliciaux $\mathscr{G} \to A$ correspond à un morphisme de faisceaux d'ensembles $\pi_0\mathscr{G} \to A$).

L'anneau $\mathrm{R}_k\, G$ est donc $\mathbb{Z}$-augmenté et le morphisme d'anneaux $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$ est compatible aux augmentations.

Question III.89 *Soit k un corps, soit G un groupe algébrique linéaire lisse sur k. Quand est-il vrai que le morphisme $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$ défini à la proposition* III.*84 identifie $K_0(\mathbf{B}G)$ au complété de $\mathrm{R}_k\, G$ par rapport à son idéal d'augmentation ?*

Cette question est à rapprocher d'un théorème de M. Atiyah (cf. [3, theorem 7.2]) qui y répond positivement si $k = \mathbb{C}$ et que l'on remplace la K-théorie algébrique par la K-théorie topologique (complexe). Telle quelle, la réponse à cette question est « oui » si G est un groupe fini (vu comme schéma en groupes) et k un corps fini (cf. [64]).

En général, je ne connais pas la réponse à cette question, ni à la variante consistant à remplacer $\mathbf{B}G$ par le classifiant géométrique (ou étale) de [57, page 135].

Dans la sous-section suivante, nous allons étudier cette question dans le cas des groupes GL_r.

[8] Le faisceau $\pi_0\mathscr{F}$ est le faisceau (Nisnevich) associé au préfaisceau qui à $X \in \mathrm{Sm}/S$ associe l'ensemble $\pi_0(\mathscr{F}(X))$ des composantes connexes de l'ensemble simplicial $\mathscr{F}(X)$.

8.2 Anneau des représentations de GL_r

Théorème III.90 *Soit k un corps, soit r un entier naturel, soit $G = \mathrm{GL}_r$. Le morphisme $\mathrm{R}_k\, G \to K_0(\mathbf{B}G)$ identifie $K_0(\mathbf{B}G)$ au complété de $\mathrm{R}_k\, G$ par rapport à son idéal d'augmentation.*

Nous allons démontrer ce théorème en utilisant une idée que m'a suggérée C. Soulé : commencer par étudier le cas du groupe $G = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r$ pour $r \in \mathbb{N}$.

Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons X_i l'élément de $\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r$ correspondant à la représentation de dimension 1 associé à la i-ème projection $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathrm{GL}_1$. Il est bien connu que l'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r = \mathbb{Z}\left[X_1, \ldots, X_r, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}\right]$$

(cf. [67, proposition 7, §3.4]). On a par ailleurs un isomorphisme canonique

$$(\mathbb{P}^\infty)^r \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r$$

dans $\mathscr{H}_\bullet(k)$ (cf. [57, proposition 3.7, page 138]). Les résultats classiques sur la K-théorie algébrique des produits d'espaces projectifs (déjà utilisés plusieurs fois ici) impliquent que l'on a un isomorphisme canonique

$$K_0(\mathbf{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r) = \mathbb{Z}\left[[U_1, \ldots, U_r]\right]$$

où U_i est l'image inverse par la i-ème projection $(\mathbb{P}^\infty)^r \to \mathbb{P}^\infty$ du système formés par les éléments $[\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^n)$ pour tout entier naturel n.

La flèche $\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r \to K_0(\mathbf{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r)$ que l'on doit étudier n'est donc que le morphisme

$$\mathbb{Z}\left[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_r^{-1}\right] \to \mathbb{Z}\left[[U_1, \ldots, U_r]\right]$$

envoyant X_i sur $1 + U_i$.

On peut changer de générateurs de l'anneau $\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r$: remplacer X_i par $1+U_i$, on a ainsi un isomorphisme

$$\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r = \mathbb{Z}\left[U_1, \ldots, U_r\right]_{(1+U_1)\ldots(1+U_r)},$$

et le morphisme d'anneaux $\mathrm{R}_k\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r \to K_0(\mathbf{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r)$ est bien celui qui envoie U_i sur U_i. On voit ainsi que la conclusion du théorème est évidemment vérifiée pour $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r$, la seule petite subtilité résidant dans l'inversion de l'élément $(1+U_1)\ldots(1+U_n)$: le lemme suivant montre que c'est sans danger :

Lemme III.91 *Soit A un anneau commutatif, soit I un idéal de A, soit f un élément de A qui devient inversible dans A/I. Alors, pour tout entier naturel n, la flèche évidente*

$$A/I^n \to A_f/(A_f \cdot I)^n$$

est un isomorphisme (où A_f est le localisé $A\left[1/f\right]$). Par conséquent, le complété de A par rapport à l'idéal I s'identifie au complété de A_f par rapport à l'idéal engendré par l'image de I dans A_f.

L'élément f devient inversible dans A/I, il est classique qu'alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f devient inversible dans A/I^n [9]. Ainsi, A/I^n possède une (unique) structure de A_f-module, on a ainsi $A/I^n = (A/I^n) \otimes_A A_f = A_f/(A_f \cdot I)^n$.

Revenons à GL_r. Notons $i\colon \mathbb{G}_\mathrm{m}^r \to \mathrm{GL}_r$ l'inclusion diagonale. D'après [67, théorème 4, §3.6], le morphisme $i^\star\colon\ \mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r \to \mathrm{R}_k\,\mathbb{G}_\mathrm{m}^r$ est injectif et identifie $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$ au sous-groupe de $\mathrm{R}_k\,\mathbb{G}_\mathrm{m}^r$ formé des points fixes sous l'action du groupe symétrique Σ_r agissant par permutation des facteurs du produit $\mathbb{G}_\mathrm{m}^r$.

On définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathbb{Z}\,[U_1, \dots, U_r]$ des éléments $U_1, \dots, U_r$ par la formule

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + U_iT) = 1 + \sigma_1 T + \sigma_2 T^2 + \cdots + \sigma_n T^r\ .$$

Par convention, on peut poser $\sigma_k = 0$ si $k > r$ (et σ_0=1).

Les éléments $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ de $\mathrm{R}_k\,\mathbb{G}_\mathrm{m}^r = \mathbb{Z}\,[U_1, \dots, U_r]_{(1+U_1)\dots(1+U_r)}$ sont fixes sous l'action du groupe symétrique Σ_r, ils définissent donc des éléments de $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$. Il résulte alors du théorème fondamental des polynômes symétriques que $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$ s'identifie à l'anneau obtenu à partir de l'algèbre de polynômes $\mathbb{Z}\,[\sigma_1, \dots, \sigma_r]$ en inversant formellement l'élément $1 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$.

On a vu au cours de la démonstration du lemme III.86, que l'on avait un isomorphisme

$$K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r) = K_0(\mathrm{Gr}_{r,\infty}) = \lim_{k\in\mathbb{N}} K_0(\mathrm{Gr}_{r,k})\ .$$

D'après SGA 6 VI 4.10 (cf. théorème II.28), cet anneau est l'algèbre de séries formelles sur $\mathbb{Z}$ en les indéterminées $c_1, \dots, c_r$ où c_i correspond au système comptatible de classes $c_i = \gamma_i(u_{r,\bullet}) = \lambda^i(u_{r,\bullet} + i - 1) \in K_0(\mathrm{Gr}_{r,\bullet})$, l'élément $c_1 = u_{r,\infty}$ correspond à $\sigma_1 = U_1 + \cdots + U_r$. Bref, pour finir de démontrer le théorème pour GL_r, il suffit de montrer que l'image de $\sigma_i \in \mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$ dans $K_0(\mathrm{Gr}_{d,\infty})$ est cet élément c_i, pour $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r \to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ est un morphisme de λ-anneaux (cf. proposition III.84), il suffit de vérifier que pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on a l'égalité $\gamma^i(\sigma_1) = \sigma_i$ dans $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$, ce qu'affirme le lemme suivant.

Lemme III.92 *Dans* $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$*, on a* $\gamma^i(\sigma_1) = \sigma_i$ *pour* $i \in \{1, \dots, r\}$*.*

Il suffit de montrer cette égalité dans $\mathrm{R}_k\,\mathbb{G}_\mathrm{m}^r$. On peut alors utiliser les générateurs $U_1, \dots, U_r$. On a $\sigma_1 = U_1 + \cdots + U_r$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a l'égalité suivante de séries formelles en t à coefficients dans $\mathrm{R}_k\,\mathbb{G}_\mathrm{m}^r$:

$$\lambda_t(U_i) = \frac{1 + (1 + U_i)t}{1 + t}\ .$$

On a utilisé que $U_i = X_i - 1$ et le fait que X_i est la classe d'une représentation de dimension 1. Il en résulte la formule suivante :

$$\lambda_t(\sigma_1) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1 + (1 + U_i)t}{1 + t}\ .$$

[9]On peut le montrer explicitement en se ramenant au cas $n = 2$. On peut aussi dire qu'un élément d'un anneau commutatif est inversible si et seulement s'il n'appartient à aucun idéal maximal et utiliser qu'un idéal maximal de A contenant I^n contient automatiquement I.

D'après la formule de changement de variable rappelée après la définition II.20, on a

$$\begin{aligned}\gamma_t(\sigma_1) &= \lambda_{t/(1-t)(\sigma_1)}\\ &= \prod_{i=1}^{r}\frac{1+(1+U_i)\frac{t}{1-t}}{1+\frac{t}{1-t}}\\ &= \prod_{i=1}^{r}(1+U_i t)\\ &= 1+\sigma_1 t+\sigma_2 t^2\cdots+\sigma_r t^r\ .\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\gamma^i(\sigma_1)=\sigma_i$ pour $i\in\{1,\dots,r\}$.

On a bien établi le théorème. On peut noter qu'il est vrai que $K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ s'identifie aussi au sous-anneau de $K_0(\mathbf{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^r)$ formé des points fixes sous l'action du groupe symétrique Σ_r.

8.3 L'anneau $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}$

Dans [67], J.-P. Serre donne un sens au groupe de Grothendieck $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r$ et montre que le morphisme d'extension des scalaires $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r\to\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$ est bijectif pour tout corps k (cf. [*ibid.*, proposition 4, §2.3] et [*ibid.*, théorème 5, §3.7]).

Je choisis ici de prendre une autre « définition » de $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_d$, qui est cohérente avec l'autre en vertu de [*ibid.*, §3.8] et de SGA 6 V 4 :

Définition III.93 *Pour tout entier naturel r, je note $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r$ le λ-anneau spécial universel en un générateur id_r soumis aux conditions :*
- $\lambda^r(\mathrm{id}_r)$ *inversible ;*
- $\lambda^k(\mathrm{id}_r)=0$ *pour $k>r$.*

En particulier, on a un morphisme $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r\to\mathbb{Z}$ de λ-anneaux spéciaux envoyant id_r sur r.

Ainsi, tout λ-anneau spécial muni d'un élément privilégié donné sous la forme d'une classe de représentation ou de fibré vectoriel de rang r reçoit naturellement le λ-anneau $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_d$.

On a ainsi, pour tout schéma de base régulier S, un morphisme évident de λ-anneaux :

$$\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r\to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\ .$$

Dans le cas où k est un corps et $S=\operatorname{Spec}k$, il ne peut évidemment s'agir que du morphisme défini à la proposition III.84 et étudié plus en détail avec le théorème III.90.

Définition III.94 *On note $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}$ la limite projective du système de λ-anneaux spéciaux $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r$ pour $r\in\mathbb{N}$, le morphisme de transition $\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_{r+1}\to\mathrm{R}_\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_r$ envoyant id_{r+1} sur id_r+1 (avec la définition de [67], c'est le morphisme induit par la restriction des représentations de GL_{r+1} à GL_r via l'inclusion classique).*

On peut définir des éléments $\sigma_i \in \mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL}$ pour $i \in \mathbb{N}$ par la formule

$$\sigma_i = \gamma^i(\sigma_1)$$

où σ_1 est la famille compatible formée par les éléments $\mathrm{id}_r - r \in \mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL}_r$ pour tout entier naturel r. Cette définition est cohérente avec celle entreprise lors de la démonstration du théorème III.90

En passant à la limite projective les morphismes $\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL}_r \to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, on obtient un morphisme de λ-anneaux

$$\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) = K_0(S)\,[[c_1, \dots]]$$

pour tout schéma régulier S (cf. théorème III.29).

Proposition III.95 *Soit S un schéma régulier non vide. La flèche*

$$\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est injective, mais pas surjective.

Ceci ne dépend pas vraiment du schéma S, seulement de la « valeur de $K_0(S)$ ». On voit aussitôt que l'on peut se ramener au cas où $S = \mathrm{Spec}\, k$ et k est un corps. L'injectivité résulte alors du fait que tous les morphismes $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r \to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ sont injectifs (cf. démonstration du théorème III.90). Comme les morphismes $K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_\infty) \to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ sont surjectifs, la surjectivité du morphisme étudié dans cette proposition entraînerait que pour tout entier naturel r, le morphisme $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r \to K_0(\mathbf{B}\,\mathrm{GL}_r)$ serait surjectif, ce qu'il ne saurait être pour $r \geq 1$, l'anneau $\mathrm{R}_k\,\mathrm{GL}_r$ n'étant alors pas complet par rapport à son idéal d'augmentation.

Théorème III.96 *Soit S un schéma régulier. On a une application canonique*

$$(\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL})^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})\ .$$

Les opérations sur la K-théorie algébrique des schémas réguliers obtenues via *ce morphisme coïncident en un sens évident avec celles définies par C. Soulé dans [70].*

L'application voulue est simplement déduite de l'application canonique précédemment obtenue :

$$\mathrm{R}_{\mathbb{Z}}\,\mathrm{GL} \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathrm{Gr}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})\ .$$

Le fait que cette construction soit compatible avec celle de Soulé se démontre de manière similaire à la manière dont on a établi le théorème III.73.

9 Variantes à coefficients dans un sous-anneau de $\mathbb{Q}$

À partir de l'objet $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$, on va définir explicitement un objet calculant la K-théorie algébrique à coefficients dans des sous-anneaux de $\mathbb{Q}$ et énoncer des variantes du théorème III.29. On s'en servira dans la section 10 puisqu'il sera alors nécessaire d'inverser 2.

Définition III.97 *Soit a un entier naturel. Pour tout entier naturel n, on définit un morphisme $\delta_{a,n}\colon (\mathbb{A}^n)^a \to \mathbb{A}^{an}$ envoyant $(s_1^1,\dots,s_n^1),(s_1^2,\dots,s_n^2),\dots,(s_1^a,\dots,s_n^a)$ sur $(s_1^1,\dots,s_1^a,s_2^1,\dots,s_2^a,\dots,s_n^1,\dots,s_n^a)$. Pour tout couple (d,r) d'entiers naturels, on définit un morphisme de schémas $m_{a,d,r}\colon \mathrm{Gr}_{d,r}\to\mathrm{Gr}_{ad,ar}$ de sorte que pour tout schéma X, l'application $\mathrm{Gr}_{d,r}(X)\to\mathrm{Gr}_{ad,ar}(X)$ induite par $m_{a,d,r}$ envoie un sous-$\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{M}$ de $\mathscr{O}_X^{d+r}$ localement facteur direct de rang d sur $\delta_{a,d+r}(\mathscr{M}^{\oplus a})$.*

On vérifie aussitôt que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}_{d,r} \arrow[r, "m_{a,d,r}"] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_{ad,ar} \arrow[d] \\
\mathrm{Gr}_{d,r+1} \arrow[r, "m_{a,d,r+1}"] & \mathrm{Gr}_{ad,ar+a}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}_{d,r} \arrow[r, "m_{a,d,r}"] \arrow[d] & \mathrm{Gr}_{ad,ar} \arrow[d] \\
\mathrm{Gr}_{1+d,r} \arrow[r, "m_{a,1+d,r}"] & \mathrm{Gr}_{a+ad,ar}
\end{tikzcd}$$

(les flèches verticales sont induites par les flèches du système inductif $(\mathrm{Gr}_{d,r})_{(d,r)\in\mathbb{N}^2}$, cf. définition II.25).

On peut donc procéder à la définition suivante :

Définition III.98 *Pour tout entier naturel a, on note $m_a\colon \mathrm{Gr}\to\mathrm{Gr}$ le morphisme de faisceaux induit par les morphismes $m_{a,d,r}$ pour tout $(d,r)\in\mathbb{N}^2$. On note encore $m_a\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ le morphisme de faisceaux donné par la multiplication par a sur le facteur $\mathbb{Z}$ et par $m_a\colon\mathrm{Gr}\to\mathrm{Gr}$ sur le facteur Gr.*

Lemme III.99 *Soit a et b deux entiers naturels. Les deux endomorphismes $m_a\circ m_b$ et m_{ab} du faisceau $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ sont égaux.*

C'est évident.

Définition III.100 *Pour tout entier naturel non nul x, on pose $\frac{1}{x}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})=\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$. Si x et y sont deux entiers naturels non nuls tels que x divise y, on définit un morphisme $\frac{1}{x}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\to\frac{1}{y}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ correspondant à $m_{\frac{y}{x}}\colon\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$.*

Il résulte du lemme III.99 que l'on obtient ainsi un système inductif $(\frac{1}{x}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}))_{x\in\mathbb{N}-\{0\}}$ indexé par $\mathbb{N}-\{0\}$ ordonné par la relation de divisibilité.

Définition III.101 *Pour tout nombre surnaturel x (cf. [69, §1.3, Chapitre I]), on note $\frac{1}{x}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ la limite inductive du sous-système $(\frac{1}{y}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}))_{y\in\mathbb{N}-\{0\},y|x}$. Si n est un nombre entier non nul (ou plus généralement un nombre surnaturel), on note $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]=\frac{1}{n^\infty}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$.*

Le théorème III.29 se généralise sous la forme suivante :

Théorème III.102 *Soit S un schéma régulier. Soit n un nombre surnaturel. Soit i un entier naturel. On note $K_i(-)\left[\frac{1}{n}\right]$ le préfaisceau d'ensembles qui à $X\in\mathrm{Sm}/S$ associe $K_i(X)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. L'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr},\mathrm{R}\Omega^i\left((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\tfrac{1}{n}\right]\right))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-),K_i(-)\left[\tfrac{1}{n}\right])$$

est bijective. Ce groupe abélien s'identifie également à

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_i(\mathrm{Gr}_{d,r})\left[\tfrac{1}{n}\right] = \prod_{n\in\mathbb{Z}} K_i(S)\left[\tfrac{1}{n}\right][[c_1,\dots,c_n,\dots]] \ .$$

Remarquons que $\varphi\left(\mathrm{R}\Omega^i\left((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]\right)\right) = K_i(-)\left[\frac{1}{n}\right]$. Cela résulte simplement du fait que pour tout entier a, l'application $m_a\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ induise la multiplication par a sur les groupes de K-théorie algébrique ; d'après le théorème III.29, il suffit de le tester sur les classes des fibrés universels sur les grassmanniennes : c'est le cas par définition des morphismes $m_{a,d,r}$ pour $(d,r)\in\mathbb{N}^2$. La démonstration de ce théorème III.102 est ensuite quasiment identique à celle du théorème III.29. Il y a simplement la subtilité que pour pouvoir appliquer le théorème III.27, il faudrait savoir que $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ possède une structure de H-groupe ; il y a plusieurs manières de montrer qu'il s'agit d'un espace de lacets : c'est en fait le 0-ième terme d'un $\mathbb{P}^1$-spectre comme cela résultera des constructions du chapitre IV et de la sous-section 2.2 de l'annexe A.

On laisse en exercice au lecteur de formuler les variantes « à plusieurs variables ».

Théorème III.103 *Soit S un schéma régulier. Soit n un nombre surnaturel. Soit i un entier naturel. L'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\tfrac{1}{n}\right], \mathrm{R}\Omega^i\left((\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\tfrac{1}{n}\right]\right)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)\left[\tfrac{1}{n}\right], K_i(-)\left[\tfrac{1}{n}\right])$$

est bijective.

On a défini $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ comme faisceau d'ensembles sur Sm/S. Comme $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ satisfait la propriété (ii), cet objet $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ la satisfait aussi par passage à la colimite filtrante. On montre facilement que $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ peut s'écrire comme une certaine limite inductive filtrante indexée par $\mathbb{N}$ (d'unions disjointes) de grassmanniennes finies. Il s'agit donc de montrer que les espaces de lacets itérés de $(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ satisfont la propriété (K) relative à ce système inductif dans Sm/S. Compte tenu de ce qui a déjà été établi dans la démonstration du théorème III.29, il n'y a plus qu'à montrer que pour tout entier naturel a divisant n, l'application

$$K_0(\mathrm{Gr}_{ad,ar})\left[\tfrac{1}{n}\right] \to K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})\left[\tfrac{1}{n}\right]$$

induite par $m_{a,d,r}\colon \mathrm{Gr}_{d,r}\to\mathrm{Gr}_{ad,ar}$ est surjective : l'image de $u_{ad,ar}$ est $au_{d,r}$, le fait que $K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})\left[\frac{1}{n}\right]$ soit engendré en tant que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-$\lambda$-algèbre (spéciale) par $u_{d,r}$ (cf. théorème II.26) permet de conclure.

10 Applications aux catégories virtuelles

Dans [17], Pierre Deligne introduit la catégorie virtuelle d'une catégorie exacte $\mathscr{E}$: il s'agit du groupoïde fondamental de l'espace des lacets de l'ensemble simplicial $\mathbf{B}Q\mathscr{E}$. On montre ici comment les résultats précédents permettent d'associer à des opérations sur $K_0(-)\left[\frac{1}{n}\right]$ des foncteurs au niveau des catégories virtuelles des schémas réguliers, ces foncteurs étant bien définis à isomorphismes *uniques* près pourvu que l'on inverse 2.

Définition III.104 *Soit S un schéma régulier. Soit n un nombre surnaturel. On fixe un remplacement $\mathbb{A}^1$-fibrant $\mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ de $(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})\left[\frac{1}{n}\right]$ dans $\mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$. Pour tout $X\in \mathrm{Sm}/S$, on note $\mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)$ le groupoïde fondamental de l'ensemble simplicial $\mathscr{K}_{\frac{1}{n}}(X)$.*

On a ainsi défini un préfaisceau $\mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(-)$ de groupoïdes sur la catégorie Sm/S.

Théorème III.105 *Soit S un schéma régulier. Soit n un nombre surnaturel. Pour toute transformation naturelle $\tau\colon K_0(-)\left[\frac{1}{n}\right]\to K_0(-)\left[\frac{1}{n}\right]$ de préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie Sm/S, il existe une famille de foncteurs $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)\to \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)$ (strictement) fonctoriels en $X\in \mathrm{Sm}/S$ et induisant τ au niveau des composantes connexes de ces groupoïdes. La famille $(\phi_X)_{X\in \mathrm{Sm}/S}$ dépend* a priori *du choix d'un morphisme $\phi\colon \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ induisant τ. Si $\phi'\colon \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ est un autre morphisme induisant τ, il existe un isomorphisme de foncteurs $\phi_X\xrightarrow{\sim}\phi'_X$ fonctoriel en X. De plus, si on suppose que $K_1(S)\left[\frac{1}{n}\right]$ est nul, l'isomorphisme de foncteurs $\phi_X\xrightarrow{\sim}\phi'_X$ fonctoriel en X est* canoniquement *défini.*

Soit $\tau\colon K_0(-)\left[\frac{1}{n}\right]\to K_0(-)\left[\frac{1}{n}\right]$ une transformation naturelle de foncteurs $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\to$ **Ens**. Le théorème III.103 fait correspondre à τ une classe d'homotopie de morphismes $\mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ dans $\mathbf{Esp}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$. Soit $\phi\colon \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ un représentant de cette classe d'homotopie. Pour tout $X\in \mathrm{Sm}/S$, ϕ induit un morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathscr{K}_{\frac{1}{n}}(X)\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}(X)$; en passant au groupoïde fondamental, on obtient un foncteur $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)\to \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)$ fonctoriel en X. Donnons nous un autre morphisme $\phi'\colon \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ dans la classe d'homotopie de ϕ. Il existe donc une homotopie $h\colon \Delta^1\times \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ dans $\mathbf{Esp}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$ entre ϕ et ϕ' ; je la considère comme un chemin de ϕ vers ϕ' dans l'ensemble simplicial $\mathrm{hom}(\mathscr{K}_{\frac{1}{n}},\mathscr{K}_{\frac{1}{n}})$. On voit que h définit, pour tout $X\in \mathrm{Sm}/S$, un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{iso}_{h,X}\colon \phi_X\xrightarrow{\sim}\phi'_X$.

Soit $h'\colon \Delta^1\times \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}\to \mathscr{K}_{\frac{1}{n}}$ un autre chemin de ϕ vers ϕ', il induit aussi un isomorphisme de foncteurs $\mathbf{iso}_{h',X}\colon \phi_X\xrightarrow{\sim}\phi'_X$ fonctoriel en $X\in \mathrm{Sm}/S$. Il est essentiellement sorital que s'il existe une homotopie de chemins d'extrémités ϕ et ϕ' de h vers h' dans $\mathrm{hom}(\mathscr{K}_{\frac{1}{n}},\mathscr{K}_{\frac{1}{n}})$, alors $\mathbf{iso}_{h,X}=\mathbf{iso}_{h',X}$.

Bref, pour obtenir que $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)\to \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)$ (pour X parcourant Sm/S) ne dépende à isomorphisme unique près que de τ, il suffirait de savoir que le groupe fondamental de $\mathrm{hom}(\mathscr{K}_{\frac{1}{n}},\mathscr{K}_{\frac{1}{n}})$ est trivial (comme $\mathrm{hom}(\mathscr{K}_{\frac{1}{n}},\mathscr{K}_{\frac{1}{n}})$ est un H-groupe, il n'est pas nécessaire de préciser le point-base). Ce groupe fondamental s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(\mathscr{K}_{\frac{1}{n}},\Omega\mathscr{K}_{\frac{1}{n}})$; d'après les théorèmes III.102 et III.103, l'annulation de ce groupe fondamental résulte de l'annulation de $K_1(S)\left[\frac{1}{n}\right]$. Le théorème est établi.

On pourrait montrer de façon élémentaire la dernière assertion d'unicité en utilisant le lemme suivant, qui est trivial :

Lemme III.106 *Soit S un schéma régulier. Soit n un nombre surnaturel. Soit une famille de foncteurs $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)\to \mathscr{V}_{\frac{1}{n}}(X)$, fonctorielle en $X\in \mathrm{Sm}/S$. Il existe alors une bijection canonique :*

$$\mathrm{Aut}((\phi_X)_{X\in \mathrm{Sm}/S})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)\left[\tfrac{1}{n}\right],K_1(-)\left[\tfrac{1}{n}\right])\ .$$

Comme $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, le théorème III.105 admet le cas particulier suivant :

Théorème III.107 *Pour toute transformation naturelle* $\tau\colon K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right] \to K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right]$ *de préfaisceaux d'ensembles sur* $\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}$*, il existe une famille de foncteurs* $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X) \to \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X)$ *(strictement) fonctoriels en* $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Z}$ *et induisant* τ *au niveau des composantes connexes de ces groupoïdes. La famille* $(\phi_X)_{X\in \mathrm{Sm}/\mathbb{Z}}$ *est bien définie à des isomorphismes canoniques près.*

Il est possible de remplacer dans ce théorème la catégorie $\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}$ par des catégories (essentiellement) petites de schémas réguliers :

Théorème III.108 *Soit* t *une taille (cf. définition* I.*26) sur la catégorie* $\mathscr{R}$ *des schémas réguliers telle que pour tout morphisme lisse* $f\colon X \to S$ *entre schémas réguliers,* $t(X) \leq t(S)$*. Soit un cardinal* $\kappa \geq t(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$*. On note* $\mathscr{R}_{\leq\kappa}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathscr{R}$ *formée des schémas réguliers de taille* $\leq \kappa$*. Pour toute transformation naturelle* $\tau\colon K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right] \to K_0(-)\left[\frac{1}{2}\right]$ *de préfaisceaux d'ensembles sur la catégorie* $\mathscr{R}_{\leq\kappa}$*, il existe une famille de foncteurs* $\phi_X\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X) \to \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X)$ *(strictement) fonctoriels en* $X \in \mathscr{R}_{\leq\kappa}$ *et induisant* τ *au niveau des composantes connexes de ces groupoïdes. La famille* $(\phi_X)_{X\in\mathscr{R}_{\leq\kappa}}$ *est bien définie à des isomorphismes canoniques près.*

Il s'agit de remplacer $\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}$ par $\mathscr{R}_{\leq\kappa_{\mathrm{Nis}}}$ dans toutes les constructions précédentes. Cela ne pose pas de difficulté.

Évidemment, du fait des assertions d'unicité, si on applique ce théorème avec un cardinal κ' plus grand que κ, les constructions obtenues sur $\mathscr{R}_{\leq\kappa'}$ coïncideront avec celles sur $\mathscr{R}_{\leq\kappa}$ à des isomorphismes canoniques près.

Remarque III.109 *On en déduit par exemple que l'on peut définir pour tout entier relatif* k *et pour tout schéma régulier* X*, des foncteurs « opérations d'Adams »*

$$\Psi^k\colon \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X) \to \mathscr{V}_{\frac{1}{2}}(X)$$

bien définis à des isomorphismes canoniques près de sorte que l'on dispose d'isomorphismes canoniques $\Psi^k \circ \Psi^{k'} \xrightarrow{\sim} \Psi^{kk'}$ *pour tout couple* (k, k') *d'entiers relatifs.*

Chapitre IV

Les opérations stables sur la K-théorie algébrique

Ce chapitre a pour but de faire passer certains résultats du chapitre III de la catégorie homotopique instable $\mathscr{H}(S)$ à la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(S)$. La section 1 comporte une « extension » tautologique des résultats à une version simplifiée $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ de la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(S)$. La définition de $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ est vraiment très simple (cf. définition I.124). On construit donc en particulier un objet $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ qui « représente » la K-théorie algébrique dans cette catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$. La section 2 est un intermède : on y étudie les opérations additives sur la K-théorie algébrique (par opposition aux opérations « ensemblistes » étudiées au chapitre III) ; grâce au principe de scindage, elles correspondent tout simplement à des éléments du groupe abélien de séries formelles $K_0(S)[[U]]$ (l'opération d'Adams Ψ^k correspondant à $(1+U)^k)$; la composition des opérations additives donne naissance à une structure d'anneau surprenante sur le groupe abélien $K_0(S)[[U]]$. Cette section introduit aussi le système projectif A^Ω associé à un groupe abélien A (cf. définition IV.36) : la limite projective de ces systèmes donne les endomorphismes de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$. La section 3 précise ces résultats en remplaçant $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ par $\mathcal{SH}(S)$; on construit un relèvement canonique $\mathbf{BGL}$ de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}(S)$ et on étudie ses endomorphismes : en sus de ce qui se passait pour $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$, des groupes $\mathrm{R}^1 \lim A^\Omega$ entrent en scène. Le système projectif A^Ω joue ainsi un rôle fondamental ; je ne sais malheureusement calculer ni $\lim \mathbb{Z}^\Omega$ ni $\mathrm{R}^1 \lim \mathbb{Z}^\Omega$. La section 4 montre qu'avec des coefficients rationnels (cf. la section 2 de l'annexe A pour la $\mathbb{Q}$-localisation des catégories triangulée), les choses se simplifient considérablement : on obtient une décomposition canonique $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}_{Б}^{(i)}$ en espaces propres pour les opérations d'Adams dans $\mathcal{SH}(S)$.

1 L'objet $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$

Nous définirons plus loin un objet $\mathbf{BGL}$ de $\mathcal{SH}(S)$ représentant la K-théorie algébrique, pour tout schéma régulier S (cf. définition IV.46). Nous allons commencer par définir l'image $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ de cet objet dans la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S) = \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}_{\text{naïve}}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$ où le schéma $\mathbb{P}^1$ est pointé par ∞. Bien que la définition I.124 soit intervenue à la toute fin du chapitre I, il n'est absolument pas nécessaire de l'avoir lu en entier pour comprendre la définition de la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$.

1.1 Le théorème de périodicité

Définition iv.1 *Soit S un schéma régulier. On note $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \wedge (\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ le morphisme composé suivant dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$:*

$$\mathbb{P}^1 \wedge (\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{u\wedge \mathrm{id}} (\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \wedge (\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\times_\bullet} \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}$$

où $u\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ est le morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ correspondant à $u=[\mathscr{O}(1)]-1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$ et où $\times_\bullet$ est le morphisme donnant la structure multiplicative sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ (cf. page 96). On note $\sigma'\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ le morphisme adjoint de σ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$.

On retrouve [56, théorème 4.3.6] qui est l'analogue de la périodicité de Bott en K-théorie algébrique :

Proposition iv.2 *Soit S un schéma régulier. Le morphisme*

$$\sigma'\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$$

est un isomorphisme dans la catégorie $\mathscr{H}_\bullet(S)$.

La distributivité de la multiplication sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ par rapport à l'addition implique que σ' est un morphisme de H-groupes (pour les structures induites par la structure de H-groupe sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$). Pour montrer que σ' est un isomorphisme, il suffit donc de vérifier que l'on obtient des bijections après application des foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^k\wedge X_+,-)$ pour $k\in\mathbb{N}$ et $X\in \mathrm{Sm}/S$. On voit aussitôt que l'on obtient alors une application

$$K_n(X) \to \left\{y\in K_n(\mathbb{P}^1\times X), \infty^\star y = 0 \in K_n(X)\right\}.$$

D'après le théorème iii.72 faisant le lien avec les produits définis dans [62, §3], cette application est donnée par la formule $x\longmapsto u\boxtimes x$ où $u=[\mathscr{O}(1)]-1\in K_0(\mathbb{P}^1)$, c'est donc une bijection en vertu du théorème du fibré projectif pour la K-théorie algébrique de Quillen (cf. [*ibid.*, theorem 2.1, §8]).

1.2 Définition de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$

Définition iv.3 *Soit S un schéma régulier. On note $\mathbf{BGL}^{naïf}$ l'objet de $\mathcal{SH}_{naïve}(S)$ défini par $\mathbf{BGL}^{naïf}_n=\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ pour tout entier naturel n, les morphismes d'assemblages $\mathbb{P}^1\wedge\mathbf{BGL}^{naïf}_n \to \mathbf{BGL}^{naïf}_{n+1}$ étant donnés par le morphisme σ de la définition* iv.*1. La proposition* iv.*2 justifie qu'il s'agit bien d'un objet de $\mathcal{SH}_{naïve}(S)$.*

Définition iv.4 *Soit S un schéma régulier. Un modèle stable de la K-théorie algébrique sur S consiste en la donnée d'un objet $\mathscr{K}$ de $\mathcal{SH}(S)$ et d'un isomorphisme (souvent implicite) $\mathrm{oub}(\mathscr{K})\xrightarrow{\sim}\mathbf{BGL}^{naïf}$ dans $\mathcal{SH}_{naïve}(S)$, où $\mathrm{oub}\colon\mathcal{SH}(S)\to\mathcal{SH}_{naïve}(S)$ est le foncteur défini page 62.*

D'après la proposition I.126, on sait qu'il existe un tel relèvement de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}(S)$: c'est la construction que donne Voevodsky dans [76, §6.2] d'un objet représentant la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$ (au-dessus d'un schéma régulier). Comme indiqué dans [*loc. cit.*], cette construction n'est pas très jolie, mais je ne vois pas non plus comment définir plus explicitement un $\mathbb{P}^1$-spectre (ou un $\mathbb{A}^1/(\mathbb{A}^1-0)$-spectre) ayant les propriétés requises. Une des difficultés de cette « construction » réside dans le fait qu'on ne sache pas *a priori* qu'elle donne un objet $\mathscr{K}$ de $\mathcal{SH}(S)$ bien défini à isomorphisme *unique* près : d'après la proposition I.126, cela reviendrait à montrer qu'il existe pas d'application stablement fantôme non nulle $\mathscr{K} \to \mathscr{K}$ dans $\mathcal{SH}(S)$. Je reviendrai sur ce problème plus loin (cf. définition IV.46).

Proposition IV.5 *Soit $f\colon T \to S$ un morphisme entre schémas réguliers. Soit $\mathscr{S}$ un modèle stable de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$. Alors, $\mathrm{L}f^\star\mathscr{K} \in \mathcal{SH}(T)$ est canoniquement muni d'une structure de modèle stable de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(T)$.*

Ceci est essentiellement formel à partir des résultats « instables » (voir notamment la proposition III.63 et le théorème III.69). Le seul point délicat méritant d'être signalé réside dans le fait que si $\mathscr{K}$ est représenté par un Ω-spectre (ce que l'on peut évidemment supposer), alors l'image de $\mathscr{K}$ par le foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}_{\mathrm{p}}(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1) \to \mathcal{SH}^{\mathbb{P}^1}_{\mathrm{p}}(\mathrm{Sm}/T_{\mathrm{Nis}}, \mathbb{A}^1)$ est un Ω-spectre (grâce à la proposition IV.2). C'est ainsi que l'on peut vérifier que $\mathrm{oub}(\mathrm{L}f^\star\mathscr{K})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ (cf. remarque I.54).

Grâce à cette proposition, on peut adopter la stratégie suivante pour définir un modèle stable canonique $\mathbf{BGL}_S$ de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$ pour tout schéma régulier :
- montrer que si $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, alors à isomorphisme *unique* près, il existe un unique relèvement $\mathbf{BGL}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$;
- pour tout schéma régulier S, poser :

$$\mathbf{BGL}_S = \mathrm{L}a_S^\star\mathbf{BGL}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \in \mathcal{SH}(S)$$

  où $a_S\colon S \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est la projection canonique.

1.3 Morphismes de source $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$

On va donner ici une interprétation fonctorielle des morphismes de source $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ de même que l'on en disposait pour $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ (modulo les questions liées à l'annulation de groupes $\mathrm{R}^1\lim$, cf. définition III.25 et théorème III.27).

Définition IV.6 *Soit S un schéma noethérien. On note $\Omega_{\mathbb{P}^1}\colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab} \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$ le foncteur qui à un préfaisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur Sm/S associe le préfaisceau $\Omega_{\mathbb{P}^1}\mathscr{F}$ défini par*

$$(\Omega_{\mathbb{P}^1}\mathscr{F})(X) = \ker\left[\mathscr{F}(\mathbb{P}^1_X) \xrightarrow{\infty^\star} \mathscr{F}(X)\right]$$

pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$.

On rappelle que l'on a défini un foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ (cf. définition III.5). On a de même un foncteur $\varphi\colon \mathscr{H}_\bullet(S) \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$ qui à $E \in \mathscr{H}_\bullet(S)$ associe le préfaisceau d'ensembles pointés défini par $(\varphi E)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X_+, E)$ pour $X \in \mathrm{Sm}/S$. Si un objet $E \in \mathscr{H}_\bullet(S)$ est muni d'une structure de H-groupe commutatif, alors φE est naturellement un objet de $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$.

Proposition IV.7 *Soit un objet $G \in \mathscr{H}_\bullet(S)$ muni d'une structure de H-groupe commutatif. On a un isomorphisme canonique*

$$\varphi(\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, G)) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{P}^1}(\varphi G)$$

dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$.

Cette proposition est triviale. On rappelle au passage que les deux structures évidentes de H-groupe sur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, G)$ coïncident : celle provenant de la structure de H-groupe sur G et celle issue d'une structure de H-cogroupe sur $\mathbb{P}^1$ (déduite de l'isomorphisme classique $\mathbb{P}^1 \simeq S^1 \wedge \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, cf. [57, lemma 2.15, page 111] et [*ibid.*, corollary 2.18, page 112]).

Définition IV.8 *On définit une catégorie additive $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$ de la manière suivante. Un objet $\mathscr{F}^{\mathrm{s}}$ de $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$ est une suite $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$ munie d'isomorphismes d'assemblages $\mathscr{F}_n \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{P}^1}\mathscr{F}_{n+1}$ dans $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$. Un morphisme $f\colon \mathscr{F}^{\mathrm{s}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{s}}$ est une suite de morphismes $f_n\colon \mathscr{F}^{\mathrm{s}}_n \to \mathscr{G}^{\mathrm{s}}_n$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}^{\mathrm{s}}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\sim"] & \mathscr{G}^{\mathrm{s}}_n \arrow[d, "\sim"] \\
\Omega_{\mathbb{P}^1}\mathscr{F}^{\mathrm{s}}_{n+1} \arrow[r, "\Omega_{\mathbb{P}^1}(f_{n+1})"] & \Omega_{\mathbb{P}^1}\mathscr{G}^{\mathrm{s}}_{n+1}
\end{tikzcd}$$

pour tout entier naturel n.

Proposition IV.9 *Soit S un schéma noethérien. On dispose d'un foncteur additif évident*

$$\varphi^{\mathrm{s}}\colon \mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S) \to \mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)\ .$$

En effet, si $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$, on peut poser $(\varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{E})_n = \varphi\mathbf{E}_n$. Compte tenu de l'isomorphisme de la proposition IV.7, l'isomorphisme $\mathbf{E}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathbf{E}_{n+1})$ induit un isomorphisme $\varphi\mathbf{E}_n \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{P}^1}(\varphi\mathbf{E}_{n+1})$.

Définition IV.10 *Soit S un schéma régulier. On pose $K^{\mathrm{s}}_0 = \varphi^{\mathrm{s}}(\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}}) \in \mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$.*

Cet objet K^{s}_0 de $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$ est par construction tel que $(K^{\mathrm{s}}_0)_n \cong K_0(-)$ pour tout entier naturel n, les isomorphismes d'assemblages $K_0(-) \to \Omega_{\mathbb{P}^1} K_0(-)$ étant induits par $x \longmapsto u \boxtimes x$ où $u = [\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$.

Théorème IV.11 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathbf{E}$ un objet de $\mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)$. On suppose que pour tout entier naturel n, les objets $\mathbf{E}_n$ vérifient la propriété (K). Alors, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}}, \mathbf{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K^{\mathrm{s}}_0, \varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{E})$$

induite par le foncteur $\varphi^{\mathrm{s}}\colon \mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S) \to \mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$ est bijective.

Pour tout entier naturel n, $\mathbf{E}_n$ est canoniquement muni d'une structure de H-groupe commutatif (cf. proposition I.125) ; en vertu du théorème III.27, on peut déduire de l'hypothèse que l'on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}, \mathbf{E}_n) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-), \varphi\mathbf{E}_n) .$$

Le foncteur $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab} \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$ dispose d'une variante pointée (mais non additive)

$$\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet \to \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$$

définie de façon semblable. On peut en déduire une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}((K_0^{\mathrm{s}})_{n+1}, \varphi\mathbf{E}_{n+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}((K_0^{\mathrm{s}})_n, \varphi\mathbf{E}_n) .$$

En passant à la limite projective les bijections obtenues précédemment, on obtient une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}((K_0^{\mathrm{s}})_n, \varphi\mathbf{E}_n) .$$

Maintenant, un morphisme $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}} \to \mathbf{E}$ dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ induit automatiquement des morphismes de H-groupes $\mathbf{BGL}_n^{\text{naïf}} \to \mathbf{E}_n$, on en déduit donc immédiatement que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}, \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}((K_0^{\mathrm{s}})_n, \varphi\mathbf{E}_n) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, \varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{E})$$

est bijective.

Remarque IV.12 *Si j'avais de plus supposé que les applications*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}((\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})^2, \mathbf{E}_n) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-)\times K_0(-), \varphi\mathbf{E}_n)$$

étaient bijectives, on aurait pu conclure immédiatement que les morphismes de H-groupes $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to \mathbf{E}_n$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ correspondaient bijectivement aux transformations naturelles additives $K_0(-) \to \varphi\mathbf{E}_n$.

Pour aller plus loin, nous allons devoir procéder à une étude approfondie des opérations additives sur la K-théorie algébrique.

2 Opérations additives sur la K-théorie algébrique

Avant de parler d'opérations stables sur la K-théorie algébrique, et après avoir étudié les transformations naturelles « ensemblistes » $K_0(-) \to K_i(-)$, il convient d'étudier les opérations additives, c'est-à-dire définissant des morphismes de groupes fonctoriels $K_0(-) \to K_i(-)$.

2.1 Le principe de scindage

Soit S un schéma régulier. On considère le morphisme $\mathrm{Pic}(-) \to K_0(-)$ dans la catégorie $\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ correspondant à la transformation naturelle $\mathrm{Pic}(X) \to K_0(X)$ envoyant la classe d'isomorphismes d'un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $X \in \mathrm{Sm}/S$ sur la classe $[\mathscr{L}] \in K_0(X)$. D'après la remarque iii.28, cette transformation naturelle correspond à un unique morphisme $c\colon \mathbb{P}^\infty \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}(S)$ caractérisé par le fait que pour tout entier naturel n, la composée $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^\infty \xrightarrow{c} \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ corresponde à $u + 1 = [\mathscr{O}(1)] \in K_0(\mathbb{P}^n)$.

Théorème iv.13 *Soit S un schéma régulier. On note* **Ab** *la catégorie des groupes abéliens. Pour tout entier naturel i, la flèche*

$$c^\star\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), K_i(-)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(Pic(-), K_i(-)) \ ,$$

autrement dit l'application

$$c^\star\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), K_i(-)) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} K_i(\mathbb{P}^n) = K_i(S)\,[[U]] \ ^1$$

est bijective.

L'injectivité résulte du principe de scindage : si une transformation naturelle additive $\tau\colon K_0(-) \to K_i(-)$ est nulle sur les classes de fibrés en droites, elle est nulle sur les combinaisons linéaires à coefficients entiers de classes de fibrés en droites ; or, pourvu que $X \in \mathrm{Sm}/S$ soit connexe, pour tout élément $x \in K_0(X)$, il existe un morphisme $f\colon Y \to X$ dans Sm/S tel que $f^\star\colon K_i(X) \to K_i(Y)$ soit injectif et que $f^\star(x)$ soit une combinaison linéaire à coefficients entiers de classes de fibrés en droites.

Pour la surjectivité, on va d'abord montrer que l'image de l'application $c^\star$ contient les « polynômes » $K_i(S)\,[U]$.

Pour tout entier naturel k et tout élément $x \in K_i(S)$, on note $x \cdot \Psi^k\colon K_0(-) \to K_i(-)$ la transformation naturelle additive qui à $z \in K_0(X)$ associe $x \cdot \Psi^k(z) \in K_i(X)$ [2].

Lemme iv.14 *Pour tout entier naturel k et tout élément $x \in K_i(S)$, on a l'égalité*

$$c^\star(x \cdot \Psi^k) = x(1+U)^k$$

dans $K_i(S)\,[[U]]$.

Il s'agit d'évaluer $x \cdot \Psi^k$ sur $[\mathscr{O}(1)] = 1 + u \in K_0(\mathbb{P}^n)$ pour tout entier naturel n. On a évidemment

$$\Psi^k([\mathscr{O}(1)]) = [\mathscr{O}(1)]^k = (1+u)^k \ ,$$

ce qui permet de conclure.

Par récurrence sur n, on déduit de ce lemme que l'image de $c^\star$ contient les polynômes de degré $\leq n$ en $K_i(S)$. Par conséquent, l'image de $c^\star$ contient $K_i(S)\,[U]$. La proposition suivante permet alors de finir la démonstration de la partie « surjectivité » du théorème :

[1] Pour $i > 0$, $K_i(S)$ n'étant pas un anneau, $K_i(S)\,[[U]]$ est simplement un $\mathbb{Z}\,[[U]]$-module.

[2] Pour $k = 0$, on convient de noter $\Psi^0\colon K_0(-) \to K_0(-)$ la transformation naturelle additive caractérisée par le fait que si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel de rang n, alors $\Psi^0([\mathscr{E}]) = n$.

Proposition IV.15 *Soit $(\tau_n\colon K_0(-) \to K_i(-))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de transformations naturelles additives telle que la suite $(c^\star(\tau_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers zéro dans $K_i(S)\,[[U]]$ (vu comme produit infini de copies du groupe discret $K_i(S)$). Alors, il existe une (unique) transformation naturelle $\sum \tau_n\colon K_0(-) \to K_i(-)$ telle que l'on ait l'égalité*

$$c^\star(\textstyle\sum \tau_n) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c^\star(\tau_n)$$

dans $K_i(S)\,[[U]]$.

Cette proposition résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme IV.16 *Sous les hypothèses de la proposition IV.15, soit $X \in \mathrm{Sm}/S$, soit $x \in K_0(X)$. Il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\tau_n(x) = 0$. On peut alors poser*

$$(\textstyle\sum\tau_n)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \tau_n(x)\ .$$

On procède de la même façon que page 78 pour établir le théorème II.22 : par principe de scindage, on peut supposer que $x = [\mathscr{L}]$ où $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur $X \in \mathrm{Sm}/S$; grâce à l'astuce de Jouanolou, on peut supposer que X est affine ; pour un entier m suffisamment grand, il existe alors un morphisme $f\colon X \to \mathbb{P}^m$ dans Sm/S tel que $\mathscr{L} \simeq f^\star(\mathscr{O}(1))$. On est ainsi ramené au cas où $x = [\mathscr{O}(1)] \in K_0(\mathbb{P}^m)$. Par hypothèse, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, on ait $\tau_n([\mathscr{O}(1)]) = 0 \in K_0(\mathbb{P}^m)$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

2.2 Composition des opérations additives

Proposition IV.17 *Soit S un schéma régulier. Pour tout entier naturel i, les morphismes de H-groupes $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ correspondent bijectivement aux transformations naturelles additives $K_0(-) \to K_i(-)$ entre préfaisceaux sur Sm/S.*

Cette proposition résulte formellement des versions à une ou deux variables du théorème III.32 (cf. remarque IV.12).

Il y a ainsi au moins quatre manières de représenter les opérations additives $K_0(-) \to K_i(-)$:

– les morphismes de H-groupes $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$;
– les morphismes $S^i \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ qui leur sont adjoints ;
– les transformation naturelles additives $K_0(-) \to K_i(-)$ sur Sm/S ;
– les éléments de $K_i(S)\,[[U]]$ (cf. théorème IV.13).

On passera librement de l'un de ces points de vue à un autre. Rappelons aussi qu'une opération additive $K_0(-) \to K_i(-)$ donne canoniquement naissance à des opérations $K_j(-) \to K_{i+j}(-)$ pour $j \in \mathbb{N}$ (que l'on peut d'ailleurs évaluer non seulement sur Sm/S, mais aussi sur $\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, cf. théorème III.24). Ceci rend plausible l'idée que l'on puisse « composer » une opération $K_0(-) \to K_i(-)$ et une opération $K_0(-) \to K_j(-)$ pour obtenir une opération $K_0(-) \to K_{i+j}(-)$, ce que donne précisément la définition qui suit :

Définition IV.18 *Soit S un schéma régulier. Soit (i,j) un couple d'entiers naturels. Si $f\colon S^j \wedge (\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ et $g\colon S^i\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ sont des morphismes dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ correspondant respectivement à des opérations additives $K_0(-)\to K_i(-)$ et $K_0(-)\to K_j(-)$ sur Sm/S, on note $g\bigstar f$ l'opération additive $K_0(-)\to K_{i+j}(-)$ correspondant au morphisme composé :*

$$S^{i+j}\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \overset{S^i\wedge f}{\to} S^i\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \overset{g}{\to} \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}\ .$$

Les différents points de vue possibles sur les opérations additives sur la K-théorie algébrique conduisent à la proposition suivante :

Proposition IV.19 *Soit S un schéma régulier. La loi $\bigstar$ donne naissance à une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre associative graduée sur le groupe abélien gradué $(K_n(S)\,[[U]])_{n\in\mathbb{N}}$. L'unité de cette algèbre est $1+U\in K_0(S)\,[[U]]$.*

Proposition IV.20 *Soit S un schéma régulier. Soit (i,j) un couple d'entiers naturels. L'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire*

$$\bigstar\colon K_i(S)\,[[U]]\times K_j(S)\,[[U]]\to K_{i+j}(S)\,[[U]]$$

est continue.

On rappelle que pour tout entier naturel i, on a muni $K_i(S)\,[[U]]$ de la topologie produit ($K_i(S)$ étant considéré comme discret), ce qui revient à le munir de la topologie pro-discrète issue de la bijection $K_i(S)\,[[U]]\overset{\sim}{\to}\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} K_i(S)\,[U]\,/(U^n)$. En particulier, on observe que cette topologie est métrisable. Le lemme suivant donne des critères de convergence de suites dans cet espace topologique :

Lemme IV.21 *Soit S un schéma régulier. Soit i un entier naturel. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_i(S)\,[[U]]$. Si f est un élément de $K_i(S)\,[[U]]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $K_i(S)\,[[U]]$;

(2) Pour tout entier naturel n, la suite $f_k([\mathscr{O}(1)])$ d'éléments de $K_i(\mathbb{P}^n)$ est constante de valeur $f([\mathscr{O}(1)])$ à partir d'un certain rang ;

(3) Pour tous $X\in\mathrm{Sm}/S$ et $x\in K_0(X)$, la suite $f_k(x)$ d'éléments de $K_i(X)$ est constante de valeur $f(x)$ à partir d'un certain rang ;

(4) Pour tous $X\in\mathrm{Sm}/S$, $j\in\mathbb{N}$ et $x\in K_j(X)$, la suite $f_k(x)$ d'éléments de $K_{i+j}(X)$ est constante de valeur $f(x)$ à partir d'un certain rang ;

(5) Pour tout objet $X\in\mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$ et $x\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^i\wedge X,\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ est constante de valeur $f(x)$ à partir d'un certain rang.

Tout d'abord, on peut évidemment supposer que $f = 0$. La définition de la topologie sur $K_i(S)\,[[U]]$ en termes de limite projective donne l'équivalence (1) $\Longleftrightarrow$ (2). On a trivialement (5) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2). L'implication (2) $\Longrightarrow$ (3) est une reformulation du lemme IV.16. Il reste à montrer l'implication (3) $\Longrightarrow$ (5). Pour cela, on utilise le lemme III.21 : si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X, \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$ où $X \in \mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$, il existe une factorisation $x = i \circ g \colon X \xrightarrow{g} V \xrightarrow{i} \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}$ dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$ où V est un objet pointé de Sm/S (plus précisément, on peut prendre pour V une réunion disjointe d'un nombre fini de grassmanniennes). La condition (3) implique qu'à partir d'un certain rang, on a $f_k \circ i = 0$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(V, \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}))$ (où l'on voit f_k comme un morphisme de H-groupes $\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to \mathrm{R}\Omega^i(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$). Il en résulte que $f_k(x) = f_k \circ i \circ g = 0$, ce qui achève la démonstration de l'implication (3) $\Longrightarrow$ (5).

Montrons la continuité de $\bigstar$. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_j(S)\,[[U]]$ convergeant vers un élément f. Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_i(S)\,[[U]]$ convergeant vers un élément g. On veut montrer que $(g_k \bigstar f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément $g\bigstar f$. Utilisons la condition (5) du lemme précédent : soit $x \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(X, \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$ avec $X \in \mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$. Comme $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f, il existe un entier naturel N tel que $f_k(x) = f(x)$ si $k \geq N$. Utilisons maintenant le fait que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers g, le même critère appliqué à $f(x)$ vu comme élément de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^j \wedge X, \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr})$ donne l'existence d'un entier naturel N' tel que $g_k(f(x)) = g(f(x))$ pour $k \geq N$. Ainsi, on a $(g_k \bigstar f_k)(x) = (g\bigstar f)(x)$ dès que $k \geq \max(N, N')$, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Corollaire IV.22 *Soit S un schéma régulier. Soit (i,j) un couple d'entiers naturels. La loi*

$$\bigstar \colon K_i(S)\,[[U]] \times K_j(S)\,[[U]] \to K_{i+j}(S)\,[[U]]$$

est l'unique application $\mathbb{Z}$-bilinéaire continue telle que pour tous $x \in K_i(S)$, $y \in K_j(S)$ et $(k,k') \in \mathbb{N}^2$, on ait l'egalité

$$(x \cdot \Psi^k) \bigstar (y \cdot \Psi^{k'}) = (x \cdot \Psi^k(y)) \cdot \Psi^{kk'} \ ,$$

c'est à-dire $(x(1+U)^k) \bigstar (y(1+U)^{k'}) = (x \cdot \Psi^k(y))(1+U)^{kk'}$ dans $K_{i+j}(S)\,[[U]]$.

La proposition IV.20 montre que $\bigstar$ est continue. Pour tout entier naturel n, le sous-$\mathbb{Z}$-module de $K_n(S)\,[[U]]$ engendré par les éléments de la forme $x(1+U)^k$ pour $x \in K_n(S)$ et $k \in \mathbb{N}$ est dense. Il n'y a donc qu'à vérifier la formule donnée dans l'énoncé, ce qui est immédiat.

Remarque IV.23 *Ce corollaire montre que si $\Psi^k(x) = x$ pour tout $x \in K_0(S)$ et $k \in \mathbb{N}$ (par exemple si $K_0(S) = \mathbb{Z}$), alors l'algèbre $(K_0(S)\,[[U]]\,, +, \bigstar)$ est commutative, ce qui n'était pas évident* a priori.

On va maintenant préciser l'assertion de continuité de $\bigstar$, en particulier dans le cas particulier envisagé dans la remarque précédente.

Définition IV.24 *Soit S un schéma régulier. Soit n un entier naturel. On note (U^n) le sous-groupe de $K_0(S)\,[[U]]$ qui est l'idéal engendré par U^n pour la structure usuelle de $K_0(S)$-algèbre sur $K_0(S)\,[[U]]$. Il s'agit d'un ouvert de $K_0(S)\,[[U]]$.*

Proposition IV.25 *Soit S un schéma régulier. Pour tout entier naturel n, (U^n) est un idéal à gauche de l'algèbre $(K_0(S)\,[[U]]\,,+,\bigstar)$.*

Le lemme suivant est évident :

Lemme IV.26 *Soit S un schéma régulier. Soit f une opération additive $K_0(-) \to K_0(-)$ sur Sm/S. Pour tout entier naturel n, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$f \in (U^n)$;*
- *dans $K_0(\mathbb{P}^{n-1})$, on a l'égalité $f([\mathscr{O}(1)]) = 0$;*

Établissons la proposition. Soit $g \in K_0(S)\,[[U]]$, soit $f \in (U^n)$, on veut montrer que $g\bigstar f \in (U^n)$. Le lemme précédent nous incite à considérer $x = [\mathscr{O}(1)] \in K_0(\mathbb{P}^{n-1})$: si $f(x) = 0 \in K_0(\mathbb{P}^{n-1})$, alors on a bien $(g\bigstar f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$.

Corollaire IV.27 *Soit S un schéma régulier tel que $K_0(S) = \mathbb{Z}$. Alors, pour tout entier naturel n, (U^n) est un idéal bilatère ouvert de $(K_0(S)\,[[U]]\,,+,\bigstar)$.*

En effet, sous cette hypothèse, la loi $\bigstar$ est commutative (cf. remarque IV.23), il suffit de montrer que (U^n) est un idéal à gauche.

Remarque IV.28 *Dans le cas particulier $K_0(S) = \mathbb{Z}$, le corollaire* IV*.27 donne des informations beaucoup plus précises que la simple assertion de continuité obtenue dans la proposition* IV*.20. Comme (U^n) est un idéal (bilatère), on peut passer au quotient par lui pour obtenir une structure d'anneau sur $\mathbb{Z}\,[[U]]\,/U^n$ pour laquelle on a une congruence entre $(1+U)^k\bigstar(1+U)^{k'}$ et $(1+U)^{kk'}$ modulo U^n pour tout couple (k,k') d'entiers naturels.*

Remarque IV.29 *On peut aussi démontrer ce corollaire* IV*.27 de façon « géométrique » dans l'esprit de la démonstration de la proposition* IV*.25 : montrer que (U^n) est un idéal à droite dans ce cas particulier (mais bien évidemment sans utiliser la commutativité de la loi $\bigstar$). En effet, pour traiter le cas $K_0(S) = \mathbb{Z}$, on peut se ramener au cas où k est un corps infini et $S = \mathrm{Spec}\, k$, et démontrer que si une opération additive $K_0(-) \to K_0(-)$ sur Sm/S s'annule sur $[\mathscr{O}(1)]$ dans $K_0(\mathbb{P}^{n-1})$, alors elle s'annule sur* tout *$K_0(\mathbb{P}^{n-1})$; il suffit pour cela de montrer qu'elle s'annule sur les classes des fibrés en droites $\mathscr{O}(k)$ pour $k \geq 0$. On peut alors utiliser le lemme suivant pour conclure.*

Lemme IV.30 *Soit X une variété algébrique lisse sur un corps infini k de dimension d. Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur X engendré par ses sections globales. Alors, il existe $d+1$ sections globales de $\mathscr{L}$ l'engendrant.*

Ceci résulte d'un théorème de Bertini (cf. [44, corollaire 6.11, Chapitre I]).

Bien entendu, dans le cas du fibré en droites $\mathscr{O}(k)$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ pour $k \geq 0$, la conclusion de ce lemme est beaucoup plus triviale à obtenir.

Remarque IV.31 *Pour établir le corollaire* IV*.27, il aurait également été possible de procéder à une approche purement algébrique de $\bigstar$. On aurait pu définir la loi $\bigstar$ sur $\mathbb{Z}\,[U]$ et démontrer qu'elle se prolonge par continuité à $\mathbb{Z}\,[[U]]$. Pour cela, on aurait vérifié que $U^n\bigstar U^m \in (U^n)$ pour tout couple (n,m) d'entiers naturels.*

2.3 Stabilisation

Pour tout schéma régulier S, on a défini un objet $K_0^{\mathrm{s}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$. Pour tout entier naturel i, on peut poser plus généralement $K_i^{\mathrm{s}} = \varphi^{\mathrm{s}}(\mathrm{R}\Omega^i \mathbf{BGL}^{\mathrm{naïf}})$ où $\mathrm{R}\Omega^i \colon \mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(S) \to \mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(S)$ est le foncteur « i-ème espace de lacets », bâti de manière évidente sur le modèle du foncteur dérivé à droite du foncteur Ω_{S^i} de la proposition I.72 [3].

Proposition IV.32 *Soit S un schéma régulier, soit i un entier naturel, le foncteur φ^{s} induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{naïve}(S)}(\mathbf{BGL}^{naïf}, \Omega^i \mathbf{BGL}^{naïf}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, K_i^{\mathrm{s}}) \, .$$

Il s'agit de vérifier les hypothèses du théorème IV.11 : cela résulte du théorème III.32.

Pour tout entier naturel i, on identifie K_i^{s} à l'objet de $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$ défini par $(K_i^{\mathrm{s}})_n = K_i(-)$ pour tout entier naturel n, les morphismes $(K_i^{\mathrm{s}})_n \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{P}^1}(K_i^{\mathrm{s}})_{n+1}$ étant comme toujours induits par la multiplication avec $u = [\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$. Pour tenter de calculer $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, K_i^{\mathrm{s}})$, on s'intéresse au système projectif suivant dont ce groupe abélien est la limite projective :

$$\dots \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), K_i(-)) \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), K_i(-)) \, .$$

Grâce à la bijection $c^\star \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), K_i(-)) \xrightarrow{\sim} K_i(S)\,[[U]]$ donnée par le théorème IV.13, on peut récrire ce système projectif sous la forme

$$\cdots \to K_i(S)\,[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} K_i(S)\,[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} K_i(S)\,[[U]] \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} K_i(S)\,[[U]]$$

où $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon K_i(S)\,[[U]] \to K_i(S)\,[[U]]$ est un certain morphisme de groupes abéliens.

Proposition IV.33 *Soit S un schéma régulier, soit i un entier naturel. L'application*

$$\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon K_i(S)\,[[U]] \to K_i\,[[U]]$$

est donnée par la formule

$$\Omega_{\mathbb{P}^1}(f) = (1+U)\frac{df}{dU}$$

pour tout élément $f \in K_i(S)\,[[U]]$.

Il existe plusieurs manières d'établir cette proposition. Voici l'une d'entre elles. Il est aisé de vérifier que cette application est continue (cf. lemme IV.16). Il suffit donc de vérifier la formule sur les éléments de la forme $x \cdot \Psi^p = x(1+U)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in K_i(S)$. On se ramène au lemme suivant :

[3] De manière plus conceptuelle, on peut vérifier que si $X \in \mathbf{Esp}_\bullet(\mathrm{Sm}/S_{\mathrm{Nis}})$, le foncteur additif $\mathrm{R}\Omega_X \colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}(S)$ envoie l'idéal $\mathscr{F}$ des applications stablement fantômes (cf. définition I.129) dans lui-même ; compte tenu de l'équivalence de catégories $\mathcal{SH}(S)/\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(S)$ (cf. proposition I.132), on obtient que ce foncteur $\mathrm{R}\Omega_X$ passe au quotient par $\mathscr{F}$ pour induire un foncteur $\mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(S) \to \mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(S)$.

Lemme IV.34 *Soit p un entier naturel. On pose $\Psi^p = (1+U)^p \in K_0(S)\,[[U]]$. Alors, on a les égalités :*

$$\Omega_{\mathbb{P}^1}((1+U)^p) = \Omega_{\mathbb{P}^1}(\Psi^p) = p\Psi^p = (1+U)\frac{d((1+U)^p)}{dU}\ .$$

Par définition de $\Omega_{\mathbb{P}^1}$, il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme suivant où $X \in \mathrm{Sm}/S$ et $u = [\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$:

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "x \longmapsto u \boxtimes x"] \arrow[d, "p\Psi^p"] & K_0(\mathbb{P}^1_X) \arrow[d, "\Psi^p"] \\ K_0(X) \arrow[r, "x \longmapsto u \boxtimes x"] & K_0(\mathbb{P}^1_X) \end{tikzcd}$$

Comme Ψ^p est multiplicatif, on se ramène à montrer que $\Psi^p(u) = pu$ dans $K_0(\mathbb{P}^1)$. On sait que

$$\Psi^p(u) = \Psi^p([\mathscr{O}(1)]) - 1 = (1+u)^p - 1\ .$$

Dans $K_0(\mathbb{P}^1)$, on a l'égalité $u^2 = 0$ (cf. théorème II.18), la formule voulue en découle.

Remarque IV.35 *Les formules obtenues pour $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ et $\bigstar$ (cf. corollaire* IV*.22) permettent de vérifier explicitement que les applications $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon K_n(S)\,[[U]] \to K_n(S)\,[[U]]$ définissent un endomorphisme de l'algèbre associative graduée $(K_n(S)\,[[U]])_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. proposition* IV*.19). On peut remarquer que cette compatibilité était évidente* a priori *à partir des définitions intrinsèques de $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ et $\bigstar$.*

Définition IV.36 *Pour tout groupe abélien A, on peut noter $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon A\,[[U]] \to A\,[[U]]$ l'application donnée par la formule de la proposition* IV*.33. On note A^Ω le système projectif indexé par $\mathbb{N}$ défini par $A^\Omega_n = A\,[[U]]$, les morphismes de transition étant tous donnés par cette application $\Omega_{\mathbb{P}^1}$.*

Remarquons la perplexité suivante :

Proposition IV.37 *Soit A un groupe abélien sans torsion tel que pour tout élément $a \in A$ non nul, on ait « $\mathbb{Q}\cdot a \not\subset A$ ». Alors l'application évidente*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} A^\Omega_n \to A^\Omega_0 = A\,[[U]]$$

est injective. On note L_A l'image de cette application.

Soit $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \lim_{n\in\mathbb{N}} A^\Omega_n$. On suppose que $f_0 = 0$ et on veut montrer que $f_n = 0$ pour tout entier naturel n. Par une récurrence évidente, il suffit de montrer que $f_1 = 0$. Commençons par utiliser la relation

$$(1+U)\frac{df_1}{dU} = f_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{df_1}{dU} = 0\ .$$

Il existe donc $a \in A$ tel que $f_1 = a \in A[[U]]$. Il s'agit de montrer que $a = 0$. Utilisons la relation suivante :

$$(1+U)\frac{df_2}{dU} = f_1 = a \quad \text{d'où} \quad \frac{df_2}{dU} = \frac{a}{1+U} = a - aU + aU^2 - \dots$$

On en déduit qu'il existe $b \in A$ tel que l'on ait l'égalité

$$f_2 = b + a\log(1+U) = b + a\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}U^n$$

dans $(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})[[U]]$. Compte tenu de notre hypothèse, la présence de nombreux dénominateurs dans cette formule a pour conséquence que si $a \neq 0$, cet élément $b + a\log(1+U)$ n'appartient pas à $A[[U]]$. Par l'absurde, on a donc $a = 0$, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Ainsi, sous les hypothèses de la proposition, si un élément de $A[[U]]$ peut se « délacer » une infinité de fois, cela ne peut se faire que d'une seule manière, ce qui semble assez paradoxal *a priori*, vu que la flèche de transition $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ n'est pas injective (si $A \neq 0$).

Proposition IV.38 (Yves André) *Soit p un nombre premier.*

- *L'image (notée $L_{\mathbb{Z}/p}$) de $\Omega_{\mathbb{P}^1} : \mathbb{Z}/p[[U]] \to \mathbb{Z}/p[[U]]$ est formée des séries formelles $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n U^n$ telles que pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, on ait l'égalité*

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i a_{kp+i} = 0 \ ;$$

- *si $f \in L_{\mathbb{Z}/p}$, il existe un unique élément $g \in L_{\mathbb{Z}/p}$ tel que $\Omega_{\mathbb{P}^1}(g) = f$;*
- *l'application qui à une famille compatible $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\lim(\mathbb{Z}/p)^\Omega$ associe l'élément $f_0 \in \mathbb{Z}/p[[U]]$ définit un isomorphisme*

$$\lim(\mathbb{Z}/p)^\Omega \xrightarrow{\sim} L_{\mathbb{Z}/p} \ ;$$

- *le système projectif $(\mathbb{Z}/p)^\Omega$ satisfait la condition de Mittag-Leffler, et donc*

$$\mathrm{R}^1\lim(\mathbb{Z}/p)^\Omega = 0 \ .$$

Soit $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n U^n \in \mathbb{Z}/p[[U]]$. On a

$$\Omega_{\mathbb{P}^1}(g) = (1+U)\sum_{n\geq 1} n b_n U^{n-1} \ ;$$

si $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n U^n$, dire que $\Omega_{\mathbb{P}^1}(g) = f$ signifie que pour tout entier naturel n, on a

$$nb_n + (n+1)b_{n+1} = a_n \ ;$$

ce qui revient à dire que pour tout entier naturel n,

$$nb_n = (-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i \ .$$

Pour pouvoir trouver un antécédent par $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ à f, il suffit donc d'écrire que $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_i$ est un multiple de n pour tout entier n ; deux cas sont possibles : soit p ne divise pas n et cette condition est automatiquement vérifiée, soit p divise n, auquel cas, cela revient à demander l'annulation de cette somme alternée. On obtient bien la caractérisation voulue de l'image de $\Omega_{\mathbb{P}^1}$.

Dans l'étude précédente, si on cherche les antécédents $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n U^n$ d'un élément $f \in L_{\mathbb{Z}/p}$, on remarque que les coefficients b_n pour p ne divisant pas n sont déterminés par les coefficients de f tandis que les coefficients b_{kp} pour $k \in \mathbb{N}$ peuvent être choisis arbitrairement. Il est évident que parmi les relèvements possibles de f, il n'y en a qu'un seul qui satisfasse les relations caractérisant les éléments de $L_{\mathbb{Z}/p}$.

On en déduit aussitôt l'isomorphisme voulu $\lim\,(\mathbb{Z}/p)^\Omega \xrightarrow{\sim} L_{\mathbb{Z}/p}$ ainsi que la propriété de Mittag-Leffler pour le système projectif $(\mathbb{Z}/p)^\Omega$; celle-ci implique que $\mathrm{R}^1\lim\,(\mathbb{Z}/p)^\Omega = 0$.

Remarque iv.39 (Yves André) *Il existe des éléments de $\mathbb{Z}\,[[U]]$ qui ne sont pas dans $L_\mathbb{Z}$ mais dont la réduction modulo p est dans $L_{\mathbb{Z}/p}$ pour tout nombre premier p. En effet, soit $Q \in \mathbb{Z}\,[X]$ un polynôme de terme constant nul, on pose $P(X) = Q(X+1) - Q(X) \in \mathbb{Z}\,[X]$. On considère la série $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(n)(-U)^n \in \mathbb{Z}\,[[U]]$; le critère ci-dessus permet de vérifier que la réduction modulo p de f est dans $L_{\mathbb{Z}/p}$ pour tout nombre premier p. Pour $Q(X) = X^2$, on obtient $P(X) = 2X+1$, puis $f = \sum_{n\in\mathbb{N}}(2n+1)(-U)^n = \frac{1-U}{(1+U)^2}$; il n'est pas difficile de montrer que f n'est pas dans l'image de $\Omega_{\mathbb{P}^1}\circ\Omega_{\mathbb{P}^1}$.*

Corollaire iv.40 *Pour tout groupe abélien fini A, le groupe $\mathrm{R}^1\lim\,A^\Omega$ est nul et l'application $\lim\,A^\Omega \to A_0^\Omega = A\,[[U]]$ est injective.*

Si $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ est une suite exacte de groupes abéliens, on a une suite exacte de systèmes projectifs $0 \to A'^\Omega \to A^\Omega \to A''^\Omega \to 0$ dont on déduit une suite exacte longue

$$0 \to \lim\,A'^\Omega \to \lim\,A^\Omega \to \lim\,A''^\Omega \to \mathrm{R}^1\lim\,A'^\Omega \to \mathrm{R}^1\lim\,A^\Omega \to \mathrm{R}^1\lim\,A''^\Omega \to 0\ .$$

On peut donc montrer par dévissage que $\mathrm{R}^1\lim\,A^\Omega$ est nul pour tout groupe abélien fini A à partir du cas $\mathbb{Z}/p$ pour p premier.

Une fois cette annulation connue, on peut aussi établir par dévissage l'injectivité de la flèche $\lim\,A^\Omega \to A\,[[U]]$ pour tout groupe abélien fini A (et même plus généralement pour tout groupe abélien de type fini du fait de la proposition iv.37).

Corollaire iv.41 *Soit p un nombre premier. Pour tout entier naturel n, la flèche évidente*

$$\lim\,(\mathbb{Z}_p)^\Omega \to \lim\,(\mathbb{Z}/p^n)^\Omega$$

est surjective et $\mathrm{R}^1\lim\,(\mathbb{Z}_p)^\Omega = 0$.

La suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p^{n+1} \to \mathbb{Z}/p^n \to 0$ et l'annulation de $\mathrm{R}^1 \lim (\mathbb{Z}/p)^\Omega$ implique la surjectivité de $\lim (\mathbb{Z}/p^{n+1})^\Omega \to \lim (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega$. On en déduit que $\lim (\mathbb{Z}_p)^\Omega \to \lim (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega$ est surjectif en remarquant que l'on a un isomorphisme de systèmes projectifs

$$(\mathbb{Z}_p)^\Omega \xrightarrow{\sim} \lim_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega \; .$$

On a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathrm{R}^p \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}^q \lim (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega \Longrightarrow \mathrm{R}^{p+q} \lim \mathbb{Z}_p^\Omega$$

qui donne naissance à une suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{R}^1 \lim_{n \in \mathbb{N}} \lim (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega \to \mathrm{R}^1 \lim (\mathbb{Z}_p)^\Omega \to \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{R}^1 \lim (\mathbb{Z}/p^n)^\Omega \to 0 \; .$$

Il résulte de ce qui précède que les groupes de gauche et de droite sont nuls, celui du milieu, $\mathrm{R}^1 \lim (\mathbb{Z}_p)^\Omega$ est donc nul lui aussi.

Remarque IV.42 *Les résultats qui suivent (théorèmes* IV*.44 et* IV*.49) donnent une autre manière d'établir que* $\mathrm{R}^1 \lim A^\Omega = 0$ *pour tout groupe abélien fini* A*.*

3 L'objet BGL

3.1 Construction de BGL

Théorème IV.43 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathbf{E}$ objet de $\mathcal{SH}(S)$ représenté par un Ω-spectre. On suppose qu'il existe un épimorphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$* [4] *tel que pour tout triplet d'entiers naturels (n, d, r), le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(S^1 \wedge \mathrm{Gr}_{d,r}, \mathbf{E}_n)$ soit un A-module de longueur finie. Soit $\mathscr{K}$ un modèle stable de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$. Alors $\mathscr{F}(\mathscr{K}, \mathbf{E}) = 0$* [5]*, autrement dit la flèche*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathscr{K}, \mathbf{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{naïve}(S)}(\mathbf{BGL}^{naïf}, \mathrm{oub}\, \mathbf{E})$$

est bijective. De plus, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{naïve}(S)}(\mathbf{BGL}^{naïf}, \mathrm{oub}\, \mathbf{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, \varphi^{\mathrm{s}} \mathbf{E})$$

est bijective.

On peut appliquer la proposition A.9. En effet, $\mathscr{K}$ s'identifie à une colimite homotopique d'un système inductif $F_\bullet$ avec $F_n = F_n(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ et chaque objet F_n s'identifie à une colimite homotopique d'un système inductif $F_{n,\bullet}$ avec par exemple

$$F_{n,m} = F_n(\{-m, \ldots, m\} \times \mathrm{Gr}_{m,m}) \; .$$

[4] On pense principalement au cas où $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier naturel n et au cas où $A = \mathbb{Q}$.

[5] Ce groupe désigne les morphismes stablement fantômes, cf. définition I.129.

On a bien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(S^1 \wedge F_{n,m}, \mathbf{E})$ de longueur finie comme A-module. Il vient ainsi que la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathscr{K}, \mathbf{E}) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}, \mathbf{E}_n)$$

est bijective. Par ailleurs, nos hypothèses impliquent (*via* le théorème III.27) que pour tout entier naturel n, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}, \mathbf{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-), \varphi\mathbf{E}_n)$$

est bijective ; autrement dit, les objets $\mathbf{E}_n$ satisfont la propriété (K), cf. définition III.25. Le théorème IV.11 ramène les groupes d'homomorphismes calculés ici à des morphismes dans $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$, ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Compte tenu des formules donnant la K-théorie algébrique des grassmanniennes, ce théorème implique aussitôt le théorème suivant :

Théorème IV.44 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathscr{K}$ un modèle stable de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(S)$. On suppose que $K_1(S)$ est un groupe fini. Alors, les applications suivantes sont bijectives :*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathscr{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}) .$$

Corollaire IV.45 *À isomorphisme* unique *près, il existe un unique modèle stable de la K-théorie algébrique dans $\mathcal{SH}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$, on le note $\mathbf{BGL}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$.*

En effet, on a $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z}/2$ puisque l'anneau $\mathbb{Z}$ est euclidien.

Définition IV.46 *Pour tout schéma noethérien S, on pose $\mathbf{BGL}_S = \mathrm{L}a_S^\star\mathbf{BGL}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \in \mathcal{SH}(S)$ où $a_S\colon S \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ est le morphisme canonique et $\mathbf{BGL}_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ le modèle stable introduit au corollaire IV.45. Pour tout schéma régulier S, on appelle $\mathbf{BGL}_S$ le modèle stable canonique de la K-théorie algébrique.*

3.2 Morphismes de source BGL

Nous allons établir une suite exacte courte pouvant servir à calculer $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{E})$ sous certaines hypothèses sur le Ω-spectre $\mathbf{E}$. On va en effet supposer que les objets $\mathbf{E}_n$ satisfont la propriété (K) (cf. définition III.25), de sorte que les groupes $\mathrm{R}^1\lim$ d'origine « instable » seront nuls ; il intervient alors un nouveau phénomène que l'utilisation de la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ permettait jusqu'à présent de négliger : les morphismes stablement fantômes (cf. définition I.129). Nous avons déjà pu obtenir que si $K_1(S)$ était fini et $\mathbf{E} = \mathbf{BGL}$, ce groupe $\mathscr{F}(\mathbf{BGL}, \mathbf{E})$ d'applications stablement fantômes était nul (cf. théorème IV.44), mais ce résultat était obtenu à partir d'une méthode *ad hoc*, les formules données dans les théorèmes IV.48 et IV.49 ci-dessous sont plus générales.

Définition IV.47 *Soit S un schéma régulier. Dans la définition IV.8, si $\mathscr{F}^{\mathrm{s}}$ et $\mathscr{G}^{\mathrm{s}}$ sont deux objets de $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$, on aurait pu définir $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(\mathscr{F}^{\mathrm{s}}, \mathscr{G}^{\mathrm{s}})$ comme étant la limite projective d'un certain système projectif de groupes abéliens*

$$\dots \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(\mathscr{F}_1^{\mathrm{s}}, \mathscr{G}_1^{\mathrm{s}}) \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(\mathscr{F}_0^{\mathrm{s}}, \mathscr{G}_0^{\mathrm{s}})$$

où les morphismes de transition sont induits par le foncteur $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ et les morphismes d'assemblage. On note $\mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(\mathscr{F}^{\mathrm{s}},\mathscr{G}^{\mathrm{s}})$ le « $\mathrm{R}^1\lim$ » de ce système projectif de groupes abéliens.

Je ne prétends pas affirmer que ce bifoncteur $\mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}$ ait un rapport trop étroit avec les groupes $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}$ dans la catégorie (abélienne) $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$. Il s'agit simplement d'une notation commode.

Théorème IV.48 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathbf{E}$ un Ω-spectre dans $\mathcal{SH}(S)$. On suppose que pour tout entier naturel n, les objets $\mathbf{E}_n$ et $\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n$ satisfont la propriété (K) (cf. définition III.25). Alors, la suite exacte canonique de la proposition I.132*

$$0\to\mathscr{F}(\mathbf{BGL},\mathbf{E})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL},\mathbf{E})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\text{naïf}},\mathrm{oub}\,\mathbf{E})\to 0$$

s'identifie à une suite exacte

$$0\to\mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}},\varphi^{\mathrm{s}}\mathrm{R}\Omega\mathbf{E})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL},\mathbf{E})\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}},\varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{E})\to 0\ .$$

On a déjà vu dans le théorème IV.11 que, sous ces hypothèses, on avait un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)}(\mathbf{BGL}^{\text{naïf}},\mathrm{oub}\,\mathbf{E})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}},\varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{E})\ .$$

D'après le lemme I.128, on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{F}(\mathbf{BGL},\mathbf{E})=\mathrm{R}^1\lim_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr},\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n)\ .$$

Par hypothèse, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr},\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-),\varphi\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n)$$

pour tout entier naturel n. Notons $B_\bullet$ le système projectif de groupes abéliens défini par

$$B_n=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet}(K_0(-),\varphi\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n)\ ,$$

les applications de transition étant définies en ces termes comme dans la démonstration du théorème IV.11. On a ainsi un isomorphisme

$$\mathscr{F}(\mathbf{BGL},\mathbf{E})\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}\lim\ B_\bullet\ .$$

Notons $A_\bullet$ le sous-système projectif de $B_\bullet$ défini de sorte que pour tout entier naturel n, on ait

$$A_n=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-),\varphi\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}_n)\ .$$

c'est-à-dire que l'on considère les transformations naturelles additives parmi celles qui sont pointées. Par construction, on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}^1\lim\ A_\bullet=\mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}},\varphi^{\mathrm{s}}\mathrm{R}\Omega\mathbf{E})\ .$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que la flèche $\mathrm{R}^1\lim\ A_\bullet\to\mathrm{R}^1\lim\ B_\bullet$ induite par l'inclusion $A_\bullet\to B_\bullet$ est bijective. On considère le système projectif quotient $C_\bullet=B_\bullet/A_\bullet$.

Le point essentiel à remarquer (et cela intervenait aussi dans la démonstration du théorème IV.11) est que pour tout entier naturel n, l'image de l'application de transition $B_{n+1} \to B_n$ est contenue dans A_n ; c'est évident : si on applique $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, -)$ à un morphisme dans $\mathscr{H}_\bullet(S)$, on obtient automatiquement un morphisme de H-groupes... Par conséquent, l'application $C_{n+1} \to C_n$ est nulle ! On en déduit que $\mathrm{R}\lim C_\bullet = 0$, ce qui entraîne que l'inclusion $A_\bullet \to B_\bullet$ induit un isomorphisme $\mathrm{R}^1 \lim A_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 \lim B_\bullet$.

Finalement, on a bien construit un isomorphisme canonique

$$\mathscr{F}(\mathbf{BGL}, \mathbf{E}) = \mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, \varphi^{\mathrm{s}}\mathrm{R}\Omega\mathbf{E}) ,$$

ce qui achève la démonstration de ce théorème.

3.3 Morphismes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}\,[-n]$

On rappelle que la catégorie $\mathcal{SH}\,(S)$ est triangulée (cf. théorème I.69), il est donc permis d'étudier les homomorphismes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}\,[-n]$ dans $\mathcal{SH}\,(S)$ pour tout entier relatif n.

Théorème IV.49 *Soit S un schéma régulier. Pour tout entier relatif n, la suite exacte courte de la proposition* I.*132 s'écrit*

$$0 \to \mathrm{Hom}^1_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, K_{n+1}^{\mathrm{s}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}\,[-n]) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}}, K_n^{\mathrm{s}}) \to 0 .$$

De plus, cette suite exacte peut se récrire

$$0 \to \mathrm{R}^1 \lim\, K_{n+1}(S)^\Omega \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}\,[-n]) \to \lim\, K_n(S)^\Omega \to 0$$

(cf. définition IV.*36 pour le sens du système projectif A^Ω associé à un groupe abélien A).*

Si X est un schéma régulier, on pose $K_i(X) = 0$ si $i < 0$. La démonstration de ce théorème consiste à vérifier les hypothèses du théorème IV.48, et à utiliser ensuite les calculs ayant conduit à la définition explicite des systèmes projectifs A^Ω pour conclure. Le théorème sera donc établi une fois que l'on aura démontré la proposition suivante :

Proposition IV.50 *Soit S un schéma régulier. Pour tout entier relatif n, l'objet $E = \mathbf{BGL}\,[-n]$ satisfait les hypothèses du théorème* IV.*48.*

Pour $n \geq 0$, l'objet $\mathbf{BGL}\,[-n]$ est simplement donné par $\mathrm{R}\Omega^n\mathbf{BGL}$. On a ainsi représenté $\mathbf{BGL}\,[-n]$ par un Ω-spectre dont l'image dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}\,(S)$ est clairement identifiée à $\mathrm{R}\Omega^n\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$. Les hypothèses du théorème IV.48 sont donc vérifiées en vertu du théorème III.32.

Pour $n < 0$, il faut procéder de manière différente puisque le $\mathbb{P}^1$-spectre $S^{-n} \wedge \mathbf{BGL}$ ne semble pas être un Ω-spectre. Commençons par le lemme suivant :

Lemme IV.51 *Soit S un schéma régulier. Soit k un entier strictement positif. Alors,*

$$\varphi(\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{G}_m^{\wedge k}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})) = 0 ,$$

autrement dit, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/S$, le groupe abélien

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_m^{\wedge k} \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est nul[6].

[6]Le schéma $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est toujours pointé par son neutre 1.

On commence par le cas $k = 1$. De la suite cofibrée « scindée »

$$S^0 \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}+} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$$

on déduit une suite exacte courte scindée :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to K_0(\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times X) \xrightarrow{1^\star} K_0(X) \to 0\ .$$

Comme X est un schéma *régulier*, il est aisé de montrer à partir des résultats de [62] que l'application $1^\star\colon K_0(\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times X) \to K_0(X)$ est bijective. Ainsi, la conclusion du lemme est vraie pour $k = 1$.

On procède ensuite par récurrence. Supposons la conclusion vraie par k, montrons-la pour $k + 1$. On a plus généralement une suite cofibrée « scindée »

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k} \wedge \mathbb{G}_{\mathrm{m}+} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k+1}\ .$$

Il en résulte que le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k+1} \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k} \wedge (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times X)_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ qui est nul par hypothèse de récurrence.

Lemme IV.52 *Soit S un schéma régulier. L'objet $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{G}_m^{\wedge k}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$ satisfait la propriété (K). Si $k \geq 1$, on a plus précisément*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_m^{\wedge k} \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}), \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) = 0\ .$$

Pour $k = 0$, c'est le théorème III.29. Supposons maintenant $k \geq 1$. Notons immédiatement que l'assertion d'annulation se déduit de la première assertion en vertu du lemme précédent. Il s'agit donc simplement d'établir la propriété (K) pour ces objets ; pour cela, il suffit de montrer que si (d, r, d', r') sont des entiers naturels tels que $d \leq d'$ et $r \leq r'$, alors les applications évidentes

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1 \wedge \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k} \wedge \mathrm{Gr}_{d',r'+}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(S^1 \wedge \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k} \wedge \mathrm{Gr}_{d,r+}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

sont surjectives. Comme $k \geq 1$, on peut faire sortir un facteur $S^1 \wedge \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \simeq \mathbb{P}^1$ dans les $\wedge$-produits, le « faire passer de l'autre côté » par adjonction et utiliser enfin l'isomorphisme de périodicité

$$\sigma'\colon \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

pour se ramener à montrer que la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k-1} \wedge \mathrm{Gr}_{d',r'+}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(S)}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge k-1} \wedge \mathrm{Gr}_{d,r+}, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr})$$

est surjective. Pour $k = 1$, c'est la surjectivité de $K_0(\mathrm{Gr}_{d',r'}) \to K_0(\mathrm{Gr}_{d,r})$, déjà maintes fois utilisée, et pour $k \geq 2$, c'est évident puisque le lemme précédent implique que ces deux groupes sont nuls.

Lemme IV.53 *Soit S un schéma régulier. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Omega_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{BGL}^{\textit{naïf}})$$

dans la catégorie $\mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)$.

Avant d'établir ce lemme, déduisons-en la proposition IV.50 dans le cas $n < 0$. En itérant l'isomorphisme de ce lemme, on obtient un isomorphisme

$$\mathbf{BGL}^{\text{naïf}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{P}^{1\wedge -n}, \mathbf{BGL}^{\text{naïf}})$$

dans $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathbf{BGL}^{\text{naïf}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Omega^{-n}(\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge -n}, \mathbf{BGL}^{\text{naïf}}))\ .$$

On en déduit que $\mathrm{oub}(\mathbf{BGL}\,[-n]) \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge -n}, \mathbf{BGL}^{\text{naïf}})$. Le lemme IV.52 (et l'idée de sa démonstration) montre que $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n}, \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ (et ses espaces de lacets) satisfont la propriété (K), ce qu'il fallait démontrer.

Passons à la démonstration du lemme IV.53. On veut construire un isomorphisme $f\colon \mathbf{BGL}^{\text{naïf}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{P}^1, \mathbf{BGL}^{\text{naïf}})$. En degré n, on définit

$$f_n\colon \mathbf{BGL}_n^{\text{naïf}} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{P}^1, \mathbf{BGL}_n^{\text{naïf}})$$

comme étant l'isomorphisme $\sigma'\colon \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ de la proposition IV.2. Il s'agit de vérifier que cela constitue bien un morphisme dans la catégorie $\mathcal{SH}_{\text{naïve}}(S)$ à savoir que la famille de morphismes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est compatible aux morphismes d'assemblage sur $\mathbf{BGL}^{\text{naïf}}$ et $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\bullet}(\mathbb{P}^1, \mathbf{BGL}^{\text{naïf}})$. On peut vérifier que cela revient à montrer la commutativité du diagramme suivant dans $\mathscr{H}_{\bullet}(S)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^1\wedge\mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}\wedge\sigma"] \arrow[d, "\tau\wedge\mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}}"] & \mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{P}^1\wedge\mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}\wedge\sigma"] & \mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}) \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}
\end{tikzcd}$$

où $\tau\colon \mathbb{P}^1\wedge\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1\wedge\mathbb{P}^1$ est l'automorphisme qui échange les deux facteurs.

Le morphisme $\sigma\colon \mathbb{P}^1\wedge\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr} \to \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$ adjoint de σ' est donné formellement par la multiplication (à gauche) par $[\mathscr{O}(1)]-1 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{\bullet}(S)}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})$ pour la structure d'Anneau sur $\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}$. Il est aisé de vérifier que la commutativité du diagramme ci-dessus résulte de la commutativité de cette structure d'Anneau.

4 Coefficients rationnels

4.1 Définition de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$

Définition IV.54 *Soit S un schéma régulier. On définit un objet $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q},S}$ de $\mathcal{SH}(S)$ par*

$$\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q},S} = L_{\mathbb{Q}}\mathbf{BGL}_S$$

où $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}(S)_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est le foncteur de $\mathbb{Q}$-localisation, adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathcal{SH}(S)_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{SH}(S)$ (cf. proposition A.22) et où $\mathbf{BGL}_S$ est le modèle stable canonique de la K-théorie algébrique (cf. définition IV.46).

Les propriétés du foncteur $L_{\mathbb{Q}}$ font que si $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(S)$, on a un isomorphisme canonique

$$\varphi^{\mathrm{s}}(\mathbf{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \varphi^{\mathrm{s}}(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{E})$$

dans la catégorie $\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)$. En particulier, pour tout entier relatif n, on a un isomorphisme $\varphi^{\mathrm{s}}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q},S}[-n]) = K^{\mathrm{s}}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. En utilisant convenablement le lemme A.28, on peut montrer que si $f\colon T \to S$ est un morphisme entre schémas réguliers, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{L}f^{\star}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q},S}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q},T}$ dans $\mathcal{SH}(T)$. À partir de maintenant, on notera simplement $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ cet objet.

4.2 Endomorphismes de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$

Théorème principal

Théorème IV.55 *Soit S un schéma régulier. Soit n un entier relatif. Les flèches évidentes sont des isomorphismes :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K^{\mathrm{s}}_0, K^{\mathrm{s}}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \lim\,(K_n(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\Omega}\,.$$

Corollaire IV.56 *Soit S un schéma régulier. Soit n un entier relatif. Il n'existe pas d'application stablement fantôme non nulle $\mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n]$ (ni $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n]$ dans $\mathcal{SH}(S)$.*

L'injectivité des applications du théorème donne l'annulation de $\mathscr{F}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n])$. De manière générale, si $\mathbf{A} \in \mathcal{SH}(S)$ et si $\mathbf{B} \in \mathcal{SH}(S)_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, on a une injection

$$\mathscr{F}(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{A}, \mathbf{B}) \to \mathscr{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\,,$$

de sorte que si $\mathscr{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est nul, alors $\mathscr{F}(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{A}, \mathbf{B})$ aussi.

Démontrons ce théorème. Le théorème IV.13 admet une variante évidente à coefficients rationnels, et *mutatis mutandis*, on peut établir la proposition suivante, calque du théorème IV.49 :

Proposition IV.57 *Soit S un schéma régulier. Pour tout entier relatif n, on a une suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{R}^1 \lim\,(K_{n+1}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\Omega} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n]) \to \lim\,(K_n(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\Omega} \to 0\,.$$

Pour conclure, il reste à montrer que $\mathrm{R}^1 \lim\,(K_{n+1}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\Omega}$ est nul, ce qu'assure le lemme suivant :

Lemme IV.58 *Si A un groupe abélien divisible, alors les morphismes de transition du système projectif A^{Ω} sont surjectifs. En particulier,* $\mathrm{R}^1 \lim A^{\Omega} = 0$.

Il faut montrer que l'application $\Omega_{\mathbb{P}^1}\colon A[[U]] \to A[[U]]$ est surjective. Il s'agit de l'application $f \longmapsto (1+U)\frac{df}{dU}$. L'élément $1+U$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}[[U]]$, il agit donc bijectivement sur $A[[U]]$. Il reste à observer que $f \longmapsto \frac{df}{dU}$ est surjective : c'est une reformulation du fait que A soit divisible.

Définition IV.59 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{\Psi}^k \in \lim \mathbb{Q}^{\Omega}$ l'élément donné par la famille compatible $((1+U)^k, \frac{1}{k}(1+U)^k, \frac{1}{k^2}(1+U)^k, \dots)$ d'éléments de $\mathbb{Q}[[U]]$. On note encore $\mathbf{\Psi}^k$ les éléments de $\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$ qui leur correspondent par le théorème IV.55.*

Une propriété de continuité

Définition iv.60 *Pour tout groupe abélien A, on munit* $\lim A^{\Omega}$ *de la topologie limite projective, chaque copie du groupe $A[[U]]$ ayant été munie de la topologie produit (et A de la topologie discrète).*

Grâce à la bijection donnée par le théorème iv.55 et à la définition précédente, on peut munir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n])$ d'une topologie.

Proposition iv.61 *Soit S un schéma régulier. Soit $\mathbf{X} \in \mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$. On munit les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}[-i])$ de la topologie discrète. Alors, pour tout entier naturel n, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n]) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n])$$

donnée par la composition des morphismes dans $\mathcal{SH}(S)$ est continue.

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n])$ est muni de la topologie discrète, on peut fixer $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}[-n])$ et étudier la composition à droite par γ. Quitte à remplacer $\mathbf{X}$ par un objet de $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$ dans lequel il est facteur direct, on peut supposer qu'il existe existe un entier naturel k, $X \in \mathbf{Esp}^{\mathrm{tf}}_{\bullet,S}$ et un isomorphisme $\mathbf{X} \simeq F_k X$ dans $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$ [7]. Quitte à multiplier γ par un entier non nul convenable, γ correspond à un morphisme $f\colon X \to \mathbf{BGL}^{\text{naïf}}_k = \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$. On peut alors conclure comme dans le lemme iv.21.

Quelques calculs

On va maintenant étudier plus attentivement le système projectif A^{Ω} dans le cas où A est un $\mathbb{Q}$-vectoriel.

Définition iv.62 *Pour tout entier naturel n, on pose*

$$p_n = \frac{1}{n!}\log^n(1+U) \in \mathbb{Q}[[U]] \ .$$

Proposition iv.63 *Soit A un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. La flèche $\sigma\colon A^{\mathbb{N}} \to A[[U]]$ définie par*

$$\sigma((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n p_n$$

est un homéomorphisme (A étant muni de la topologie discrète, et les deux groupes $A^{\mathbb{N}}$ et $A[[U]]$ de la topologie produit).

Cela résulte simplement du fait que pour tout entier naturel n, la valuation U-adique de p_n est exactement n.

[7] Cette réduction s'obtient en considérant la construction par Voevodsky de la catégorie de Spanier-Whitehead (cf. [76, §4]). Sa version de type fini est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{SH}(S)$ dont l'enveloppe pseudo-abélienne est $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$ (cf. proposition A.20).

Proposition IV.64 *Soit k un entier relatif. Soit $\Psi^k = (1+U)^k \in \mathbb{Q}[[U]]$. Alors, $\Psi^k = \sigma(1,k,k^2,k^3,\dots)$. Plus précisément, $\Psi^k = \sum_{n\in\mathbb{N}} k^n p_n$.*

Il s'agit d'un calcul très simple sur les séries formelles :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^n p_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{k^n}{n!}\log^n(1+U)\\ &= \exp(k\log(1+U))\\ &= (1+U)^k\\ &= \Psi^k\,.\end{aligned}$$

Proposition IV.65 *Soit A un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On note $s\colon A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ l'application de décalage (vers la gauche) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"] & A[[U]] \arrow[d, "\Omega_{\mathbb{P}^1}"] \\ A^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\sigma"] & A[[U]] \end{tikzcd}$$

Cela résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme IV.66 *Pour tout entier naturel n, on a l'égalité $\Omega_{\mathbb{P}^1}(p_{n+1}) = p_n$ dans $\mathbb{Q}[[U]]$.*

C'est évident, puisqu'il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{(i+1)!}(1+U)\frac{d(\log^{i+1}(1+U))}{dU} = \frac{1}{i!}\log^i(1+U)\,.$$

Corollaire IV.67 *Soit A un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Il existe un homéomorphisme canonique*

$$\Sigma\colon A^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \lim A^{\Omega}$$

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}$. Pour tout entier naturel i, on pose

$$(\Sigma a)_i = \sigma(a_i, a_{i+1},\dots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{i+n}p_n \in A[[U]]\,.$$

Grâce à la proposition IV.65, ceci définit bien un élément $\Sigma a \in \lim A^{\Omega}$. La proposition IV.63 permet de conclure que Σ est un homéomorphisme.

Proposition IV.68 *Soit k un entier relatif. On a l'égalité*

$$\Sigma((k^n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \mathbf{\Psi}^k \in \lim \mathbb{Q}^{\Omega}\,,$$

où $\mathbf{\Psi}^k$ est introduit à la définition IV.59.

C'est évident à partir de ce qui précède.

Théorème iv.69 *Soit S un schéma régulier. On munit $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$ de la structure d'anneau topologique produit (de copies de $\mathbb{Q}$ vu comme anneau discret). L'application composée*

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}} \overset{\Sigma}{\xrightarrow{\sim}} \lim \mathbb{Q}^{\Omega} \to \lim \left(K_0(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right)^{\Omega} \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$$

est un morphisme d'anneaux topologiques.

L'assertion importante de ce théorème est l'affirmation selon laquelle cette application est compatible au produit. La loi multiplicative sur $\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$ est induite par la composition des flèches (en général, elle n'est pas commutative). Cette compatibilité provient du lemme suivant :

Lemme iv.70 *L'application σ définit un isomorphisme d'anneaux topologiques :*

$$\sigma \colon (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}\,[[U]]\,, +, \bigstar)\ .$$

Il s'agit de montrer que pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, on a l'égalité $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a)\bigstar\sigma(b)$. Par densité, on se ramène au cas où $a = (k^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (k'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ pour $(k, k') \in \mathbb{N}^2$. On a bien

$$\sigma(a \cdot b) = \sigma(((kk')^n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (1 + U)^{kk'} = (1 + U)^k \bigstar (1 + U)^{k'} = \sigma(a)\bigstar\sigma(b)\ .$$

4.3 Diagonalisation simultanée des opérations d'Adams

Définition iv.71 *Pour tout entier relatif i, on note π_i la fonction caractéristique de $\{i\}$, vue comme élément de $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$; d'après le théorème iv.69, il lui correspond un endomorphisme de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{SH}\,(S)$ (pour tout schéma régulier S), encore noté π_i.*

Comme élément de $\lim \mathbb{Q}^{\Omega}$, π_i correspond à la suite $(p_{i+n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A\,[[U]]$ (en convenant que $p_k = 0$ si $k < 0$).

Théorème iv.72 *Soit S un schéma régulier. Les éléments $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ forment une famille de projecteurs orthogonaux dans $\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$. Pour tout entier relatif i, le projecteur π_i admet une image notée $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ [8]. De plus, le morphisme canonique*

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$$

est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}\,(S)$.

Vus dans l'anneau $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$, les éléments $(\pi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ forment évidemment une famille d'idempotents orthogonaux. Grâce au théorème iv.69, il en va de même de leurs images dans $\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$. La catégorie $\mathcal{SH}\,(S)$ étant pseudo-abélienne (cf. remarque A.19), ces

[8] La notation est motivée par la construction qu'avait donnée Beilinson des groupes de cohomologie motivique à coefficients rationnels dans [9].

projecteurs admettent des images. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ l'image de π_i ; on note $\iota_i \colon \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ l'inclusion de ce facteur direct, puis

$$\iota \colon \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)} \to \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$$

le morphisme déduit des morphismes $(\iota_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ par passage à la somme directe.

Le lemme suivant est une formalité :

Lemme IV.73 *Soit* $\mathbf{X}$ *un objet de* $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$. *L'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$$

induite par ι *est injective et son image est formée des éléments* $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$ *tels que pour un entier naturel* n *suffisamment grand, on ait l'égalité* $x = \pi_{[-n,n]} \circ x$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$ *où* $\pi_{[-n,n]} = \sum_{i=-n}^{n} \pi_i \in \mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$.

On veut montrer que le morphisme ι est un isomorphisme dans $\mathcal{SH}(S)$. Pour cela, il suffit de montrer que les applications considérées dans le lemme sont bijectives pour tout objet $\mathbf{X}$ de $\mathcal{SH}(S)^{\mathrm{pf}}$. Il ne reste plus qu'à étudier la surjectivité, c'est-à-dire qu'il faut montrer que la condition caractérisant l'image de cette application donnée dans le lemme est vérifiée par tous les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$. Soit $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{X}, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$. La suite $(\pi_{[-n,n]})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$ vers la fonction contante $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ de valeur 1 ; cette limite correspond à l'identité de $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ (cf. théorème IV.69). La propriété de continuité affirmée dans la proposition IV.61 implique que pour un entier naturel n suffisamment grand, on a $\pi_{[-n,n]} \circ x = x$, ce qui achève la démonstration de ce théorème.

Proposition IV.74 *Soit* S *un schéma régulier. Pour tous entiers relatifs* i *et* k, *l'endomorphisme* $\mathbf{\Psi}^k$ *de* $\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}$ *laisse stable le facteur direct* $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ *et l'endomorphisme induit*

$$\mathbf{\Psi}^k \colon \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)} \to \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$$

est la multiplication par k^i.

Il s'agit de montrer l'égalité $\mathbf{\Psi}^k \circ \pi_i = k^i \pi_i$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$; cela résulte d'un calcul trivial dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$ (cf. théorème IV.69 et proposition IV.68).

Corollaire IV.75 *Soit* S *un schéma régulier. Soit* j *un entier naturel. On a une décomposition*

$$K_j(X)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} K_j(X)^{(i)}$$

où $K_j(X)^{(i)}$ *est l'ensemble des* $x \in K_j(X)_{\mathbb{Q}}$ *tels que* $\Psi^k(x) = k^i x$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

A priori, les résultats qui viennent d'être établis donnent ce corollaire avec une somme où l'indice i parcourt $\mathbb{Z}$ au lieu $\mathbb{N}$. Il s'agit donc de montrer que si un élément de $K_j(X)_{\mathbb{Q}}$ est représenté par un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(S)}(S^j \wedge X_+, \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$, alors $\pi_i \circ f = 0$ si $i < 0$. C'est évident : f correspond à un morphisme $S^j \wedge X_+ \to \mathbf{BGL}_0^{\text{naïf}}$ et le morphisme $\mathbf{BGL}_0^{\text{naïf}} \to \mathbf{BGL}_0^{\text{naïf}}$ induit par π_i est nul par construction si $i < 0$.

Remarque IV.76 *On aurait pu procéder de façon différente pour définir les projecteurs π_i : utiliser la décomposition en espaces propres pour les groupes K_0 (cf. théorème II.22) pour définir des projecteurs dans $\mathrm{End}_{\mathscr{A}^{\mathrm{s}}(S)}(K_0^{\mathrm{s}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ et par suite des projecteurs $\pi_i \in \mathrm{End}_{\mathcal{SH}(S)}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}})$; on aurait ensuite pu vérifier que ces projecteurs π_i sont bien donnés par les formules ci-dessus.*

Chapitre V

Régulateurs

Ce chapitre étudie les morphismes $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ dans $\mathscr{H}\,(\mathrm{Spec}\, k)$ et $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\, k)$ de la même manière que l'on a étudié les endomorphismes de $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ et de **BGL** aux chapitres III et IV. Ici, k est un corps parfait, $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ et $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ sont des espaces ou spectres d'Eilenberg-LacLane motiviques. La construction classique des classes de Chern et du caractère de Chern au niveau des groupes $K_0(X)$, $X \in \mathrm{Sm}/\mathrm{Spec}\, k$, donne naissance aux applications du même nom sur les groupes $K_n(X)$ de même qu'au chapitre III, les constructions de SGA 6 sur les groupes $K_0(-)$ s'étendaient canoniquement à la K-théorie algébrique supérieure. L'étude des morphismes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ fait intervenir des systèmes projectifs $A!$ (cf. sous-section 2.3) beaucoup plus simples que les systèmes A^{Ω} intervenant au chapitre IV ; ceci permet de montrer l'existence de morphismes stablement fantômes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}\,[1]$ dans $\mathcal{SH}\,(\mathrm{Spec}\, k)$. On en déduit que si S est un schéma noethérien non vide, alors le foncteur évident $\mathcal{SH}\,(S) \to \mathcal{SH}_{\text{naïve}}\,(S)$ n'est pas une équivalence de catégories.

Dans ce chapitre, on se limite à la cohomologie motivique (il s'agit en fait de calculs sur les groupes de Chow), mais il est évident que les constructions et calculs faits ici vallent aussi, *mutatis mutandis*, pour les théories cohomologiques satisfaisant des propriétés similaires à la cohomologie motivique : cohomologie étale, cohomologie singulière de points complexes, cohomologie de De Rham algébrique (en caractéristique 0)... La contrainte la plus forte sur la théorie cohomologique est qu'elle doit être représentée par un objet de $\mathscr{H}\,(S)$ (ou de $\mathcal{SH}\,(S)$).

1 Espaces d'Eilenberg-MacLane motiviques

1.1 Construction

Définition V.1 (cf. [76, pages 596–597]) *Soit k un corps parfait. Si $X \in \mathrm{Sm}/k$, on note $L(X)$ le faisceau de groupes abéliens sur $\mathrm{Sm}/k_{\mathrm{Nis}}$ tel que pour tout $U \in \mathrm{Sm}/k$, $\Gamma(U, L(X))$ soit le groupe des correspondances finies de U dans X (cf. [78, §2.1]) ; si $(U_i)_{i \in I}$ est un famille finie de sous-schémas de X telle que l'intersection de toute sous-famille de $(U_i)_{i\in I}$ soit un k-schéma lisse, on note $L(X/\cup U_i)$ le quotient (en tant que faisceau de groupes abéliens pour la topologie de Nisnevich) de $L(X)$ par la somme des images des $L(U_i)$ pour $i \in I$. Si (X, x) est un schéma pointé dans Sm/k, on note $L(X, x) = L(X/x)$.*

Définition v.2 *Soit k un corps parfait, soit n un entier naturel. On note $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ le faisceau d'ensembles pointés $L((\mathbb{P}^1, \infty)^{\wedge n})$ sur $\mathrm{Sm}/k_{\mathrm{Nis}}$, c'est-à-dire le quotient de $L((\mathbb{P}^1)^n)$ par la somme des images des morphismes $L((\mathbb{P}^1)^{n-1}) \to L((\mathbb{P}^1)^n)$ induit par les inclusions $(\mathbb{P}^1)^{n-1} \to (\mathbb{P}^1)^n$ de la forme $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \infty, x_i, \dots, x_{n-1})$ pour $1 \leq i \leq n$.*

La proposition suivante résulte de la théorie développée dans [77] au-dessus d'un corps parfait :

Proposition v.3 *Soit (n, i) un couple d'entiers naturels. Pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$, on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(k)}(S^i \wedge X_+, K(\mathbb{Z}(n), 2n)) \simeq H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

*où le membre de droite désigne la cohomologie motivique définie dans [*ibid.*] par*

$$H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{gm}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbb{L}^{\otimes n}[-i])$$

où $\mathbb{L}$ désigne le motif de Lefschetz $\mathbb{Z}(1)[2] = L(\mathbb{P}^1, \infty)$.

Corollaire v.4 *Soit k un corps parfait. Pour tout entier naturel n, on a un isomorphisme canonique :*

$$CH^n(-) \simeq \varphi(K(\mathbb{Z}(n), 2n))$$

dans la catégorie $\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}$ où $CH^n(-)$ désigne le préfaisceau de groupes abéliens sur Sm/k faisant correspondre à $X \in \mathrm{Sm}/k$ le n-ième groupe de Chow $CH^n(X)$ défini dans [21].

D'après [80], les groupes de cohomologie motivique sont isomorphes aux groupes de Chow supérieurs de Bloch ; en particulier, les groupes de Chow usuels peuvent s'interpréter comme des groupes de cohomologie motivique.

1.2 Propriété (K)

Proposition v.5 *Soit k un corps parfait, soit n un entier naturel. L'objet $K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ de $\mathscr{H}_\bullet(k)$ (ainsi que ses espaces de lacets) satisfait la propriété (K) (cf. définition* III.*25).*

Il suffit de vérifier que pour tout quadruplet (d, r, d', r') d'entiers naturels tel que $d \leq d'$ et $r \leq r'$, les flèches évidentes

$$H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(\mathrm{Gr}_{d',r'}, \mathbb{Z}(n)) \to H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(\mathrm{Gr}_{d,r}, \mathbb{Z}(n))$$

sont surjectives pour tout entier naturel i. Cela résulte de la proposition suivante :

Proposition v.6 *Soit k un corps parfait. Soit (d, r, d', r') un quadruplet d'entiers naturels tels que $d \leq d'$ et $r \leq r'$. Alors, le morphisme $\mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d,r}) \to \mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d',r'})$ induit par l'inclusion canonique $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d',r'}$ est un monomorphisme scindé dans la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{gm}(k)$ des motifs effectifs géométriques.*

On peut montrer que pour tout couple (d,r) d'entiers naturels, le motif $\mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d,r})$ est somme directe finie de motifs de la forme $\mathbb{L}^{\otimes i}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Cela résulte de la cellularité des grassmanniennes déjà utilisée ici. C'est également le cas du motif $\mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d',r'} - \mathrm{Gr}_{d,r})$ de l'ouvert complémentaire de l'inclusion $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d',r'}$ puisque cet ouvert est lui aussi cellulaire. En utilisant ces faits, les triangles distingués de Gysin dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ (cf. [78, proposition 3.5.4]) et l'annulation des groupes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes i}, \mathbb{L}^{\otimes j}[1])$ pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on obtient la proposition ci-dessus. L'affirmation concernant l'ouvert complémentaire des inclusions entre grassmanniennes peut s'obtenir grâce à une récurrence convenable à partir du lemme géométrique suivant :

Lemme v.7 *Soit (d,r) un couple d'entiers naturels. Soit U le sous-schéma ouvert de $\mathrm{Gr}_{d,r+1}$ défini de sorte que pour tout schéma X, l'ensemble de points $U(X)$ soit le sous-ensemble de $\mathrm{Gr}_{d,r+1}(X)$ formé des sous-$\mathscr{O}_X$-Modules $\mathscr{M}$ de $\mathscr{O}_X^{d+r+1}$ localement facteurs directs de rang d tels que la dernière projection $p_{d+r+1} \colon \mathscr{M} \to \mathscr{O}_X$ soit un épimorphisme. Ce sous-schéma ouvert U de $\mathrm{Gr}_{d,r+1}$ est l'ouvert complémentaire de l'immersion fermée canonique $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d,r+1}$.*

On suppose $d \geq 1$. On note $\mathscr{H}$ le sous-$\mathscr{O}_U$-Module de $\mathscr{M}'_{d,r+1|U}$ noyau de la dernière projection $p_{d+r+1} \colon \mathscr{M}'_{d,r+1|U} \to \mathscr{O}_U$; il s'identifie à un sous-$\mathscr{O}_U$-Module de $\mathscr{O}_U^{d+r}$ localement facteur direct de rang $d-1$, déterminant ainsi un morphisme $U \to \mathrm{Gr}_{d-1,r+1}$. Alors, ce morphisme $U \to \mathrm{Gr}_{d-1,r+1}$ fait partie d'une structure de torseur sous le fibré vectoriel $\mathscr{M}''_{d-1,r+1}$ sur $\mathrm{Gr}_{d-1,r+1}$.

En particulier, si k est un corps parfait, on a un isomorphisme dans $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\mathit{gm}}(k)$:

$$\mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d,r+1} - \mathrm{Gr}_{d,r}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}(\mathrm{Gr}_{d-1,r+1}) \; .$$

C'est essentiellement trivial.

On dispose bien entendu d'un énoncé dual étudiant le complémentaire de l'inclusion $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{1+d,r}$.

Remarque v.8 *L'argument utilisé ici pour obtenir la condition de surjectivité impliquant la propriété (K) est vrai non seulement pour la cohomologie motivique, mais aussi pour toute théorie cohomologique « se factorisant » par une catégorie convenable de motifs : il suffit de pouvoir évaluer la théorie cohomologique sur les motifs de Chow (motifs purs pour l'équivalence rationnelle définis par Grothendieck), vu que les grassmanniennes sont des variétés projectives lisses.*

Grâce au théorème iii.27, la propriété (K) permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème v.9 *Soit k un corps parfait. Pour tout entier naturel n, les applications évidentes ci-dessous sont bijectives :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, K(\mathbb{Z}(n),2n)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-), CH^n(-)) \arrow[d, "\sim"] \\
& \left[\lim\limits_{(d,r) \in \mathbb{N}^2} CH^n(\mathrm{Gr}_{d,r}) \right]^{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

1.3 Classes de Chern

Dans [29], Grothendieck associe à tout fibré vectoriel $\mathscr{M}$ sur $X \in \mathrm{Sm}/k$ des classes de Chern $c_n(\mathscr{M}) \in CH^n(X)$ pour $n \geq 1$ (cf. [21] pour la définition des groupes de Chow) [1]. On peut aussi définir, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$ et $x \in K_0(X)$, une série formelle

$$c_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(x) t^n \in CH^\star(X)\,[[t]]$$

avec $c_n(x) \in CH^n(X)$ (noter que la graduation fait que l'élément $c(x) = c_{t=1}(x)$ détermine $c_t(x)$). Ces polynômes de Chern sont caractérisés par les propriétés suivantes :

(1) Pour tout faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $X \in \mathrm{Sm}/k$ et toute section rationnelle s de $\mathscr{L}$, alors
$$c_t([\mathscr{L}]) = 1 + [\operatorname{div} s]\, t \ ;$$

(2) Si x et y sont deux éléments de $K_0(X)$ pour $X \in \mathrm{Sm}/k$, alors
$$c_t(x+y) = c_t(x) c_t(y) \ ;$$

(3) Pour tout morphisme $f \colon Y \to X$ dans Sm/k et tout élément $x \in K_0(X)$, on a l'égalité suivante :
$$c_t(f^\star(x)) = f^\star(c_t(x)) \ .$$

On obtient ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$, un morphisme dans $\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}_\bullet$:

$$c_n \colon K_0(-) \to CH^n(-) \ .$$

D'après le théorème V.9, ces transformations naturelles correspondent à des morphismes $c_n \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet(k)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}, K(\mathbb{Z}(n), 2n))$ pour $n \geq 1$. On en déduit des applications

$$c_n \colon K_j(X) \to H^{2n-j}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$ et $j \in \mathbb{N}$.

A. Grothendieck a montré que la théorie des classes de Chern permettait de calculer les groupes de Chow des grassmanniennes. On peut donc préciser le théorème V.9 :

Proposition V.10 *Soit k un corps parfait. Soit d un entier naturel. Le morphisme continu d'anneaux évident*
$$\mathbb{Z}\,[[c_1, \ldots, c_d]] \to CH^\star(\mathrm{Gr}_{d,\infty})$$
tel que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq d$, l'image de c_i soit le système compatible formé par les éléments $c_i(\mathscr{M}_{d,r})$ pour $r \in \mathbb{N}$, est un isomorphisme, où on a posé

$$CH^\star(\mathrm{Gr}_{d,\infty}) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \lim_{r \in \mathbb{N}} CH^k(\mathrm{Gr}_{d,r}) \ .$$

[1] Pour cette construction, il y aurait peut-être lieu de se restreindre aux variétés quasi-projectives. On peut donc soit remplacer Sm/k par la sous-catégorie pleine formée des variétés quasi-projectives, soit étendre les constructions à tout Sm/k en utilisant l'astuce de Jouanolou.

Le calcul de l'anneau de Chow des grassmanniennes (et plus généralement des fibrés de drapeaux) est fait dans [28] (le résultat est le même que pour les groupes K_0, cf. SGA 6 VI 4). Le passage à la limite $r \to +\infty$ a déjà été utilisé ici pour la K-théorie algébrique, c'était SGA 6 VI 4.10. Cette démonstration vaut aussi pour les anneaux de Chow.

Remarque v.11 *Le calcul de la cohomologie des grassmanniennes fait dans [28] (et repris dans SGA 6 VI 4) vaut pour les théories cohomologiques orientées (cf. [52]), Grothendieck n'utilisant pas réellement le fait que la première classe de Chern soit additive. On peut ainsi obtenir la propriété (K) pour les objets de $\mathscr{H}(S)$ représentant des théories cohomologiques orientées.*

De même que pour la K-théorie algébrique (cf. théorème ii.28), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire v.12 *Soit k un corps parfait. On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{Z}\,[[c_1, \dots, c_n, \dots]] \xrightarrow{\sim} CH^\star(\mathrm{Gr}_{\infty,\infty}) = \prod_{k\in\mathbb{N}} \lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} CH^k(\mathrm{Gr}_{d,r}) \ .$$

Grâce au théorème v.9, ces calculs permettent d'obtenir le théorème suivant :

Théorème v.13 *Soit k un corps parfait. Il existe une bijection canonique :*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}, K(\mathbb{Z}(n), 2n)) \cong (\mathbb{Z}\,[[c_1, \dots, c_n, \dots]])^{\mathbb{Z}} \ .$$

Remarque v.14 *On peut décomposer $\mathbb{Z}\,[[c_1, \dots, c_n, \dots]]$ en composantes homogènes en décrétant que c_n est de degré n pour tout $n \geq 1$; ceci permet de décrire le groupe abélien*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(k)}(\mathbb{Z}\times \mathrm{Gr}, K(\mathbb{Z}(n), 2n)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-), CH^n(-)) \ ;$$

il s'agit du $\mathbb{Z}$-module libre dont une base est en bijection avec l'ensemble des partitions λ de n, c'est-à-dire que λ est de la forme $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 1$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = n$.

1.4 Le principe de scindage

On dispose d'un analogue du théorème iv.13 pour les groupes de Chow :

Théorème v.15 *Soit k un corps parfait. Pour tout entier naturel n, l'application évidente est bijective :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), CH^n(-)) \to \lim_{r\in\mathbb{N}} CH^n(\mathbb{P}^r) \xleftarrow{\sim} \mathbb{Z} \ .$$

Cette application fait correspondre à une transformation naturelle additive $\tau\colon K_0(-) \to CH^n(-)$ le système compatible formé par les images de $[\mathscr{O}(1)] \in K_0(\mathbb{P}^r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n, on note $\chi_n\colon K_0(-) \to CH^n(-)$ la transformation naturelle telle que pour tout fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $X \in \mathrm{Sm}/k$, on ait $\chi_n([\mathscr{L}]) = D^n \in CH^n(X)$ où D le diviseur d'une section rationnelle de $\mathscr{L}$.

Par principe de scindage, cette application est injective. On observe ensuite que le groupe abélien $CH^n(\mathbb{P}^\infty) = \lim_{r\in\mathbb{N}} CH^n(\mathbb{P}^r)$ s'identifie à $\mathbb{Z}$ et qu'un générateur de $CH^n(\mathbb{P}^r)$ (pour $r \geq n$) est H^n où H est un hyperplan de $\mathbb{P}^r$. Pour montrer la surjectivité de l'application envisagée dans ce théorème, il suffit de construire une transformation naturelle additive $\chi_n \colon K_0(-) \to CH^n(-)$ telle que si $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur $X \in \mathrm{Sm}/k$ dont une section rationnelle a pour diviseur D, alors $\chi_n([\mathscr{L}]) = D^n$. Pour $n = 0$, la transformation naturelle essentiellement donnée par le rang des fibrés vectoriels donne χ_0. En appliquant le lemme algébrique qui suit aux polynômes de Chern (cf. plus bas), on va pouvoir conclure dans les cas non-triviaux ($n \geq 1$) :

Lemme V.16 *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un unique morphisme de groupes fonctoriel en l'anneau commutatif A*

$$\chi_n \colon (1 + A\,[[t]]^+\,, \times) \to A$$

passant au quotient par $1 + t^{n+1}A\,[[t]]$ et tel que pour tout $x \in A$, $\chi_n(1 + xt) = x^k$.

Remarque V.17 *On peut noter que si la transformation naturelle χ_n donnée par ce lemme existe, alors l'image d'une série $1 + \sum_{n\geq 1} a_n t^n$ est donnée par un polynôme à coefficients entiers en les coefficients $a_1, \ldots, a_n$. En effet, χ_n définit un morphisme de schémas en groupes affines $\chi_n \colon G \to \mathbb{G}_a$ où $G = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}\,[A_1, \ldots, A_n]$, la comultiplication $\mu^\star$ étant déterminée par $\mu^\star(A_k) = \sum_{i+j=k} A_i \otimes A_j$.*

Établissons ce lemme. On note $S_n \in \mathbb{Z}\,[\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n]$ le n-ième polynôme de Newton : si on remplace Σ_i par la i-ème fonction symétrique élémentaire en les n variables $X_1, \ldots, X_n$, S_n devient le polynôme symétrique $X_1^n + \cdots + X_n^n$. Les fonctions symétriques élémentaires sont définies par l'égalité

$$X^n + \Sigma_1 X^{n-1} + \cdots + \Sigma_{n-1} X + \Sigma_n = \prod_{i=1}^{n} (X + X_i)\ .$$

Soit A un anneau commutatif. On pose

$$\chi_n\left(1 + \sum_{n\geq 1} a_n t^n\right) = S_n(a_1, \ldots, a_n)\ .$$

Soit $a \in A$. Calculons $\chi_n(1 + at)$. On a l'égalité évidente

$$X^n + aX^{n-1} = (X + a)X^{n-1}\ .$$

Par définition, il vient que $\chi_n(1+at) = a^n$. Il reste à montrer que χ_n définit un morphisme de groupes. Il s'agit ainsi de montrer que si $s = 1+a_1t+\cdots+a_nt^n$ et $s' = 1+b_1t+\cdots+b_nt^n$, alors $\chi_n(ss') = \chi_n(s) + \chi_n(s')$. Par « principe de scindage » (cf. SGA 6 VI 4.3 et SGA 6 VI 4.4), il existe un morphisme injectif d'anneaux $A \to \tilde{A}$ et des éléments $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ de $\tilde{A}$ tels que

$$s = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) \qquad s' = \prod_{i=1}^{n} (1 + y_i t)\ .$$

On peut évidemment supposer que $A = \tilde{A}$. Par définition, on a

$$\chi_n(s) = x_1^n + \cdots + x_n^n \qquad \chi_n(s') = y_1^n + \cdots + y_n^n$$

Il reste à calculer $\chi_n(ss')$. On a une factorisation

$$ss' = (1 + x_1 t) \dots (1 + x_n t)(1 + y_1 t) \dots (1 + y_n t) \ .$$

On définit des coefficients $\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}$ par la formule

$$ss' = 1 + \sum_{i=1}^{2n} \sigma_i t^i \ ;$$

ces coefficients sont les fonctions symétriques élémentaires sur $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

On considère le polynôme $X_1^n + \cdots + X_n^n + Y_1^n + \cdots + Y_n^n$, c'est un polynôme symétrique en les $2n$ variables $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$, on peut le récrire sous la forme d'un polynôme $S_{n,2n}$ en les polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2n}$ en ces $2n$ variables. J'affirme que l'on a l'égalité $S_{n,2n} = S_n$ [2], de sorte que l'on a bien $\chi_n(ss') = \chi_n(s) + \chi_n(s')$ comme voulu. Il reste à justifier que $S_{n,2n} = S_n$. Pour des raisons d'homogénéité, $S_{n,2n}$ ne peut dépendre que des variables $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$; ensuite, en faisant « $Y_1 = \cdots = Y_n = 0$ », on obtient la relation voulue $S_{n,2n} = S_n$. L'existence de χ_n est établie ; l'unicité résulte du « principe de scindage » que l'on a mentionné.

Le lemme est donc établi. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit d'appliquer le morphisme χ_n du lemme au polynôme de Chern $c_t(x)$ associé à tout élément $x \in K_0(X)$ ($X \in \mathrm{Sm}/k$) pour obtenir la transformation naturelle additive $\chi_n \colon K_0(-) \to CH^n(-)$ voulue.

Les relations de Newton (cf. [73, §14.11]) permettent de calculer des formules explicites pour χ_k en fonction des classes de Chern, pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\chi_k - c_1\chi_{k-1} + c_2\chi_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} c_{k-1}\chi_1 + (-1)^k k c_k = 0 \ .$$

Les premières formules sont ainsi :

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= c_1 \ ; \\
\chi_2 &= c_1^2 - 2c_2 \ ; \\
\chi_3 &= c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3 \ ; \\
\chi_4 &= c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4 \ ; \\
\chi_5 &= c_1^5 - 5c_1^3c_2 + 5c_1^2c_3 + 5c_1c_2^2 - 5c_1c_4 - 5c_2c_3 + 5c_5 \ .
\end{aligned}$$

Le théorème V.15 se généralise trivialement sous la forme suivante :

[2] On peut considérer que cette égalité est contenue dans les relations de Newton, mais l'argument qui suit en donne une autre justification.

Théorème v.18 *Soit k un corps parfait. Soit (n,i) un couple d'entiers naturels. On a une bijection canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(-;\mathbb{Z}(n))) \xrightarrow{\sim} \lim_{r\in\mathbb{N}} H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(\mathbb{P}^r, \mathbb{Z}(n)) \ .$$

En effet, la démonstration de l'injectivité de cette application se démontre de la même manière ; pour la surjectivité, on utilise le fait que tout élément de $H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(\mathbb{P}^r, \mathbb{Z}(n))$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $x_j \cdot H^j$ pour $0 \leq j \leq r$ avec H un hyperplan de $\mathbb{P}^r$ et $x_j \in H^{2n-2j-i}_{\mathscr{M}}(k, \mathbb{Z}(n-j))$. On peut conclure en utilisant les transformations naturelles $x_j \cdot \chi_j$.

2 Spectres d'Eilenberg-MacLane motiviques

2.1 Définition

Définition v.19 *Soit k un corps parfait. Pour tout entier naturel n, on note $\sigma_n\colon (\mathbb{P}^1,\infty)\wedge K(\mathbb{Z}(n),2n) \to K(\mathbb{Z}(n+1),2n+2)$ le morphisme de faisceaux d'ensembles pointés sur $\mathrm{Sm}/k_{\mathrm{Nis}}$ obtenu à partir de l'inclusion évidente $\mathbb{P}^1 \to L(\mathbb{P}^1,\infty)$ et de la construction « produit externe de correspondances finies » $L(\mathbb{P}^1,\infty) \wedge L((\mathbb{P}^1,\infty)^{\wedge n}) \to L((\mathbb{P}^1,\infty)^{\wedge 1+n})$. On note $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{P}^1$-spectre ainsi obtenu.*

Théorème v.20 *Le $\mathbb{P}^1$-spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$ est un Ω-spectre, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, le morphisme adjoint de $(\mathbb{P}^1,\infty)\wedge K(\mathbb{Z}(n),2n) \to K(\mathbb{Z}(n+1),2n+2)$ dans $\mathscr{H}_\bullet(k)$ est un isomorphisme :*

$$K(\mathbb{Z}(n),2n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\bullet((\mathbb{P}^1,\infty), K(\mathbb{Z}(n+1),2n+2)) \ .$$

Dans le cas où le corps k est de caractéristique zéro, c'est [76, theorem 6.2]. Sans utiliser la résolution des singularités, on peut dire que ce théorème découle d'une formule du « fibré projectif » pour les groupes de cohomologie motivique, ce qui s'obtient en utilisant la comparaison [80] avec les groupes de Chow supérieurs de Bloch [10] qui vérifient cette formule. On peut aussi y voir un cas particulier du *"cancellation theorem"* [79].

2.2 Laçage

Définition v.21 *Soit (n,i) un couple d'entiers naturels, avec $n \geq 1$. Soit $\tau\colon K_0(-) \to H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(-,\mathbb{Z}(n))$ une transformation naturelle additive. On définit une nouvelle transformation naturelle additive $\Omega_{\mathbb{P}^1}(\tau)\colon K_0(-) \to H^{2n-2-i}_{\mathscr{M}}(-,\mathbb{Z}(n-1))$ de façon à rendre commutatif le diagramme suivant, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$:*

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "x \mapsto u\boxtimes x"] \arrow[d, "\Omega_{\mathbb{P}^1}(\tau)"] & K_0(\mathbb{P}^1 \times X) \arrow[d, "\tau"] \\ H^{2n-2-i}_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Z}(n-1)) \arrow[r, "\infty\boxtimes -"] & H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(\mathbb{P}^1\times X,\mathbb{Z}(n)) \end{tikzcd}$$

où le morphisme du bas est induit par le produit externe avec l'élément $[\infty] \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_k)$ [3] *et où* $u = [\mathscr{O}(1)] - 1 \in K_0(\mathbb{P}^1)$.

Proposition v.22 *Soit k un corps parfait. Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\chi_n\colon K_0(-) \to CH^n(-)$ la transformation naturelle introduite au théorème* v.15. *On a la relation suivante :*

$$\Omega_{\mathbb{P}^1}(\chi_n) = n\chi_{n-1}\ .$$

Il s'agit de montrer la commutativité du diagramme suivant, pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$:

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "x \mapsto u \boxtimes x"] \arrow[d, "n\chi_{n-1}"] & K_0(\mathbb{P}^1 \times X) \arrow[d, "\chi_n"] \\ CH^{n-1}(X) \arrow[r, "\infty \boxtimes -"] & CH^n(\mathbb{P}^1 \times X) \end{tikzcd}$$

Par principe de scindage, il suffit de considérer les éléments de $K_0(X)$ de la forme $x = [\mathscr{L}]$ où $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur X. Soit D le diviseur d'une section rationnelle de $\mathscr{L}$. Par définition, on a $\chi_{n-1}(x) = D^{n-1} \in CH^{n-1}(X)$. Dans $K_0(\mathbb{P}^1 \times X)$, on a l'égalité :

$$u \boxtimes x = [\mathscr{O}(1) \boxtimes \mathscr{L}] - [\mathscr{O} \boxtimes \mathscr{L}]\ .$$

On en déduit que $\chi_n(u \boxtimes x) = (\mathrm{pr}_1^\star \infty + \mathrm{pr}_2^\star D)^n - \mathrm{pr}_2^\star D^n$ (où pr_1 et pr_2 sont les deux projections depuis $\mathbb{P}^1 \times X$). Comme $\infty^2 = 0 \in CH^2(\mathbb{P}^1_k)$, il vient que

$$\chi_n(u \boxtimes x) = \infty \boxtimes (nD^{n-1}) = \infty \boxtimes (n\chi_{n-1}([\mathscr{L}]))\ ,$$

ce qui permet de conclure.

$\star$
$\star\ \star$

On note $\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$ l'image dans la catégorie triangulée $\mathrm{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ du faisceau avec transferts $\operatorname{colim}_{r \in \mathbb{N}} L(\mathbb{P}^r)$. En utilisant [78, proposition 3.5.1], on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{L}^{\otimes k}\ .$$

Ceci permet de donner un sens aux groupes de cohomologie motivique de $\mathbb{P}^\infty$.

Proposition v.23 *Soit k un corps parfait. Soit (n,i) un couple d'entiers naturels. Il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(-,\mathbb{Z}(n))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{-,\mathit{eff}}(k)}(\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty), \mathbb{L}^{\otimes n}[-i])$$

[3] Le produit externe est à comprendre comme provenant de la structure tensorielle sur la catégorie triangulée $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$. On peut vérifier que la flèche $\infty \boxtimes -$ ainsi définie coïncide avec celle déduite du morphisme d'assemblage $\sigma_{n-1}\colon (\mathbb{P}^1, \infty) \wedge K(\mathbb{Z}(n-1), 2n-2) \to K(\mathbb{Z}(n), 2n)$ du $\mathbb{P}^1$-spectre $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}$.

$$\xrightarrow{\sim} \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{gm}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes k}, \mathbb{L}^{\otimes n}[-i]) \xleftarrow{\sim} \prod_{j=0}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{gm}(k)}(\mathbf{1}, \mathbb{L}^{\otimes j}[-i])\ ;$$

finalement, on obtient une bijection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}(K_0(-), H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(-,\mathbb{Z}(n))) \xrightarrow{\sim} \prod_{j=0}^{n} H^{2j-i}_{\mathscr{M}}(k,\mathbb{Z}(j))\ .$$

Le premier isomorphisme résulte du théorème v.15 et du fait que les morphismes évidents de motifs $\mathbf{M}(\mathbb{P}^n) \to \mathbf{M}(\mathbb{P}^{n+1})$ sont des monomorphismes scindés ; le deuxième de l'isomorphisme canonique

$$\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{L}^{\otimes k}\ ,$$

et le troisième du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes k}, \mathbb{L}^{\otimes n}[-i]) = 0$ si $k > n$ et de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes k}, \mathbb{L}^{\otimes n}[-i]) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbf{1}, \mathbb{L}^{\otimes n-k}[-i])$$

déduit du *“cancellation theorem”* [4].

L'application $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ de la définition v.21 s'interprète donc simplement en termes de groupes de cohomologie motivique, la proposition suivante la décrit en ces termes :

Proposition v.24 *Soit k un corps parfait. Soit (n,i) un couple d'entiers naturels. On suppose que $n \geq 1$. L'application*

$$\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon \prod_{j=0}^{n} H^{2j-i}_{\mathscr{M}}(k,\mathbb{Z}(j)) \to \prod_{j=0}^{n-1} H^{2j-i}_{\mathscr{M}}(k,\mathbb{Z}(j))$$

est caractérisée par le fait que sur le facteur $H^{2j-i}_{\mathscr{M}}(k,\mathbb{Z}(j))$ (pour $0 \leq j \leq n-1$), elle correspond à la multiplication par l'entier $n-j$.

On l'a déjà vu dans le cas où $i = 0$ puisqu'alors $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ s'identifie à une application $\Omega_{\mathbb{P}^1} \colon \mathbb{Z}\chi_n \to \mathbb{Z}\chi_{n-1}$ où $\mathbb{Z}$ correspond à $CH^0(X) = H^0_{\mathscr{M}}(k,\mathbb{Z})$, la proposition v.22 donne bien que l'image de χ_n est $n\chi_{n-1}$. Le cas général en résulte formellement ; donnons-en une autre démonstration « motivique ».

On considère le plongement de Segre $s_{1,n} \colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{2n+1}$. L'image inverse du fibré en droites $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^{2n+1}$ par ce morphisme est isomorphe à $\mathscr{O}(1) \boxtimes \mathscr{O}(1)$. Par passage à la limite, les morphismes $s_{1,n}$ donnent naissance à un morphisme

$$s \colon\ \mathbf{M}(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \to \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$$

dans la catégorie $\mathrm{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$. On dispose d'un autre morphisme $p\colon\ \mathbf{M}(\mathbb{P}^1) \otimes \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \to \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$ correspondant au produit tensoriel avec $\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$ de la projection $\mathbf{M}(\mathbb{P}^1) \to \mathbf{1}$.

[4] Noter que la transposition agit par l'identité sur $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$, il n'est donc pas nécessaire de préciser si on tensorise à gauche ou à droite avec $\mathbb{L}^{\otimes k}$.

On note $\tilde{s} = s - p$ la différence entre ces deux morphismes ($\mathrm{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ est une catégorie additive). On voit aussitôt qu'il existe un unique morphisme $\sigma\colon \mathbb{L}\otimes\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \to \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{M}(\mathbb{P}^1)\otimes\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \arrow[r] \arrow[dr, "\tilde{s}"'] & \mathbb{L}\otimes\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \arrow[d, "\sigma"] \\
& \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)
\end{tikzcd}$$

En utilisant l'isomorphisme canonique $\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{L}^{\otimes k}$, le morphisme σ se récrit sous la forme d'un morphisme

$$\sigma\colon \bigoplus_{k\geq 1}\mathbb{L}^{\otimes k} \to \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{L}^{\otimes k} \ .$$

Lemme v.25 *Soit k un corps parfait. Le morphisme σ est caractérisé par la commutativité des diagrammes suivants pour $k\geq 1$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}^{\otimes k} \arrow[r, hook] \arrow[d, "x\longmapsto kx"] & \bigoplus_{k\geq 1}\mathbb{L}^{\otimes k} \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathbb{L}^{\otimes k} \arrow[r, hook] & \bigoplus_{k\geq 0}\mathbb{L}^{\otimes k}
\end{tikzcd}$$

En utilisant le fait que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes i},\mathbb{L}^{\otimes j}) = 0$ si $i\neq j$ et que $\mathrm{End}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{L}^{\otimes i})$ pour tout entier naturel i, on remarque qu'il suffit de vérifier que σ induit la multiplication par k après application du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(-,\mathbb{L}^{\otimes k})$.

Pour cela, on revient à la construction de σ. On a des isomorphismes $CH^\star(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}\left[\infty\right]/\infty^2$, $CH^\star(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}\left[[D]\right]$ où D est le générateur canonique de $CH^1(\mathbb{P}^\infty)$. De façon cohérente avec ces notations, on a un isomorphisme d'anneaux

$$CH^\star(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}\left[[D]\right]\left[\infty\right]/\infty^2 \ .$$

Le morphisme $s^\star\colon CH^\star(\mathbb{P}^\infty)\to CH^\star(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^\infty)$ est un morphisme d'anneaux ; comme on a $s^\star(D) = D+\infty$, il vient plus généralement que $s^\star(D^n) = (D+\infty)^n = D^n + n\infty D^{n-1}$ pour tout entier naturel $n\geq 1$. Par ailleurs, $p^\star(D^n) = D^n$. On en déduit que le morphisme $\tilde{s}\colon \mathbf{M}(\mathbb{P}^1)\otimes\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)\to\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)$ est tel que

$$\tilde{s}^\star(D^n) = s^\star(D^n) - p^\star(D^n) = n\infty D^{n-1} \in CH^n(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^\infty) \ ,$$

ce qui est précisément ce que l'on voulait montrer.

On déduit facilement la proposition v.24 à partir de ce lemme en utilisant les isomorphismes déjà obtenus et en observant que si $\tau\colon K_0(-)\to H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(-,\mathbb{Z}(n))$ correspond à un morphisme $\tau\colon \mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty)\to\mathbb{L}^{\otimes n}$ dans $\mathrm{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}\otimes\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \arrow[r, "\mathbb{L}\otimes\Omega_{\mathbb{P}^1}(\tau)"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbb{L}\otimes\mathbb{L}^{\otimes n-1} \arrow[d, equal] \\
\mathbf{M}(\mathbb{P}^\infty) \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{L}^{\otimes n}
\end{tikzcd}$$

⋆
⋆ ⋆

La constructions des espaces et spectres d'Eilenberg-MacLane motiviques peut se faire avec des coefficients arbitraires : on peut remplacer $\mathbb{Z}$ par un groupe abélien quelconque. Les résultats obtenus ici par principe de scindage s'étendent évidemment à ces variantes.

2.3 Une famille de systèmes projectifs

Définition v.26 *Soit A un groupe abélien. On note $A!$ le système projectif de groupes abéliens indexé par $\mathbb{N}$ défini par $(A!)_n = A$, le morphisme de transition $(A!)_n \to (A!)_{n-1}$ étant la multiplication par n sur A pour tout entier $n \geq 1$.*

Proposition v.27 *Soit A un groupe abélien. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\lim\, A!\ ;$$

plus concrètement, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A) \xrightarrow{\sim} \lim\, A!\ , \qquad \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 \lim\, A!\ .$$

Il suffit de remarquer que $\mathbb{Q}$ s'identifie à la colimite d'un système inductif

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{4} \dots$$

dont $\mathbb{Z}!$ est le système projectif dual.

En particulier, si A est un $\mathbb{Q}$-vectoriel, $\lim\, A! \xrightarrow{\sim} A$ et $\mathrm{R}^1 \lim\, A! = 0$; si A est un groupe abélien fini, $\mathrm{R}\lim\, A! = 0$.

2.4 Décalage de systèmes projectifs

Définition v.28 *Soit $X_\bullet = (\dots \to X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \to \dots \to X_1 \xrightarrow{f_0} X_0)$ un système projectif de groupes abéliens indexé par $\mathbb{N}$, on note $s_+X_\bullet$ le système projectif décalé*

$$\dots \to X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \to \dots \to X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 \to 0\ .$$

c'est-à-dire que $(s_+X_\bullet)_{n+1} = X_n$ pour tout entier naturel n et que $(s_+X_\bullet)_0 = 0$, les morphismes de transition étant les flèches évidentes.

Proposition v.29 *Soit $X_\bullet$ un système projectif de groupes abéliens indexé par $\mathbb{N}$. Le morphisme canonique $X_\bullet \to s_+X_\bullet$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\lim\, X_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\lim\, s_+X_\bullet\ .$$

Le morphisme évident $X_\bullet \to s_+X_\bullet$ est donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_3"] & X_3 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_2"] & X_2 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1"] & X_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "f_0"] & X_0 \arrow[d, "0"] \\
\cdots \arrow[r, "f_2"] & X_2 \arrow[r, "f_1"] & X_1 \arrow[r, "f_0"] & X_0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme est fonctoriel en $X_\bullet$. Il est clair que si $X_\bullet$ vérifie la propriété de Mittag-Leffler, alors $s_+X_\bullet$ aussi. En outre, il est évident que la flèche $\lim X_\bullet \to \lim s_+X_\bullet$ est bijective et que s_+ est exact. On en déduit formellement l'énoncé au niveau du foncteur dérivé total $\mathrm{R}\lim$.

2.5 Résultats

Proposition V.30 *Soit k un corps parfait. Pour tout groupe abélien A et tout entier relatif i, il existe un isomorphisme canonique de systèmes projectifs*

$$(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sm}/k^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ab}}((K_0^{\mathrm{s}})_n, (\varphi^{\mathrm{s}}\mathbf{H}_A\,[-i])_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} \prod_{k=0}^{\infty} s_+^k H_{\mathscr{M}}^{2k-i}(k, A(k))!$$

(cf. définition IV.47 *pour le membre de gauche).*

Dans le cas $i \geq 0$, cela résulte aussitôt des résultats précédents (cf. propositions V.23 et V.24). Pour $i < 0$, les deux objets considérés sont nuls.

Grâce au théorème IV.48 (dont les hypothèses sont vérifiées d'après la proposition V.5), on en déduit le théorème suivant :

Théorème V.31 *Soit k un corps parfait. Soit A un groupe abélien. Soit i un entier relatif. Dans la suite exacte courte*

$$\begin{aligned}0 \to \mathscr{F}(\mathbf{BGL}, \mathbf{H}_A\,[-i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{H}_A\,[-i])& \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{na\ddot{i}ve}(k)}(\mathbf{BGL}^{na\ddot{i}f}, \mathrm{oub}\,\mathbf{H}_A\,[-i]) \to 0&\ ,\end{aligned}$$

on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}_{na\ddot{i}ve}(k)}(\mathbf{BGL}^{na\ddot{i}f}, \mathrm{oub}\,\mathbf{H}_A\,[-i]) &\simeq \lim \prod_{k=0}^{\infty} s_+^k H_{\mathscr{M}}^{2k-i}(k, A(k))! \\ &\simeq \prod_{k=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, H_{\mathscr{M}}^{2k-i}(k, A(k)))\ ,\end{aligned}$$

$$\mathscr{F}(\mathbf{BGL}, \mathbf{H}_A\,[-i]) \simeq \mathrm{R}^1 \lim \prod_{k=0}^{\infty} s_+^k H_{\mathscr{M}}^{2k-i-1}(k, A(k))! \simeq \prod_{k=0}^{\infty} \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, H_{\mathscr{M}}^{2k-i-1}(k, A(k)))\ .$$

Ce théorème permet de montrer l'existence de morphismes stablement fantômes dans $\mathcal{SH}(k)$, ce qui n'était pas évident *a priori* :

Corollaire v.32 *Soit k un corps parfait. Tous les morphismes* $\mathbf{BGL} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}[1]$ *dans* $\mathcal{SH}(k)$ *sont stablement fantômes et*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)}(\mathbf{BGL}, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}[1]) \simeq \mathrm{R}^1 \lim \mathbb{Z}! = \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \simeq \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \; .$$

Corollaire v.33 *Soit k un corps parfait. Le foncteur* $\mathcal{SH}(k) \to \mathcal{SH}_{\text{naïve}}(k)$ *n'est pas une équivalence de catégories.*

Le corollaire v.32 admet plus généralement le corollaire suivant :

Corollaire v.34 *Soit S un schéma noethérien non vide. Le foncteur*

$$\mathrm{oub}\colon \mathcal{SH}(S) \to \mathcal{SH}_{\textit{naïve}}(S)$$

n'est pas une équivalence de catégories.

En effet, on peut choisir un morphisme de schémas $f\colon \operatorname{Spec} k \to S$ où k est un corps parfait. Compte tenu de l'isomorphisme canonique $\mathrm{L}f^\star\mathbf{BGL}_S \simeq \mathbf{BGL}_k$ dans $\mathcal{SH}(k)$ (cf. définition IV.46), un morphisme stablement fantôme $\phi\colon \mathbf{BGL}_k \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}[1]$ dans $\mathcal{SH}(k)$ correspond par adjonction à un morphisme $\phi'\colon \mathbf{BGL}_S \to \mathrm{R}f_\star\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}[1]$ dans $\mathcal{SH}(S)$. Comme ϕ est non nul, ϕ' non plus ; le fait que le morphisme ϕ' soit stablement fantôme résulte du lemme suivant :

Lemme v.35 *Soit $f\colon T \to S$ un morphisme entre schémas noethériens. Soit $\phi\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ un morphisme stablement fantôme dans $\mathcal{SH}(S)$. Alors le morphisme $\mathrm{R}f_\star(\phi)\colon \mathrm{R}f_\star\mathbf{E} \to \mathrm{R}f_\star\mathbf{F}$ est stablement fantôme.*

Ceci résulte immédiatement du critère donné dans la proposition I.130 puisque l'image par le foncteur adjoint à gauche $\mathrm{L}f^\star$ de $\mathrm{R}f_\star$ d'un objet de $\mathcal{SH}(S)$ de la forme F_nX (X objet de $\mathscr{H}_\bullet(S)$) est $F_n(\mathrm{L}f^\star X)$.

2.6 Caractère de Chern

Soit k un corps parfait. On définit une transformation naturelle additive

$$\mathrm{ch}\colon K_0(X) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} CH^n(X) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$$

pour $X \in \mathrm{Sm}/k$ en posant

$$\mathrm{ch}(x) = (\chi_0(x), \chi_1(x), \frac{1}{2}\chi_2(x), \dots, \frac{1}{n!}\chi_n(x), \dots) \; .$$

Le théorème v.9 permet d'en déduire un morphisme de H-groupes

$$\mathrm{ch}\colon \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Q}(n), 2n)$$

pour tout entier naturel n et des applications additives

$$\mathrm{ch}\colon K_i(X) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^{2n-i}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(n)) \; .$$

D'après le théorème V.31, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}(k)_{\mathbb{Q}}}(\mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}}, \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}) \simeq \lim \mathbb{Q}! \simeq \mathbb{Q}\ .$$

On note $\mathrm{ch}\colon \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}$ le morphisme correspondant à $1 \in \mathbb{Q}$ par ces isomorphismes. Ce morphisme ch est obtenu en combinant la suite de morphismes $\frac{1}{n!}\chi_n\colon \mathbb{Z}\times \mathrm{Gr} \to K(\mathbb{Q}(n), 2n)$ composant le caractère de Chern (ces morphismes vérifient bien la relation $\Omega_{\mathbb{P}^1}\left(\frac{1}{(n+1)!}\chi_{n+1}\right) = \frac{1}{n!}\chi_n$).

Proposition V.36 *Le morphisme* $\mathrm{ch}\colon \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}$ *se factorise en*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{BGL}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(0)} \arrow[d, "\mathrm{ch}'"] \\ & \mathbf{H}_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

Compte tenu de la construction des objets $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(i)}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, cette proposition se déduit trivialement du lemme suivant :

Lemme V.37 *Soit k un corps parfait. Pour tout $X \in \mathrm{Sm}/k$ et tout entier naturel n, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "\chi_n"] \arrow[d, "\Psi^k"] & CH^n(X) \arrow[d, "x \mapsto k^n x"] \\ K_0(X) \arrow[r, "\chi_n"] & CH^n(X) \end{tikzcd}$$

Par principe de scindage, il suffit de montrer que $\chi_n(\Psi^k([\mathscr{L}])) = k^n \chi_n([\mathscr{L}])$ si $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur $X \in \mathrm{Sm}/k$, ce qui est évident par définition de χ_n.

$\star$
$\star\ \star$

Selon toute vraisemblance, le morphisme $\mathrm{ch}'\colon \mathbb{H}_{\text{Б}}^{(0)} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Q}}$ devrait être un isomorphisme. Pour ce faire, il suffirait de montrer que les théorèmes de comparaison existants entre les groupes de cohomologie motivique de Voevodsky et les facteurs directs de la K-théorie algébrique à coefficients rationnels définis grâce aux opérations d'Adams sont suffisamment fonctoriels pour donner des morphismes dans $\mathscr{H}(k)$ ou $\mathcal{SH}(k)$. Ceci semble résulter du travail de M. Levine sur la filtration homotopique par le coniveau [51]. En outre, F. Morel a montré que $\mathbb{H}_{\text{Б}}^{(0)}$ était un facteur direct de $S^0_{\mathbb{Q}}$ (cf. [58]).

Chapitre VI

Variantes topologiques

Dans ce chapitre, il va s'agir de montrer que les méthodes employées jusqu'à présent s'appliquent aussi au cas classique de la K-théorie topologique complexe et, inversement, que des constructions ou énoncés sur la K-théorie algébrique pourraient se déduire des constructions analogues en K-théorie topologique.

1 Rappels sur la K-théorie topologique

Définition VI.1 *On note* $\mathrm{Gr}(\mathbb{C})$ *l'espace topologique limite inductive des points complexes des grassmanniennes* $\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})$ *(cf. page 80). Pour tout entier naturel d, on note aussi* $\mathrm{Gr}_{d,\infty}(\mathbb{C})$ *la limite inductive des espaces* $\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})$ *pour $r \in \mathbb{N}$.*

Définition VI.2 *Pour tout objet X de $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ et tout entier naturel n, on pose*

$$K_n^{\mathrm{top}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}}}(S^n \wedge X_+, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})) \ .$$

Définition VI.3 *Soit X un espace topologique. On note* $\mathrm{Vect}(X)$ *la catégorie des fibrés vectoriels complexes sur X, c'est-à-dire la catégorie des Modules localement libres de rang fini sur le faisceau d'anneaux des fonctions continues à valeurs complexes sur X.*

Théorème VI.4 *Soit X un espace topologique compact. Le foncteur sections globales définit une équivalence de catégories exactes entre* $\mathrm{Vect}(X)$ *et la catégorie des modules projectifs de type fini sur l'anneau des fonctions continues sur X à valeurs complexes.*

Cet énoncé est établi dans [4, §1.4].

Théorème VI.5 *Pour tout espace compact X, il existe une bijection canonique entre* $K_0^{\mathrm{top}}(X)$ *et le groupe abélien symétrisé du monoïde des classes d'isomorphismes d'objets de* $\mathrm{Vect}(X)$ [1]*, l'addition étant donnée par la somme directe des fibrés vectoriels.*

Ceci résulte de [*ibid.*, theorem 1.4.15].

[1] D'après le théorème VI.4, les suites exactes de fibrés vectoriels complexes sur les espaces compacts sont scindées.

2 Théorie instable

On note $\iota\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ le morphisme canonique. Le théorème i.121 donne un foncteur « points complexes » $\iota^\star\colon \mathscr{H}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \to \mathscr{H}^{\mathrm{top}}$. Presque par définition, on a un isomorphisme évident $\iota^\star(\mathrm{Gr}) \simeq \mathrm{Gr}(\mathbb{C})$. On en déduit un morphisme

$$\iota^\star\colon K_n(X) \to K_n^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$$

pour tout $X \in \mathrm{Sm}/\mathbb{Z}$ et tout entier naturel n.

Au niveau des groupes $K_0(X)$, cela correspond bien évidemment à l'application qui à un fibré vectoriel algébrique V sur X associe le fibré vectoriel topologique complexe sur l'espace topologique $X(\mathbb{C})$ induit par la « restriction » de V à $X_{\mathbb{C}}$.

Proposition vi.6 *Pour tout couple (d, r) d'entiers naturels, la flèche canonique*

$$K_0(\mathrm{Gr}_{d,r,\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}) \to K_0^{\mathrm{top}}(\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C}))$$

est bijective.

On pourrait établir cette proposition en utilisant le calcul explicite de ces groupes, mais ce n'est pas nécessaire. On va néanmoins utiliser une partie de l'argument de [28] et de SGA 6 VI 4 qui est une idée très naturelle.

Si $X \in \mathrm{Sm}/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, notons ψ_X le morphisme d'anneaux

$$\psi_X\colon K_0(X) \to K_0^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))\ .$$

La formule du fibré projectif pour la K-théorie algébrique (cf. théorème ii.17) et son analogue en K-théorie topologique conduisent aussitôt au lemme suivant :

Lemme vi.7 *Soit $X \in \mathrm{Sm}/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, soit V un fibré vectoriel de rang $r \geq 1$ sur X. On note $\mathbb{P}$ le fibré projectif de V sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *l'application $\psi_X\colon K_0(X) \to K_0^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$ est bijective ;*
- *l'application $\psi_{\mathbb{P}}\colon K_0(\mathbb{P}) \to K_0^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}(\mathbb{C}))$ est bijective.*

Soit $(d, r) \in \mathbb{N}^2$, notons $\mathbb{D}$ le fibré des drapeaux complets dans le fibré trivial de rang $d + r$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. On a un zigzag

$$\mathrm{Gr}_{d,r} \longleftarrow \mathbb{D} \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$$

formé de flèches qui sont des composés de projections de fibrés projectifs (par oublis successifs de certains crans des drapeaux...). D'après le lemme, pour conclure que $\psi_{\mathrm{Gr}_{d,r}}$ est bijective, il suffit de montrer que $\psi_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ est bijective, ce qui est évident.

Définition vi.8 *On note $\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ formée des espaces ayant le type d'homotopie d'un ensemble simplicial fini.*

Le foncteur K_0^{top} sur $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ définit un préfaisceau d'ensembles sur $\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}}$ que l'on note $K_0^{\mathrm{top}}(-)$.

Proposition VI.9 *Les applications constituant le diagramme suivant sont bijectives :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathrm{End}_{(\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}})^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0^{\mathrm{top}}(-)) \arrow[d, "\sim"] \\ & \left[\lim_{(d,r)\in\mathbb{N}^2} K_0^{\mathrm{top}}(\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C}))\right]^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

La démonstration est analogue à celle du théorème III.29. L'application en « diagonale » est bijective pour les mêmes raisons : la surjectivité est formelle, l'injectivité résulte du fait que les flèches de transition $K_1(\mathrm{Gr}_{d',r'}(\mathbb{C}))\to K_1(\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C}))$ sont surjectives (ces groupes sont nuls !). Enfin, l'application de droite est injective puisque si un objet X de $\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}}$ est connexe, alors toute flèche $X\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire un élément de $K_0^{\mathrm{top}}(X)$) se factorise en

$$X\xrightarrow{f}\{n\}\times\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C})$$

où $n\in\mathbb{Z}$, (d,r) est un couple d'entiers naturels et $f\colon X\to\{n\}\times\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})$ un morphisme dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}}$ et $\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})\to\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C})$ l'inclusion évidente.

Remarque VI.10 *On a utilisé le fait que les grassmanniennes* $\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})$ *ont le type d'homotopie d'un ensemble simplicial fini. C'est un fait général pour les variétés différentielles compactes : on peut munir une telle variété M d'une structure de variété riemannienne compacte, utiliser un recouvrement fini de M par des ouverts convexes (cela existe, cf. [32]) et conclure en utilisant le théorème I.101 de Dugger-Isaksen.*

Le foncteur $\iota^\star\colon\mathscr{H}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})\to\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ définit une application

$$\iota^\star\colon\ \mathrm{End}_{\mathscr{H}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\to\mathrm{End}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C}))\ .$$

Les interprétations fonctorielles de ces ensembles d'endomorphismes permettent d'en déduire une application

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0(-))\to\mathrm{End}_{(\mathscr{H}^{\mathrm{top,tf}})^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(K_0^{\mathrm{top}}(-))\ .$$

On vérifie aisément que l'image τ^{top} d'une transformation naturelle $\tau^{\mathrm{alg}}\colon K_0(-)\to K_0(-)$ sur $\mathrm{Sm}/\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ est caractérisée par la commutativité du diagramme suivant pour tout $X\in\mathrm{Sm}/\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} K_0(X) \arrow[r, "\iota^\star"] \arrow[d, "\tau^{\mathrm{alg}}"] & K_0^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) \arrow[d, "\tau^{\mathrm{top}}"] \\ K_0(X) \arrow[r, "\iota^\star"] & K_0^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) \end{tikzcd}$$

Le résultat suivant est une des motivations du présent travail :

Théorème VI.11 *L'application* $\iota^\star\colon\ \mathrm{End}_{\mathscr{H}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr})\to\mathrm{End}_{\mathscr{H}^{\mathrm{top}}}(\mathbb{Z}\times\mathrm{Gr}(\mathbb{C}))$ *est bijective.*

Compte tenu du théorème iii.29 et de la proposition vi.9, cela résulte simplement de la proposition vi.6.

Ainsi, toute opération sur la K-théorie algébrique induit une opération sur la K-théorie topologique, et réciproquement. Le théorème vi.11 admet des variantes « à plusieurs variables » (cf. théorème iii.31). Ainsi, l'image dans $\mathscr{H}^{\mathrm{top}}$ de $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ muni de sa structure de λ-Anneau spécial (cf. proposition iii.36) par le foncteur « points complexes » est $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})$ muni d'une structure de λ-Anneau spécial compatible avec les définitions classiques des opérations sur la K-théorie topologique provenant de construction sur les fibrés vectoriels : produit tensoriel, puissances extérieures.

3 Théorie stable

Proposition vi.12 *L'image (notée $\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}$) de $\mathbf{BGL} \in \mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ par le foncteur $\iota^\star \colon \mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ est un spectre représentant la K-théorie topologique.*

Grâce à la remarque i.54, cela résulte du fait que le morphisme

$$\sigma \colon \mathbb{P}^1 \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$$

ayant servi à définir $\mathbf{BGL}^{\mathrm{naïf}} \in \mathcal{SH}_{\mathrm{naïve}}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ puis $\mathbf{BGL} \in \mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ a pour image par le foncteur $\mathscr{H}_\bullet(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \to \mathscr{H}_\bullet^{\mathrm{top}}$ un morphisme

$$S^2 \wedge (\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})) \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})$$

définissant une application

$$\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C}) \to \mathrm{R}\Omega^2(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C}))$$

dont on peut conclure qu'il s'agit d'une équivalence faible grâce au théorème de périodicité de Bott (cf. [4, theorem 2.2.1]).

Théorème vi.13 *Le foncteur $\iota^\star \colon \mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ induit une bijection*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})}(\mathbf{BGL}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}) \; .$$

Le théorème vi.11 permet de montrer que modulo les applications stablement fantômes, l'application considérée ici est bijective. Pour conclure, il suffit donc de montrer que de part et d'autre, il n'y a pas d'applications stablement fantômes. On a montré qu'il n'existait pas d'applications stablement fantômes $\mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}$ dans $\mathcal{SH}(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ (cf. théorème iv.44). C'est aussi vrai pour la K-théorie topologique complexe : il suffit de remplacer dans l'argument de ce théorème (ou du théorème iv.49) le groupe $K_1(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ par $K_1^{\mathrm{top}}(\bullet)$, qui est non seulement fini, mais nul, le $\mathrm{R}^1 \lim$ à considérer est donc nul pour des raisons triviales.

⋆
⋆ ⋆

Notons $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{top}} \in \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ le spectre d'Eilenberg-MacLane à coefficients entiers (et plus généralement $\mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}$ le spectre d'Eilenberg-MacLane à coefficients dans un groupe abélien A). J'ignore s'il existe un isomorphisme entre $\iota^\star(\mathbf{H}_{\mathbb{Z}})$ et $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{top}}$ dans $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$.

L'énoncé homologue au théorème v.31 en topologie est le théorème suivant, qui se démontre de la même manière :

Théorème VI.14 *Soit A un groupe abélien. Soit i un entier relatif. Dans la suite exacte courte*

$$0 \to \mathscr{F}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}_{na\ddot{\imath}ve}}(\mathrm{oub}\,\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathrm{oub}\,\mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) \to 0$$

on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}_{na\ddot{\imath}ve}}(\mathrm{oub}\,\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathrm{oub}\,\mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) &\simeq \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, H^{2k-i}(\bullet, \mathbb{Z})) \ ; \\ \mathscr{F}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) &\simeq \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, H^{2k-i-1}(\bullet, \mathbb{Z})) \ . \end{aligned}$$

On en déduit plus précisément le théorème suivant :

Théorème VI.15 *Soit A un groupe abélien. Soit i un entier relatif. Si i est pair, il n'existe pas d'application stablement fantôme non nulle $\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}} \to \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]$ et*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) \simeq \lim A! \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, A) \ ;$$

si i est impair, tous les morphismes $\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}} \to \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]$ sont stablement fantômes et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}}(\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}}, \mathbf{H}_A^{\mathrm{top}}[-i]) \simeq \mathrm{R}^1 \lim A! \simeq \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, A) \ .$$

Remarque VI.16 *De même qu'au corollaire* V*.32, on obtient des morphismes stablement fantômes $\mathbf{BGL}^{\mathrm{top}} \to \mathbf{H}_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{top}}[1]$ dans $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$. Il s'agit là d'un exemple peut être plus aisé à comprendre que celui de [15, proposition 6.10].*

Annexe A

Quelques constructions sur les catégories triangulées

Cette annexe comprend deux sections. La première étudie les colimites homotopiques indexées par $\mathbb{N}$ dans les catégories triangulées (construction due à Bökstedt-Neeman, cf. [11]) ; on obtient un lemme technique qui nous sert à montrer le théorème IV.44. La deuxième section contient une définition de la version $\mathbb{Q}$-localisée d'une catégorie triangulée (vérifiant certaines hypothèses).

1 Colimites homotopiques

1.1 Rappels

Définition A.1 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes dénombrables. Soit $X_\bullet$ un système inductif d'objets de $\mathcal{T}$ indexé par $\mathbb{N}$:*

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots$$

On note hocolim $X_\bullet$ *un cône du morphisme :*

$$d\colon \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

qui, sur chaque terme X_n à la source, correspond au morphisme $X_n \to X_n \oplus X_{n+1}$ de matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X_n} \\ -f_n \end{pmatrix}$, on a alors un triangle distingué dans $\mathcal{T}$:

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{d} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{i} \operatorname{hocolim} X_\bullet \xrightarrow{j} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\,[1]\ .$$

Le morphisme i induit des morphismes $i_n\colon X_n \to \operatorname{hocolim} X_\bullet$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle abusivement hocolim $X_\bullet$ *la colimite homotopique du système $X_\bullet$.*

On prendra garde au fait que s'il est vrai que deux objets pouvant prétendre être notés hocolim $X_\bullet$ sont bien isomorphes, ils ne le sont pas toujours canoniquement. Nous reviendrons sur ce point au corollaire A.5 plus bas.

Définition A.2 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et X un objet de $\mathcal{T}$. On dit que X est un objet de présentation finie si le foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ *de $\mathcal{T}$ vers la catégorie des groupes abéliens commute aux sommes directes représentables. On note $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ formée par les objets de présentation finie.*

On vérifie aussitôt que $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$.

Lemme A.3 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes dénombrables. Soit $X_\bullet$ un système inductif indexé par $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{T}$, on choisit une colimite homotopique* $\mathrm{hocolim}\ X_\bullet$ *du système $X_\bullet$. Soit Y un objet de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$. Alors, le morphisme évident*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,\mathrm{hocolim}\ X_\bullet)$$

est un isomorphisme.

Pour tout Y dans $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, on peut appliquer le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,-)$ au triangle distingué définissant $\mathrm{hocolim}\ X_\bullet$; en utilisant le fait que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,-)$ commute aux sommes directes dénombrables, on obtient une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{coker}\,\varphi_0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,\mathrm{hocolim}\ X_\bullet) \to \ker\varphi_1 \to 0$$

où φ_i est l'application

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X_n[i]) \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X_n[i])$$

qui à une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang associe la suite $(x_n - f_{n-1}[i]\circ x_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (où l'on convient que $X_{-1} = x_{-1} = 0$, f_{n-1} désignant le morphisme $X_{n-1} \to X_n$). On montre facilement que φ_i est injective ; pour conclure, il reste à observer que $\mathrm{coker}\,\varphi_0$ s'identifie canoniquement à $\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X_n)$.

Proposition A.4 *Soit $X_\bullet$ un système inductif indexé par $\mathbb{N}$ d'objets d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ admettant des sommes directes dénombrables. On choisit une colimite homotopique* $\mathrm{hocolim}\ X_\bullet$ *de $X_\bullet$. Pour tout objet E de $\mathcal{T}$, on a une suite exacte courte fonctorielle :*

$$0 \to \mathrm{R}^1\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_n[1],E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{hocolim}\ X_\bullet, E) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_n,E) \to 0\ .$$

Pour obtenir cette suite exacte courte, il suffit d'appliquer le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,E)$ au triangle distingué définissant $\mathrm{hocolim}\ X_\bullet$ et d'utiliser la proposition II.1.

Corollaire A.5 *Soit $X_\bullet$ un système inductif indexé par $\mathbb{N}$ d'objets d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ admettant des sommes directes dénombrables. Pour que* $\mathrm{hocolim}\ X_\bullet$ *soit défini à isomorphisme unique près, il suffit que* $\mathrm{R}^1\lim \mathrm{Hom}(X_n[1],\mathrm{hocolim}\ X_\bullet) = 0$. *Dans ce cas, le triangle distingué suivant est défini à isomorphisme unique près :*

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{d} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \xrightarrow{i} \mathrm{hocolim}\ X_\bullet \xrightarrow{j} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n[1]$$

Avant de passer à la démonstration, il peut paraître étrange que l'objet hocolim $X_\bullet$ intervienne dans la condition, puisqu'on veut justement montrer qu'il est bien défini à isomorphisme *unique* près. Toutefois, la classe d'isomorphisme de cet objet est toujours bien définie, la condition énoncée ici ne dépend donc pas du choix d'un cône définissant la colimite homotopique.

Établissons ce corollaire : si on se donne deux candidats X et X' pour la colimite homotopique, d'après l'axiome (TR III) des catégories triangulées (cf. [75, page 94]), on aura l'existence d'un morphisme $X \to X'$ donnant lieu à un morphisme de triangles :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, dotted] & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\,[1] \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n \arrow[r, "i"] & X' \arrow[r, "j"] & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n\,[1]
\end{tikzcd}$$

D'après [*ibid.*, corollaire 1.2.3, Chapitre II], le morphisme $X \to X'$ est un isomorphisme. Il reste à montrer qu'un tel morphisme $X \to X'$ est unique. D'après la proposition A.4, il existe un unique morphisme $X \to X'$ faisant commuter le carré du milieu dans le diagramme précédent, ce qui achève la preuve de ce corollaire.

1.2 Un lemme épouvantable

Lemme A.6 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Soit $F_\bullet$ un système inductif d'objets de $\mathcal{T}$ indexé par $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on s'est donné un système inductif $F_{n,\bullet}$ d'objets de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ et une identification $F_n = \operatorname{hocolim} F_{n,\bullet}$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions strictement croissantes $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une structure de système inductif indexé par $\mathbb{N}^2$ qui à un couple (n, m) d'entiers naturels fasse correspondre $F_{n,\varphi_n(m)}$ dont les flèches « horizontales »[1] sont induites par les morphismes de transition de $F_{n,\bullet}$ et dont les flèches verticales sont compatibles aux morphismes de transition $F_n \to F_{n+1}$ pour tout entier naturel n.*

On procède par récurrence sur n. On pose $\varphi_0(m) = m$ pour tout entier naturel m. Supposons ainsi construites les suites φ_k pour $0 \leq k \leq n$ ainsi que les flèches « verticales » $F_{i,\varphi_i(m)} \stackrel{v_{i,m}}{\to} F_{i+1,\varphi_{i+1}(m)}$ pour $i < n$ et m quelconque faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
F_{i,\varphi_i(0)} \arrow[r, "h_{i,0}"] \arrow[d, "v_{i,0}"] & F_{i,\varphi_i(1)} \arrow[r, "h_{i,1}"] \arrow[d, "v_{i,1}"] & \cdots \\
F_{i+1,\varphi_{i+1}(0)} \arrow[r, "h_{i+1,0}"] & F_{i+1,\varphi_{i+1}(1)} \arrow[r, "h_{i+1,1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

[1]Je veux parler ici des morphismes de transition à n fixé, c'est-à-dire les morphismes $F_{n,\varphi_n(m)} \to F_{n,\varphi_n(m+1)}$.

pour $i < n$ ainsi que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} F_{i,\varphi_i(m)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{i,m}"] & F_i \arrow[d, "V_i"] \\ F_{i+1,\varphi_{i+1}(m)} \arrow[r] & F_{i+1} \end{tikzcd}$$

pour $i < n$ et $m \in \mathbb{N}$, les morphismes horizontaux étant induits par les flèches des systèmes $F_{k,\bullet}$ et de l'identification $\operatorname{hocolim} F_{k,\bullet} = F_k$, et où on a noté $V_i \colon F_i \to F_{i+1}$ les morphismes de transition du système $F_\bullet$.

On considère le morphisme composé $F_{n,\varphi_n(0)} \to F_n \to F_{n+1}$. Comme $F_{n,\varphi_n(0)}$ est de présentation finie, d'après le lemme A.3, ce morphisme se factorise par $F_{n+1,k} \to F_{n+1}$ pour k suffisamment grand. On choisit un tel entier k, on le note $\varphi_{n+1}(0)$ et on obtient ainsi un morphisme $v_{n,0}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_{n,\varphi_n(0)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n,0}"] & F_n \arrow[d, "V_n"] \\ F_{n+1,\varphi_{n+1}(0)} \arrow[r] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose construits les termes $\varphi_{n+1}(0), \dots, \varphi_{n+1}(m)$ de la suite φ_{n+1} ainsi que des morphismes $v_{n,0}, \dots, v_{n,m}$ faisant commuter

$$\begin{tikzcd} F_{n,\varphi_n(0)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n,0}"] & F_{n,\varphi_n(1)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n,1}"] & \cdots \arrow[r] & F_{n,\varphi_n(m)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n,m}"] & F_n \arrow[d, "V_n"] \\ F_{n+1,\varphi_{n+1}(0)} \arrow[r] & F_{n+1,\varphi_n(1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_{n+1,\varphi_{n+1}(m)} \arrow[r] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

et on veut étendre cela au cran $m+1$. On considère alors le morphisme composé

$$F_{n,\varphi_n(m+1)} \to F_n \xrightarrow{V_n} F_{n+1} \ .$$

D'après le lemme A.3, il se factorise par $F_{n+1,k} \to F_{n+1}$ pour k suffisamment grand. On peut supposer $k > \varphi_{n+1}(m)$ et on choisit un tel morphisme $\psi \colon F_{n,\varphi_n(m+1)} \to F_{n+1,k}$ et on étudie le « diagramme suivant » dont on ignore *a priori* si le carré de gauche est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_{n,\varphi_n(m)} \arrow[r] \arrow[d, "v_{n,m}"] & F_{n,\varphi_n(m+1)} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & F_n \arrow[d, "V_n"] \\ F_{n+1,\varphi_{n+1}(m)} \arrow[r] & F_{n+1,k} \arrow[r] & F_{n+1} \end{tikzcd}$$

Cependant, toujours d'après le lemme A.3, on peut montrer que, quitte à faire grandir k, ce carré de gauche est commutatif ; on note $\varphi_{n+1}(m+1)$ un tel entier et $v_{n,m+1}$ le morphisme ψ ainsi obtenu, ce qui achève la preuve de ce lemme épouvantable.

Définition A.7 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Un ensemble $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'objets de $\mathcal{T}$ est un ensemble de générateurs si la famille de foncteurs cohomologiques* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X_\alpha, -)$ *pour $\alpha \in A$ est conservative, autrement dit un objet E de $\mathcal{T}$ est nul si et seulement si* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X_\alpha[n], E)$ *est nul pour tous $\alpha \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

Remarque A.8 *On reprend ici une terminologie similaire à celle introduite par Alexander Grothendieck dans [27]. Dans le cas d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, un ensemble $(U_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathscr{A}$ est une famille de générateurs au sens de [*ibid.*, §1.9] si et seulement si le foncteur de $\mathscr{A}$ vers la catégorie des groupes abéliens qui à X associe $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(U_i, X)$ est conservatif ; ce n'est pas exactement la définition de [*loc. cit.*] qui dit que pour tout sous-objet A d'un objet B, si $A \neq B$, alors il existe un morphisme $U_i \to B$ qui ne se factorise pas par l'inclusion $A \to B$, mais on montre facilement que ce sont deux conditions équivalentes. On prendra garde à ne pas la confondre la notion d'ensemble de générateurs d'une catégorie triangulée qui vient d'être définie et la notion (plus forte) liée à celle de sous-catégorie triangulée engendrée par un ensemble d'objets.*

Proposition A.9 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes (dénombrables) et un ensemble de générateurs de présentation finie. Comme dans le lemme A.6, soit $F_\bullet$ un système inductif d'objets de $\mathcal{T}$ (dont on note F une colimite homotopique). On suppose que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on s'est donné une identification $F_n = \mathrm{hocolim}\, F_{n,\bullet}$ où $F_{n,\bullet}$ et un système inductif dans $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ indexé par $\mathbb{N}$. Soit E un objet de $\mathcal{T}$. Supposons enfin qu'il existe un épimorphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$ tel que pour tout couple (n,m) d'entiers naturels, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,m}[1], E)$ soit un A-module de longueur finie. Alors, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F,E) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_n, E)$$

est bijective, c'est-à-dire que $\mathrm{R}^1\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_n[1], E) = 0$. Avec les notations du lemme A.6, la flèche évidente suivante est également bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F,E) \to \lim_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,\varphi_n(m)}, E)\ .$$

On applique le lemme A.6, on obtient une suite de suites (φ_n) et un système inductif double $(F_{n,\varphi_n(m)})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$. On peut alors considérer le système inductif diagonal $(F_{n,\varphi_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Les flèches $F_{n,\varphi_n(n)} \to F_n$ induisent un morphisme de systèmes inductifs, on peut en déduire une flèche (non nécessairement unique) au niveau des colimites homotopiques

$$f\colon \operatorname*{hocolim}_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varphi_n(n)} \to F$$

Il est immédiat que f induit des bijections après application des foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ pour tout objet $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$; compte tenu de nos hypothèses, f est donc un isomorphisme. Grâce à la proposition A.3, on en déduit une suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{R}^1\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,\varphi_n(m)}[1], E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F,E) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,\varphi_n(n)}[1], E) \to 0\ .$$

Le terme de gauche est nul car le système projectif considéré satisfait la propriété de Mittag-Leffler (voir la proposition II.3). On en déduit donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F,E) \xrightarrow{\sim} \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,\varphi_n(n)}[1], E)\ .$$

Par cofinalité de la diagonale dans $\mathbb{N}^2$, on peut d'ailleurs remplacer le groupe de droite par $\lim\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_{n,\varphi_n(m)}[1], E)$. On déduit de ces isomorphismes que la flèche évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F, E) \to \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_n, E)$$

est injective, or on sait *a priori* qu'elle est surjective et de noyau $\mathrm{R}^1\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_n[1], E)$, ce qui permet de conclure.

2 Des catégories triangulées à coefficients rationnels

Dans cette section, on va tenter de construire une catégorie triangulée $\mathbb{Q}$-linéaire à partir d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. Deux constructions sont possibles, la première consiste simplement à tensoriser avec $\mathbb{Q}$ les groupes d'homomorphismes ; la seconde fait intervenir une localisation et donne une autre catégorie triangulée $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$: on voudrait par exemple faire en sorte que si on applique cette construction à la catégorie dérivée des groupes abéliens, on obtienne la catégorie dérivée des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.

Pour simplifier, on se limite aux versions à coefficients rationnels de ces constructions, cela correspond à se restreindre au morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, mais tout ce qui suit pourrait se faire sans changement majeur dans le cas plus général du morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{P}\right]$ où P est un ensemble de nombres premiers.

2.1 Première construction : tuer les objets d'exposant fini

Définition A.10 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie additive. On note $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ la catégorie dont les objets sont notés $X_{\mathbb{Q}}$ pour X objet de $\mathcal{T}$ (autrement dit $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ a les mêmes objets que $\mathcal{T}$, mais on change les notations pour éviter des confusions). Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{T}$, on pose $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si X, Y et Z sont trois objets de $\mathcal{T}$, l'application $\mathbb{Z}$-bilinéaire*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Z)$$

donnant la composition des flèches dans $\mathcal{T}$ induit, par extension des scalaires, une loi de composition des flèches dans $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(Y_{\mathbb{Q}}, Z_{\mathbb{Q}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Z_{\mathbb{Q}}) \ .$$

On obtient ainsi une catégorie $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ qui est $\mathbb{Q}$-linéaire, et un foncteur évident $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ qui envoie X sur $X_{\mathbb{Q}}$.

Le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathscr{U}$ et tout foncteur additif $F \colon \mathcal{T} \to \mathscr{U}$, il existe un unique foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire $F_{\mathbb{Q}} \colon \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \to \mathscr{U}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \arrow[d, dotted, "F_{\mathbb{Q}}"] \\ & \mathscr{U} \end{tikzcd}$$

Définition A.11 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Les foncteurs de translation sur $\mathcal{T}$ induisent des foncteurs de translation sur $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$. On dit d'un triangle de $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ qu'il est distingué s'il est isomorphe à l'image par le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ d'un triangle distingué de $\mathcal{T}$.*

Proposition A.12 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Munie des données précédentes, la catégorie $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est une catégorie triangulée et le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est un foncteur triangulé.*

Une fois que l'on saura que $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est triangulée, le fait que $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ soit triangulé sera évident. Vérifions l'axiome (TR I). Par définition, un triangle de $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet X de $\mathcal{T}$, le triangle $X \stackrel{\mathrm{id}_X}{\to} X \to 0 \to X[1]$ est distingué dans $\mathcal{T}$, son image $X_{\mathbb{Q}} \stackrel{\mathrm{id}_{X_{\mathbb{Q}}}}{\to} X_{\mathbb{Q}} \to 0 \to X_{\mathbb{Q}}[1]$ par le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est donc distingué. Plus sérieusement, soit $f\colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ un morphisme dans $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ que l'on voudrait insérer dans un triangle distingué. Il existe un entier n non nul et un morphisme $g\colon X \to Y$ dans $\mathcal{T}$ tel que $f = \frac{1}{n} g$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}})$. En appliquant (TR I) dans $\mathcal{T}$ au morphisme $g\colon X \to Y$, on obtient un triangle distingué

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{a} Z \xrightarrow{b} X[1]$$

dans $\mathcal{T}$. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$:

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"] & Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & Z_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "b"] \arrow[d, equal] & X_{\mathbb{Q}}[1] \arrow[d, "n"] \\
X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "f"] & Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "a"] & Z_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "nb"] & X_{\mathbb{Q}}[1]
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales étant des isomorphismes, les triangles constituant les lignes de ce diagramme sont isomorphes. Le triangle du haut étant distingué, celui du bas aussi : on a inséré $f\colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ dans un triangle distingué, ce qui prouve (TR I).

La vérification des autres axiomes est soit complètement triviale : (TR II), soit très similaire à ce qui précède : (TR III) ou (TR IV). On a donc bien construit une catégorie triangulée $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Définition A.13 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. On note $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ formée des objets X tels qu'il existe un entier n non nul tel que $n\,\mathrm{id}_X\colon X \to X$ soit le morphisme nul, autrement dit « X est d'exposant fini ».*

Lemme A.14 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Le noyau du foncteur triangulé $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est précisément $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$. En particulier, $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$. Plus précisément, soit*

$$X' \to X \to X'' \to X[1]$$

un triangle distingué de $\mathcal{T}$, n et m deux entiers tels que $n\,\mathrm{id}_{X'} = 0$ et $m\,\mathrm{id}_{X''} = 0$. Alors, $nm\,\mathrm{id}_X = 0$.

Le fait que $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ soit le noyau de $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ est évident. Soit donc

$$X' \to X \to X'' \to X\,[1]$$

un triangle distingué de $\mathcal{T}$, supposons donnés deux entiers n et m comme dans l'énoncé du lemme. Considérons le morphisme $m\,\mathrm{id}_X \colon X \to X$, si on le compose à droite avec $X \to X''$, on obtient zéro car le morphisme obtenu se factorise par $m\,\mathrm{id}_{X''}$ qui est nul. En appliquant le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ à notre triangle distingué, on en déduit que $m\,\mathrm{id}_X \colon X \to X$ se factorise par le morphisme $X' \to X$. Comme $n\,\mathrm{id}_{X'} = 0$, si on multiplie par n un morphisme se factorisant par X', on obtient zéro. Ainsi, $nm\,\mathrm{id}_X = 0$.

Lemme A.15 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Soit X un objet de $\mathcal{T}$. Soit n un entier naturel (non nul). On complète $n\,\mathrm{id}_X \colon X \to X$ en un triangle distingué :*

$$X \overset{n\,\mathrm{id}_X}{\to} X \overset{p}{\to} X/n \to X\,[1]\,.$$

Alors, le morphisme $n^2\,\mathrm{id}_{X/n} \colon X/n \to X/n$ est nul. En particulier, X/n est dans $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$.

On considère le morphisme $n\,\mathrm{id}_{X/n} \colon X/n \to X/n$, en appliquant le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X/n,-)$ au triangle définissant X/n, on obtient qu'il existe un morphisme $f \colon X/n \to X$ tel que $n\,\mathrm{id}_{X/n} = p \circ f$. Le composé de deux morphismes consécutifs dans un triangle distingué est nul, on obtient ainsi que $np = 0$, d'où $np \circ f = 0$, ce qui donne bien $n^2\,\mathrm{id}_{X/n} = 0$.

Proposition A.16 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ induit un isomorphisme de catégories triangulées $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\text{exp.f.}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$.*

La catégorie triangulée quotient $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ est définie dans [75, §2.2.10, Chapitre II]. En vertu de [*ibid.*, corollaire 2.2.11 c)], cette catégorie triangulée quotient satisfait la propriété universelle suivante : pour tout foncteur triangulé $F \colon \mathcal{T} \to \mathscr{D}$ tel que les objets de $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ soient envoyés par F sur des objets nuls (autrement dit $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}} \subset \ker F$), il existe un unique foncteur (triangulé) $G \colon \mathcal{T}/\mathcal{T}_{\text{exp.f.}} \to \mathscr{D}$ tel que $F = G \circ Q$ où Q est le foncteur de localisation $Q \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$. Comme on n'a pas supposé que $\mathcal{T}$ était une petite catégorie, il y a une difficulté de nature ensembliste dans la définition de la catégorie localisée $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$, les arguments qui suivent justifieront *a posteriori* son existence.

Il s'agit de vérifier que $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$ vérifie cette propriété universelle. Soit $F \colon \mathcal{T} \to \mathscr{D}$ un foncteur triangulé annulant $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$. Pour tout objet X de $\mathcal{T}$ et tout entier non nul n, si X/n est un cône du morphisme $n\,\mathrm{id}_X \colon X \to X$ dans $\mathcal{T}$, l'objet X/n est dans $\mathcal{T}_{\text{exp.f.}}$ d'après le lemme A.15. L'objet $F(X/n)$ est donc nul, ce qui se traduit en disant que le morphisme $F(n\,\mathrm{id}_X)$ est un isomorphisme, autrement dit $n\,\mathrm{id}_{FX} \colon FX \to FX$ est un isomorphisme dans $\mathscr{D}$. Ceci a pour conséquence que pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathcal{T}$, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX,FY)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

On est maintenant en mesure de construire le foncteur $G \colon \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \to \mathscr{D}$ voulu. Pour avoir $F = G \circ Q$ (on note Q le foncteur $Q \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}$), on doit nécessairement poser $G(X_{\mathbb{Q}}) = F(X)$ pour tout objet X de $\mathcal{T}$, ce qui définit G au niveau des objets. Soit (X,Y)

un couple d'objets de $\mathcal{T}$, on veut définir une application $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{G}$ $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX, FY)$ faisant commuter le triangle

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y) \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, dotted, "G"] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX, FY)
\end{tikzcd}$$

Dans la mesure où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}\otimes\mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FX, FY)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il est évident qu'il existe une unique telle application $\mathbb{Q}$-linéaire G en pointillés sur le diagramme précédent. On vérifie aussitôt que ces données font bien de G un foncteur triangulé, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Remarque A.17 *La construction de cette sous-section est également réalisée (de façon légèrement différente) dans [7, appendix B].*

2.2 Deuxième construction : tuer les objets de torsion

Avant d'aller plus loin dans la $\mathbb{Q}$-localisation, il convient de mentionner quelques propriétés dont nous allons avoir besoin.

Définition A.18 *Une catégorie additive $\mathscr{C}$ est pseudo-abélienne (ou karoubienne) si pour tout endomorphisme p d'un objet X de $\mathscr{C}$ tel que $p^2 = p$ (on dit que p est un projecteur), il existe une décomposition $X = X' \oplus X''$ de X en somme directe de sorte que p soit le projecteur sur X' parallèlement à X''.*

Remarque A.19 *On rappelle qu'une catégorie triangulée admettant des sommes directes dénombrables est pseudo-abélienne (cf. [75, proposition 1.2.9, Chapitre II]).*

Proposition A.20 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ensemble de générateurs de présentation finie de $\mathcal{T}$ (cf. définitions A.7 et A.2). Alors, $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ est l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$ engendrée par la famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.*

Cette proposition reproduit [65, proposition 1.2]. La démonstration en est très courte, je la recopie ici : il s'agit d'une conséquence immédiate de [59, proposition 8.4.1], [*ibid.*, lemma 4.4.5] et [*ibid.*, remark 4.2.6].

Définition A.21 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de présentation finie. On note $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$) la sous-catégorie pleine (triangulée) de $\mathcal{T}$ formée des objets E tels que pour tout $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, le morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ soit nul (resp. bijectif), autrement dit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)$ soit un groupe abélien de torsion (resp. un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). On dit que les objets de $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ sont les objets de torsion de $\mathcal{T}$.*

D'après la proposition A.20, pour vérifier qu'un objet E appartient à une des sous-catégories triangulées $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, on peut se limiter à tester la condition sur les objets X de la forme $X_\alpha[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) où $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un ensemble de générateurs de la catégorie $\mathcal{T}$ formé d'objets de présentation finie. Notons aussi qu'on pourrait très bien définir $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ indépendamment de la notion d'objet de présentation finie : un objet E de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ si et seulement si pour tout entier n non nul, le morphisme $n\,\mathrm{id}_E\colon E \to E$ est un isomorphisme. Les objets de $\mathcal{T}$ appartenant à $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ sont appelés « $\mathbb{Q}$-locaux ». Par ailleurs, on a évidemment l'inclusion $\mathcal{T}_{\mathrm{exp.f.}} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

Si un objet X de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ (resp $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$), on voit aussitôt que tout facteur direct de X est aussi dans $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$). Comme on a vu que $\mathcal{T}$ est pseudo-abélienne, il vient que les catégories triangulées $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ sont aussi pseudo-abéliennes ; on peut aussi noter que ces deux sous-catégories triangulées de $\mathcal{T}$ admettent des sommes directes quelconques et que les foncteurs d'inclusion vers $\mathcal{T}$ y commutent.

Proposition A.22 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$. Le foncteur d'inclusion $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$ admet un adjoint à gauche (automatiquement triangulé d'après [*ibid.*, lemma 5.3.6]) $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Le morphisme canonique de foncteurs $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}} \to L_{\mathbb{Q}} \circ i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est un isomorphisme. Pour tout objet E de $\mathcal{T}$ et tout objet X de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, l'application évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, iL_{\mathbb{Q}}E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}}(L_{\mathbb{Q}}X, L_{\mathbb{Q}}E)$$

est bijective. Le noyau du foncteur triangulé $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est précisément $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. Enfin, si X est un objet de $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et E un objet de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)=0$; et réciproquement, si X est un objet de $\mathcal{T}$ tel que pour tout $E \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, on ait $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)=0$, alors $X \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

Justifions l'existence de l'adjoint à gauche $L_{\mathbb{Q}}$ du foncteur d'inclusion $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$. Soit E un objet de $\mathcal{T}$, il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $\Psi\colon E \to E'$ avec E' dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ tel que pour tout objet F de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, Ψ induise une bijection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E',F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E,F)$. On choisit une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls telle que l'on ait l'égalité de nombres surnaturels (cf. [69, §1.3, Chapitre I] pour cette notion) :

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} n_k = \prod_{p \text{ premier}} p^{\infty}\,.$$

Autrement dit, tout nombre premier p divise une infinité de termes de la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On considère alors le système inductif suivant dans $\mathcal{T}$:

$$E_0 \xrightarrow{[n_0]} E_1 \xrightarrow{[n_1]} E_2 \xrightarrow{[n_2]} E_3 \xrightarrow{[n_3]} \dots$$

où $E_k = E$ et où $[n]$ désigne la multiplication par n ($\mathcal{T}$ étant une catégorie additive, cela a un sens). On note E' une colimite homotopique de ce système et $\Psi\colon E \to E'$ le morphisme $E = E_0 \to E'$ issu de la construction des colimites homotopiques. Pour tout objet F de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ et $i \in \mathbb{Z}$, le système projectif $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_n\,[i]\,,F))_{n\in\mathbb{N}}$ est constant de valeur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_0\,[i]\,,F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E\,[i]\,,F)$. Un système projectif constant indexé par $\mathbb{N}$ ayant un

$\mathrm{R}^1\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}$ nul en vertu de la proposition II.3, la proposition A.4 implique que Ψ induit bien une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E',F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E,F) \ .$$

Il reste à montrer que E' est un objet de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Pour cela, observons que si X est un objet de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, le lemme A.3 indique que le morphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E')$ induit par Ψ identifie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E')$ à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$; ceci étant vrai pour tout objet X de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, il vient bien que X' est dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, ce qui achève de montrer que le foncteur d'inclusion $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$.

Le foncteur $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$ étant pleinement fidèle, il est classique (et trivial) que pour tout objet E de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, le morphisme canonique $E \to L_{\mathbb{Q}}iE$ est un isomorphisme.

Le calcul fait au cours de la construction du foncteur $L_{\mathbb{Q}}$ indique que pour tout objet E de $\mathcal{T}$, le morphisme d'adjonction $E \to iL_{\mathbb{Q}}E$ induit une application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,iL_{\mathbb{Q}}E)$ qui, pourvu que X soit dans $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, procure un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,iL_{\mathbb{Q}}E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}}(L_{\mathbb{Q}}X,L_{\mathbb{Q}}E) \ .$$

Les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ où X parcourt $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ formant un système conservatif de foncteurs cohomologiques sur $\mathcal{T}$, il résulte aussitôt de la formule précédente que $L_{\mathbb{Q}}E$ est nul si et seulement si E est dans $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, autrement dit $\ker L_{\mathbb{Q}} = \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

Enfin, soit X un objet de $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et E un objet de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. On a un isomorphisme d'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}}(L_{\mathbb{Q}}X,E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,iE)$. On vient de voir que $L_{\mathbb{Q}}X = 0$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)=0$. Réciproquement, soit X un objet de $\mathcal{T}$ tel que pour tout $E\in\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, on ait $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,E)=0$, montrons que $X\in\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$; on peut appliquer cela à $E=L_{\mathbb{Q}}X$, ce qui donne que le morphisme canonique $X\to L_{\mathbb{Q}}X$ est nul, en appliquant à ce morphisme le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(P,-)$ pour tout $P\in\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, on obtient aussitôt que X est dans $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Remarque A.23 *On peut montrer l'existence de l'adjoint à gauche $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T}\to\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ de l'inclusion $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}\to\mathcal{T}$ sous des hypothèses plus faibles : il suffit de supposer que les sommes directes dénombrables sont représentables dans $\mathcal{T}$. Pour démontrer cela, on procède de façon analogue : si E est un objet de $\mathcal{T}$, on définit le même objet E' qui vérifie encore $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E',F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E,F)$ pour tout objet $F\in\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. La seule difficulté consiste à montrer que $E'\in\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Ceci peut se faire en montrant que pour tout objet F de $\mathcal{T}$, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E',F)$ est un $\mathbb{Q}$-vectoriel ; on obtient cela en considérant la suite exacte de la proposition A.4, les systèmes projectifs de groupes abéliens qui interviennent sont du même type que ceux envisagés dans la sous-section 2.3 du chapitre* V.

Définition A.24 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$. On note $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{T}$ si ce n'est que l'on note $X_{\mathbb{Q}}$ l'objet de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ correspondant à un objet X de $\mathcal{T}$; pour tout couple $(X_{\mathbb{Q}},Y_{\mathbb{Q}})$ d'objets de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, on pose*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}},Y_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}}(L_{\mathbb{Q}}X,L_{\mathbb{Q}}Y) \ ,$$

on définit la composition des flèches dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ de manière évidente. Le foncteur $L_{\mathbb{Q}}$ donne naissance à des foncteurs $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ de manière évidente [2]*. Les foncteurs de décalage sur $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ induisent des foncteurs de décalage sur $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$. En décrétant qu'un triangle de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est distingué si son image par $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est un triangle distingué, on obtient une structure de catégorie triangulée sur $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et les foncteurs $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ sont triangulés. On dit que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est la version $\mathbb{Q}$-localisée de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$.*

Comme indiqué dans la note de bas de page n°2, il est évident que $L_{\mathbb{Q}}\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est une équivalence de catégories. L'introduction de cette nouvelle catégorie $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ présente l'avantage d'éviter une confusion : $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$, alors que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est un quotient de $\mathcal{T}$, comme l'indique la proposition suivante. À partir de maintenant, pour alléger les notations, on n'indique plus systématiquement les occurrences du foncteur d'inclusion $i\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$:

Proposition A.25 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$. Pour tout objet E de $\mathcal{T}$, on a un triangle distingué fonctoriel :*

$$E_{\mathrm{tor}} \longrightarrow E \longrightarrow L_{\mathbb{Q}}E \longrightarrow E_{\mathrm{tor}}[1]$$

où $E_{\mathrm{tor}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. Le foncteur $Q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ induit un isomorphisme de catégories $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$.

Pour tout objet E de $\mathcal{T}$, on dispose d'un morphisme fonctoriel $E \to L_{\mathbb{Q}}E$ dans $\mathcal{T}$. On peut l'insérer dans un triangle distingué

$$E_{\mathrm{tor}} \longrightarrow E \longrightarrow L_{\mathbb{Q}}E \longrightarrow E_{\mathrm{tor}}[1] \ .$$

Le morphisme $E \to L_{\mathbb{Q}}E$ devient un isomorphisme après application de $L_{\mathbb{Q}}$, on en déduit que $L_{\mathbb{Q}}(E_{\mathrm{tor}}) = 0$; puisque $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}} = \ker L_{\mathbb{Q}}$, il en découle que $E_{\mathrm{tor}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

Soit F un autre objet de $\mathcal{T}$, on choisit de même un triangle distingué

$$F_{\mathrm{tor}} \longrightarrow F \longrightarrow L_{\mathbb{Q}}F \longrightarrow F_{\mathrm{tor}}[1] \ .$$

Si on montre que tout morphisme $f\colon E \to F$ induit un *unique* morphisme entre les triangles construits pour E et F, on aura montré à la fois que le triangle associé à un objet E est défini à isomorphisme unique près et que ce triangle est fonctoriel en E. Soit donc $f\colon E \to F$ un morphisme. D'après les axiomes des catégories triangulées, il existe un morphisme $g\colon E_{\mathrm{tor}} \to F_{\mathrm{tor}}$ donnant lieu à un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathrm{tor}} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & E \arrow[r] \arrow[d, "f"] & L_{\mathbb{Q}}E \arrow[r] \arrow[d, "L_{\mathbb{Q}}(f)"] & E_{\mathrm{tor}}[1] \arrow[d, dotted, "g[1]"] \\
F_{\mathrm{tor}} \arrow[r] & F \arrow[r] & L_{\mathbb{Q}}F \arrow[r] & F_{\mathrm{tor}}[1]
\end{tikzcd}$$

[2]De façon générale, un foncteur $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre catégories quelconques se factorise en $\mathscr{A} \to \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ où $\mathscr{B}'$ est la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathscr{A}$ mais $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(FX,FY)$. Sur les objets, le foncteur $\mathscr{A} \to \mathscr{B}'$ vaut l'identité, sur les morphismes, il est induit par l'action de F. Inversement, le foncteur $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ coïncide avec F sur les objets mais vaut l'identité au niveau des morphismes. Ainsi, le foncteur $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ est pleinement fidèle et $\mathscr{A} \to \mathscr{B}'$ est surjectif sur les objets. Si F est essentiellement surjectif, le foncteur $\mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ est une équivalence de catégories.

Il s'agit de montrer que g est unique. Soit g' un autre tel morphisme, la différence $g - g' \colon E_{\mathrm{tor}} \to F_{\mathrm{tor}}$ se factorise par $L_{\mathbb{Q}}F[-1] \to F_{\mathrm{tor}}$, comme $E_{\mathrm{tor}} \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et $L_{\mathbb{Q}}F[-1] \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_{\mathrm{tor}}, L_{\mathbb{Q}}F[-1]) = 0$ (cf. proposition A.22), ce qui permet bien d'obtenir que $g = g'$.

Comme le noyau de $L_{\mathbb{Q}} \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ est une équivalence de catégories, le noyau de $Q \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est également $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. Vérifions que Q vérifie la propriété universelle permettant d'identifier $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ à la catégorie triangulée quotient $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. Soit donc $F \colon \mathcal{T} \to \mathscr{D}$ un foncteur triangulé annulant $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. On veut définir un foncteur triangulé $G \colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{D}$ tel que $F = G \circ Q$. Comme $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ ont (aux notations près) les mêmes objets, on doit poser $G(X_{\mathbb{Q}}) = F(X)$ pour tout objet $X_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$. Définissons l'action de G sur un morphisme $f \colon X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, f correspond ainsi à un morphisme $g \colon L_{\mathbb{Q}}X \to L_{\mathbb{Q}}Y$. D'après ce qui précède, le cône du morphisme $X \to L_{\mathbb{Q}}X$ est dans $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, et comme F annule $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, $F(X) \to F(L_{\mathbb{Q}}X)$ est un isomorphisme, on peut donc définir un morphisme $FX \to FY$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, dotted] & F(L_{\mathbb{Q}}X) \arrow[d, "F(g)"] \\ FY \arrow[r, "\sim"] & F(L_{\mathbb{Q}}Y) \end{tikzcd}$$

Comme $FX = G(X_{\mathbb{Q}})$ et $FY = G(Y_{\mathbb{Q}})$, on a défini l'image $G(f) \colon G(X_{\mathbb{Q}}) \to G(Y_{\mathbb{Q}})$ de f par G. On vérifie aussitôt que l'on définit ainsi un foncteur $G \colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{D}$ tel que $F = G \circ Q$. On a déjà vu l'unicité de G au niveau des objets, au niveau de l'action sur les morphismes, cela se montre assez facilement en examinant le carré commutatif précédent. Enfin, on montre sans difficulté que G est un foncteur triangulé. On a ainsi esquissé la vérification de la propriété universelle qui fait de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie triangulée quotient $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

Compte tenu de l'inclusion triviale $\mathcal{T}_{\mathrm{exp.f.}} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, les propositions A.16 et A.25 indiquent qu'on a un foncteur triangulé évident $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, les formules vues précédemment impliquent que si $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ et $E \in \mathcal{T}$, l'application induite par ce foncteur est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q}}(X_{\mathbb{Q}}, E_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}}, E_{\mathbb{Q}}) \ .$$

Théorème A.26 *Soit $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale symétrique triangulée* [3] *admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs de présentation finie. On suppose que pour tout objet B de $\mathcal{T}$, le foncteur $- \otimes B \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ commute aux sommes directes.*

Alors, le foncteur composé $i \circ L_{\mathbb{Q}} \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathcal{T}$ s'identifie au foncteur

$$(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes - \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T} \ .$$

Pour tout $A \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et $B \in \mathcal{T}$, on a $A \otimes B \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. La structure monoïdale symétrique sur $\mathcal{T}$ passe au quotient par $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ pour donner une structure monoïdale symétrique sur la catégorie $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, et le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est monoïdal symétrique.

[3] On sous-entend ici que le bifoncteur $\otimes \colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ est triangulé et que tous les isomorphismes de foncteurs intervenant dans les « contraintes » d'unité, d'associativité et de commutativité sont compatibles aux foncteurs de translation.

Pour tout objet E de $\mathcal{T}$, on a un morphisme fonctoriel

$$\varphi_E \colon E \simeq \mathbf{1} \otimes E \to (L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E$$

induit par $\mathbf{1} \to L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}$. Le bifoncteur $\otimes \colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ étant « bilinéaire », il est clair que le fait que $(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1})$ soit dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ implique que $(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E$ soit aussi dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Pour obtenir la description voulue du foncteur $i \circ L_{\mathbb{Q}}$, il reste à montrer que $Q(\varphi_E) \colon E_{\mathbb{Q}} \to ((L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E)_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, c'est-à-dire que pour tout $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, la flèche évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, (L_{\mathbb{Q}}1) \otimes E)$$

est bijective. Pour cela, revenons à la construction de $L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}$ donnée dans la démonstration de la proposition A.22 : on choisit une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls telle que

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} n_k = \prod_{p \text{ premier}} p^{\infty}$$

et on considère le système inductif

$$\mathbf{1}_0 \overset{[n_0]}{\to} \mathbf{1}_1 \overset{[n_1]}{\to} \mathbf{1}_2 \overset{[n_2]}{\to} \mathbf{1}_3 \overset{[n_3]}{\to} \dots$$

La construction des colimites homotopiques donne un triangle distingué

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_n \overset{d}{\to} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_n \overset{i}{\to} L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1} \overset{+}{\to} \ .$$

En appliquant le foncteur triangulé $- \otimes E$ (qui commute aux sommes directes), on obtient un nouveau triangle distingué

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \overset{d}{\to} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \overset{i}{\to} (L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E \overset{+}{\to} \ .$$

autrement dit, l'objet $(L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E$ s'identifie à une colimite homotopique du système inductif

$$E_0 \overset{[n_0]}{\to} E_1 \overset{[n_1]}{\to} E_2 \overset{[n_2]}{\to} E_3 \overset{[n_3]}{\to} \dots$$

Il en résulte aussitôt que pour tout $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, la flèche

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, (L_{\mathbb{Q}}1) \otimes E)$$

est bijective, ce qui démontre la première assertion de cette proposition.

Soit $A \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ et $B \in \mathcal{T}$, si on applique à $A \otimes B$ et à A la formule $L_{\mathbb{Q}}E \simeq (L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes E$ qui vient d'être établie, on obtient

$$L_{\mathbb{Q}}(A \otimes B) \simeq ((L_{\mathbb{Q}}\mathbf{1}) \otimes A) \otimes B \simeq (L_{\mathbb{Q}}A) \otimes B$$

Le noyau de $L_{\mathbb{Q}}$ étant $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$, on a $L_{\mathbb{Q}}A = 0$, ce qui montre que $L_{\mathbb{Q}}(A \otimes B) = 0$, d'où $A \otimes B \in \mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$.

On note $\overline{\mathbf{1}}$ l'image de $\mathbf{1}$ par le foncteur $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$. Compte tenu du fait que $\mathcal{T}/\mathcal{T}_{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, il est tout à fait clair que le résultat qui vient d'être établi implique l'existence (et l'unicité) d'un bifoncteur $\overline{\otimes}\colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ déduit de $\otimes\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ par passage au quotient par la sous-catégorie triangulée $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ de $\mathcal{T}$ que l'on peut qualifier d'« idéal bilatère ». Les contraintes d'unité, d'associativité et de commutativité pour $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ se localisent trivialement pour en donner pour $(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}, \overline{\otimes}, \overline{\mathbf{1}})$. Les axiomes vérifiés par $(\mathcal{T}, \otimes, \mathbf{1})$ impliquent aussitôt les mêmes axiomes pour $(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}, \overline{\otimes}, \overline{\mathbf{1}})$. On obtient ainsi une structure de catégorie monoïdale symétrique sur $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ et un foncteur monoïdal symétrique $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$; pour préciser les choses, si A et B sont deux objets de $\mathcal{T}$, on a bien un isomorphisme canonique $(A \otimes B)_{\mathbb{Q}} = A_{\mathbb{Q}} \overline{\otimes} B_{\mathbb{Q}}$. On a bien établi le théorème.

2.3 Exemples

Pour tout anneau A on note $A{-}\mathrm{Mod}$ la catégore abélienne des A-modules. Si $\mathscr{A}$ est une catégorie abélienne, on note $\mathsf{D}(\mathscr{A})$ la catégorie dérivée de $\mathscr{A}$ [4].

Comme annoncé dans l'introduction de cette partie, la construction de la version $\mathbb{Q}$-localisée d'une catégorie triangulée est raisonnable dans la mesure où l'on a la proposition suivante :

Proposition A.27 *Soit A un anneau, on note $A_{\mathbb{Q}}$ l'anneau $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Le foncteur évident*

$$\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}{-}\mathrm{Mod})$$

est une équivalence de catégories.

Tout d'abord, $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})$ possède évidemment des sommes directes quelconques, l'objet A de $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})$ est de présentation finie et forme à lui tout seul un ensemble de générateurs de présentation finie de $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})$, en effet pour tout complexe de A-modules $K^\bullet$, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})}(A\,[-n]\,, K^\bullet) \simeq H^n(K^\bullet)$. On est donc dans le cadre de la définition A.24 permettant de parler de la version $\mathbb{Q}$-localisée $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}}$ de la catégorie triangulée $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})$. Le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\colon A{-}\mathrm{Mod} \to A_{\mathbb{Q}}{-}\mathrm{Mod}$ est exact, il induit donc un foncteur $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}{-}\mathrm{Mod})$. Pour tout complexe $K^\bullet$ de A-modules, on a $H^n(K^\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^n(K^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, on en déduit aussitôt que le noyau du foncteur $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod}) \to \mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}{-}\mathrm{Mod})$ est précisément $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})_{\mathrm{tor}}$ qui est la sous-catégorie triangulée de $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})$ constituée des complexes dont les objets de cohomologie sont de torsion (comme groupes abéliens). Par passage au quotient par cette sous-catégorie triangulée $\mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})_{\mathrm{tor}}$ (cf. proposition A.25), on en déduit un foncteur triangulé :

$$G\colon \mathsf{D}(A{-}\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}{-}\mathrm{Mod})\ .$$

[4]Si la catégorie abélienne $\mathscr{A}$ n'est pas petite, des problèmes théoriques peuvent survenir concernant la construction de la localisation qui donne naissance à la catégorie dérivée. Ce problème peut toutefois être résolu dans le cas d'une catégorie $A{-}\mathrm{Mod}$ de modules sur un anneau A : on peut construire une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des complexes dans $A{-}\mathrm{Mod}$ ayant les quasi-isomorphismes comme équivalences faibles, cf. [35].

Le foncteur de restriction des scalaires $A_{\mathbb{Q}}-\mathrm{Mod} \to A-\mathrm{Mod}$ induit un foncteur triangulé $\mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}-\mathrm{Mod}) \to \mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})$ qui après composition à gauche avec le foncteur canonique $\mathsf{D}(A-\mathrm{Mod}) \to \mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}}$ donne un foncteur triangulé :

$$F\colon \mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}-\mathrm{Mod}) \to \mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}}\ .$$

Pour tout complexe $K^\bullet$ dans $A_{\mathbb{Q}}-\mathrm{Mod}$, on a un isomorphisme évident de complexes $K^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} K^\bullet$, ce qui donne un isomorphisme $(G \circ F)(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} K^\bullet$ dans $\mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}})$. Ces isomorphismes se localisent pour donner un isomorphisme de foncteurs $G\circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathsf{D}(A_{\mathbb{Q}}-\mathrm{Mod})}$. De même, pour tout complexe $K^\bullet$ dans $A-\mathrm{Mod}$, on a un morphisme de complexes $K^\bullet \to K^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dont on peut considérer l'image dans la catégorie $\mathbb{Q}$-localisée $\mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}}$, on obtient ainsi un morphisme de foncteurs $\mathrm{id}_{\mathsf{D}(A-\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}}} \to F \circ G$ dont on vérifie que c'est un isomorphisme : pour tout complexe $K^\bullet$ de A-modules, le cône du morphisme de complexes $K^\bullet \to K^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ a des objets de cohomologie de torsion.

Ainsi, F et G sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

Le lemme suivant permet souvent de faire passer une adjonction entre deux catégories triangulées à leurs versions $\mathbb{Q}$-localisées :

Lemme A.28 *Soit $F\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ un foncteur triangulé entre catégories triangulées possédant des sommes directes quelconques et des ensembles de générateurs formés d'objets de présentation finie. On suppose que F admet un adjoint à gauche $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ (automatiquement triangulé). Alors G envoie $\mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{tor}}$ et on a un foncteur triangulé induit $G_{\mathbb{Q}}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$. Le foncteur F préserve les sommes directes si et seulement si $G(\mathscr{C}^{\mathrm{pf}}) \subset \mathscr{D}^{\mathrm{pf}}$. Si F préserve les sommes directes, on a $F(\mathscr{D}_{\mathrm{tor}}) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$, le foncteur F passe au quotient pour donner un foncteur triangulé $F_{\mathbb{Q}}\colon \mathscr{D}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$, et les foncteurs $(G_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}})$ forment un couple de foncteurs adjoints.*

Soit X un objet de $\mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$. Pour montrer que GX est dans $\mathscr{D}_{\mathrm{tor}}$, il suffit de vérifier que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(GX, E) = 0$ pour tout objet E de $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Par adjonction, cela se ramène à montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, FE) = 0$, ce qui est bien vrai parce que $X \in \mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$ et que FE est $\mathbb{Q}$-local (tout foncteur additif entre catégories triangulées préserve les objets $\mathbb{Q}$-locaux). D'après la proposition A.25, le foncteur G passe au quotient pour donner un foncteur triangulé $G_{\mathbb{Q}}\colon \mathscr{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$.

Comme $\mathscr{C}$ possède un ensemble de générateurs de présentation finie, le foncteur F commute aux sommes directes si et seulement si pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'objets de $\mathscr{D}$ indexée par un ensemble I, l'application évidente

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, FA_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(\oplus_{i\in I} A_i))$$

est bijective pour tout objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{pf}}$ (ou seulement pour les objets X de la forme $Y\,[n]$ pour Y faisant partie d'un ensemble de générateurs de présentation finie fixé de $\mathscr{C}$), ce qui par adjonction revient à la bijectivité de l'application

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(GX, A_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(GX, \oplus_{i\in I} A_i)\,,$$

ce qui signifie précisément que GX est dans $\mathscr{D}^{\mathrm{pf}}$.

Supposons que F commute aux sommes directes quelconques, c'est-à-dire que $G(\mathscr{C}^{\mathrm{pf}}) \subset \mathscr{D}^{\mathrm{pf}}$. Soit $E \in \mathscr{D}_{\mathrm{tor}}$. Montrons que $FE \in \mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$; pour cela, soit $X \in \mathscr{C}^{\mathrm{pf}}$, on veut montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, FE)$ est de torsion ; par adjonction, ce groupe s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(GX, E)$ qui est bien de torsion parce que $GX \in \mathscr{D}^{\mathrm{pf}}$ et $E \in \mathscr{D}_{\mathrm{tor}}$. On a bien montré que $F(\mathscr{D}_{\mathrm{tor}}) \subset \mathscr{C}_{\mathrm{tor}}$. On en déduit que le foncteur F passe au quotient pour donner un foncteur triangulé $F_{\mathbb{Q}} \colon \mathscr{D}_{\mathbb{Q}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$. Le couple de foncteurs adjoints (G, F) se restreint tautologiquement en un couple de foncteurs adjoints $(G_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}, F_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}})$ sur les sous-catégories triangulées $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$ et $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}}$. Les foncteurs évidents $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}-\mathrm{loc}} \to \mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$ étant des équivalences de catégories, on peut transporter l'adjonction précédente pour obtenir l'adjonction voulue entre $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{D}_{\mathbb{Q}}$ *via* les foncteurs $(G_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}})$, ce qui achève la démonstration du lemme.

La construction des catégories triangulées $\mathbb{Q}$-localisées permet d'énoncer convenablement un résultat classique de topologie algébrique :

Théorème A.29 *Les foncteurs adjoints $\tilde{C} \colon \mathcal{SH}^{\mathrm{top}} \to \mathsf{D}(\mathbb{Z}-\mathrm{Mod})$ et $\mathbb{H} \colon \mathsf{D}(\mathbb{Z}-\mathrm{Mod}) \to \mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{D}(\mathbb{Z}-\mathrm{Mod})_{\mathbb{Q}} \simeq \mathsf{D}(\mathbb{Q}-\mathrm{Mod})$.*

Pour donner une idée de démonstration de ce théorème, une fois que l'on connaît l'adjonction entre les catégories triangulées $\mathcal{SH}^{\mathrm{top}}$ et $\mathsf{D}(\mathbb{Z}-\mathrm{Mod})$ (on trouve dans [42] une description de $\mathsf{D}(\mathbb{Z}-\mathrm{Mod})$ qui permet d'obtenir cette adjonction comme résultant d'une adjonction de Quillen entre catégories de modèles), le lemme A.28 permet d'obtenir une adjonction entre les versions $\mathbb{Q}$-localisées de ces catégories triangulées. Pour montrer que les foncteurs obtenus sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre, on se ramène à montrer que les morphismes d'adjonction $\tilde{C}(\mathbb{H}(\mathbb{Q})) \to \mathbb{Q}$ et $S^0_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{H}(\mathbb{Q})$ sont des isomorphismes, ce qui découle de résultats bien connus de topologie algébrique (calculs des groupes d'homotopies rationnels des sphères et de la cohomologie rationnelle des espaces d'Eilenberg-MacLane).

2.4 Comparaison entre les deux constructions

Proposition A.30 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de présentation finie. Alors, le foncteur évident*

$$\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q} \to (\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$$

identifie $(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$ à l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q}$.

On sait que si $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ et $Y \in \mathcal{T}$, l'application évidente est bijective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}}, Y_{\mathbb{Q}})$$

(cf. proposition A.22). Le foncteur $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est donc pleinement fidèle. Si $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ et $Y \in \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}}, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, L_{\mathbb{Q}}(Y))$ Comme le foncteur $L_{\mathbb{Q}} \colon \mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{T}$

commute aux sommes directes, il vient que pour tout $X \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, on a $X_{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$. On obtient un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q} \to (\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}} .$$

Si $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un ensemble de générateurs de présentation finie de $\mathcal{T}$, on montre trivialement que $(X_{\alpha,\mathbb{Q}})_{\alpha \in A}$ est un ensemble de générateurs de présentation finie de $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$. La proposition A.20 permet de conclure.

Remarque A.31 *Il est en général bien nécessaire de prendre l'enveloppe pseudo-abélienne de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q}$ pour obtenir $(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$. Soit A un anneau commutatif. On peut noter $\mathcal{T}$ la catégorie dérivée (non bornée) de A. La sous-catégorie triangulée $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ est la « catégorie triangulée des complexes parfaits de A-modules » (en effet, d'après la proposition A.20, $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ est la sous-catégorie triangulée pseudo-abélienne de $\mathcal{T}$ engendrée par le A-module libre de rang un A qui forme à lui tout seul un générateur de présentation finie). La proposition A.27 montre que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie à la catégorie dérivée des $A_{\mathbb{Q}}$-modules. Le groupe de Grothendieck de $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$ (resp. $(\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$) s'identifie à $K_0(A)$ (resp. $K_0(A_{\mathbb{Q}})$). Si le foncteur $\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \to (\mathcal{T}_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{pf}}$ était essentiellement surjectif, on obtiendrait que le morphisme de groupes de Grothendieck*

$$K_0(A) \to K_0(A_{\mathbb{Q}})$$

serait surjectif. J'affirme que ce n'est pas le cas si $A = \mathbb{Z}[X]/(X^2-1)$. En effet, $A_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. On obtient ainsi un isomorphisme $K_0(A_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donné par le « rang virtuel » en $x = 1$ et en $x = -1$. Soit M un A-module projectif de type fini. Pour tout point $x \in \operatorname{Spec} A$, on peut définir le rang de M en x, et plus généralement, le « rang virtuel » en x de tout élément de $K_0(A)$: c'est une fonction localement constante sur $\operatorname{Spec} A$, donc constante puisque A n'admet pas d'idempotent autre que 0 et 1. L'application composée

$$K_0(\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \to K_0(\mathbb{Z}[X]/(X^2-1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^2$$

n'est donc pas surjective, la catégorie $\mathcal{T}^{\mathrm{pf}} \otimes \mathbb{Q}$ n'est pas pseudo-abélienne.

Proposition A.32 *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée admettant des sommes directes quelconques et possédant un ensemble de générateurs formé d'objets de présentation finie. Tout objet de $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ est colimite homotopique d'objets de $\mathcal{T}_{\mathrm{exp.f.}}$. En particulier, $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$ est la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$ stable par sommes directes (dénombrables) et contenant $\mathcal{T}_{\mathrm{exp.f.}}$.*

Soit M un objet de $\mathcal{T}_{\mathrm{tor}}$. Soit p un nombre premier. Pour tout entier naturel n, on peut former un triangle distingué de la forme suivante :

$$M \xrightarrow{p^n} M \xrightarrow{g_n} M/p^n \xrightarrow{f_n} M[1] .$$

D'après le lemme A.15, M/p^n est tué par p^{2n}.

D'après l'axiome (TR III), il existe un morphisme $i_n \colon M/p^n \to M/p^{n+1}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "p"] & M/p^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "i_n"] & M[1] \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "p^{n+1}"] & M \arrow[r, "g_{n+1}"] & M/p^{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & M[1]
\end{tikzcd}$$

Lemme A.33 *Pour tout objet $A \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, l'application évidente*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M/p^n) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M\,[1])$$

induit une bijection sur les sous-groupes de p^∞-torsion de ces groupes abéliens de torsion.

On peut appliquer le foncteur cohomologique $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A,-)$ au diagramme de triangles distingués obtenu ci-dessus pour obtenir un diagramme de suites exactes longues ; tous les groupes qui interviennent sont des groupes de torsion, on conclut par une petite chasse au diagramme.

En considérant tous les nombres premiers simultanément, on obtient le lemme suivant :

Lemme A.34 *Pour tout objet $A \in \mathcal{T}^{\mathrm{pf}}$, l'application évidente*

$$\bigoplus_{p \text{ premier}} \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M/p^n) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M\,[1])$$

est bijective.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$M/n = \bigoplus_{p \text{ premier}} M/p^{v_p(n)}\ ,$$

où v_p est la valuation p-adique. Si n' divise n, les morphismes $i_k\colon M/p^k \to M/p^{k+1}$ obtenus pour chaque nombre premier p induisent un morphisme $M/n' \to M/n$. On obtient ainsi un système inductif $n \longmapsto M/n$ indexé par $\mathbb{N} - \{0\}$ ordonné par la relation de divisibilité. Les flèches $f_k\colon M/p^k \to M\,[1]$ induisent des morphismes compatibles $M/n \to M\,[1]$ pour tout $n \geq 1$. Le lemme précédent se reformule alors en disant que l'application évidente

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M/n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(A, M\,[1])$$

est bijective. On choisit une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels non nuls telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, n_k divise n_{k+1} et que le plus petit commun multiple des n_k pour $k \in \mathbb{N}$ soit l'entier surnaturel produit des p^∞ pour p parcourant tous les nombres premiers. On extrait ainsi un système inductif

$$M/n_0 \to M/n_1 \to M/n_2 \to \dots$$

dont on choisit une colimite homotique. D'après la proposition A.4, il existe un morphisme

$$\operatorname*{hocolim}_{k\in\mathbb{N}} M/n_k \to M\,[1]$$

compatible aux morphismes $M/n_k \to M\,[1]$ précédemment définis. Le lemme A.3 est les bijections obtenues ci-dessus permettent de conclure que ce morphisme est un isomorphisme. Comme les objets M/n_k sont d'exposant fini, on a bien écrit $M\,[1]$ comme colimite homotopique d'objets d'exposant fini. En appliquant ceci à $M\,[-1]$, on obtient la conclusion pour M, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Annexe B

Foncteurs définis par un objet de $\mathscr{H}(S)$

L'objet de cette annexe est de donner une interprétation abstraite de la propriété (ii) (cf. définition III.8).

1 Notations

On se donne une petite catégorie $\mathscr{C}$, une catégorie $\mathscr{H}$ et un foncteur $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{H}$. On note $y\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ le plongement de Yoneda et on définit $G = F \circ y\colon \mathscr{C} \to \mathscr{H}$.

On se donne de plus un ensemble $\mathscr{S}$ de flèches de $\mathscr{C}$ qui sont envoyées sur des isomorphismes de $\mathscr{H}$ par le foncteur $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{H}$. Pour simplifier, on suppose que $\mathscr{S}$ contient les identités de $\mathscr{C}$ et est stable par composition à gauche et à droite avec des isomorphismes (autrement dit une flèche isomorphe à une flèche appartenant à $\mathscr{S}$ est dans $\mathscr{S}$). On obtient un foncteur $G'\colon \mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}] \to \mathscr{H}$.

Définition B.1 *On note $\varphi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ le foncteur qui à un objet X de $\mathscr{H}$ associe le préfaisceau d'ensembles φX qui à un objet U de $\mathscr{C}$ fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(GU, X)$.*

Remarque B.2 *Si notre audace nous autorisait à considérer la « catégorie » $\mathscr{H}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ (qui pose des problèmes puisque $\mathscr{H}$ n'est pas supposée petite, ni même essentiellement petite), on pourrait écrire $\varphi = G^\star \circ y'$ où $y'\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ est le plongement de Yoneda et $G^\star\colon \mathscr{H}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ le foncteur induit par G au niveau des catégories de préfaisceaux (cf. SGA 4 I 5.0).*

Définition B.3 *Pour tout objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, on note τ_X le morphisme $X \to \varphi F X$ dans $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ qui induit, pour tout objet U de $\mathscr{C}$, l'application :*

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(yU, X) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(GU, FX) = (\varphi F X)(U)$$

induite par le foncteur F. On dispose ainsi d'une transformation naturelle évidente de foncteurs :

$$\tau\colon \mathrm{id}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}} \to \varphi \circ F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}\ .$$

Dans la suite, on identifiera *implicitement* les préfaisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ aux préfaisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}$ qui transforment les flèches de $\mathscr{S}$ en bijections. On observe ainsi que pour tout objet E de $\mathscr{H}$, φE est un objet de $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, le foncteur φ se factorise ainsi en un foncteur $\mathscr{H} \to \mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$.

On dispose ainsi d'un diagramme de catégories :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r] \arrow[d, "y"'] \arrow[dr, "G"] & \mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}] \arrow[d, "G'"] \\
\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \arrow[r, "F"] & \mathscr{H} \arrow[l, dotted, bend left, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

2 L'exemple

Dans cette section, on indique une situation particulière entrant dans le cadre des notations introduites précédemment.

Définition B.4 *Si S est un schéma noethérien, on note $\mathscr{H}(S)$ la catégorie homotopique des S-schémas définie dans [57, section 3.2, page 105] et [76], on note aussi $\mathscr{H}_\bullet(S)$ sa variante pointée.*

On peut considérer, pour tout schéma (régulier) S, les catégories $\mathscr{C} = \mathrm{Sm}/S$, $\mathscr{H} = \mathscr{H}(S)$ et le foncteur évident $F\colon \mathrm{Sm}/S^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{H}(S)$. Pour $\mathscr{S}$, on peut considérer diverses sous-familles de la famille des morphismes $f\colon X \to Y$ dans Sm/S induisant un isomorphisme dans $\mathscr{H}(S)$ (c'est-à-dire les morphismes dans Sm/S définissant des $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles), on a déjà vu la famille $\mathscr{T}$ introduite dans la définition II.14, en voici deux autres :

Définition B.5 *On note $\mathscr{S}_\infty$ la famille formée par tous les morphismes $f\colon X \to Y$ dans Sm/S induisant un isomorphisme dans $\mathscr{H}(S)$. On note $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ la famille formée des morphismes* lisses *$f\colon X \to Y$ dans Sm/S induisant un isomorphisme dans $\mathscr{H}(Y)$.*

Proposition B.6 *On a les inclusions $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}_{\mathrm{rel}} \subset \mathscr{S}_\infty$.*

L'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ résulte du lemme III.11, l'autre inclusion est donnée par le lemme suivant :

Lemme B.7 *On a l'inclusion $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}} \subset \mathscr{S}_\infty$. De plus, $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ (et $\mathscr{S}_\infty$) sont stables par composition.*

Par définition, $\mathscr{S}_\infty$ est stable par composition. Le fait que $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ soit elle aussi stable par composition résultera assez facilement de l'inclusion $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}} \subset \mathscr{S}_\infty$. Il n'y a donc qu'à montrer cette dernière. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme appartenant à $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$. Soit $g\colon Y \to S$ le morphisme structural du S-schéma Y. D'après [57, page 104], le foncteur « image inverse » $g^\star\colon \mathscr{H}(S) \to \mathscr{H}(Y)$ admet un adjoint à gauche $\mathrm{L}g_\sharp\colon \mathscr{H}(Y) \to \mathscr{H}(S)$. Par construction, si Z est un Y-schéma lisse, $\mathrm{L}g_\sharp Z = g_\sharp Z$ et $g_\sharp Z = Z$ (considéré comme S-schéma). Le morphisme $f\colon X \to Y$ induit un isomorphisme dans $\mathscr{H}(Y)$ par hypothèse, en lui appliquant le foncteur $\mathrm{L}g_\sharp$, on obtient que $f\colon X \to Y$ induit aussi un isomorphisme dans $\mathscr{H}(S)$.

La famille $\mathscr{S}_\infty$ est la plus grande famille à laquelle on puisse envisager d'appliquer les méthodes de cette section. Les familles $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ et $\mathscr{T}$ ont le mérite de satisfaire une condition technique, à savoir l'existence d'un faible calcul de fractions à droite (cf. remarque B.16).

3 Formulation du problème

Soit X un objet de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, E un objet de $\mathscr{H}$, on cherche à déterminer des conditions suffisantes pour que certaines des flèches du diagramme suivant soient injectives, ou surjectives :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(FX,E) \arrow[r, "\alpha_{X,E}"] \arrow[dr, "\gamma_{X,E}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi FX,\varphi E) \arrow[d, "\beta_{X,E}"] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X,\varphi E) \end{tikzcd}$$

L'application $\alpha_{X,E}$ est celle induite par le foncteur $\varphi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ sur les Hom ; l'application $\beta_{X,E}$ est induite par le morphisme $\tau_X\colon X \to \varphi FX$ issu de la transformation naturelle $\tau\colon \mathrm{id} \to \varphi\circ F$ de foncteurs $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$; l'application $\gamma_{X,E}$ est la composée des deux autres.

Dans la prochaine section, on donne une interprétation catégorique de $\beta_{X,E}$ qui permet de donner une condition (portant uniquement sur X) assurant que $\beta_{X,E}$ est injective, voir notamment le théorème B.19.

Dans la situation de l'exemple de la section précédente, on peut montrer que si X est une limite inductive indexée par $\mathbb{N}$ de préfaisceaux représentables, alors l'application $\gamma_{X,E}$ est surjective : dans le cas favorable où on pourra montrer que $\beta_{X,E}$ est injective et $\gamma_{X,E}$ bijective, les trois flèches $\alpha_{X,E}$, $\beta_{X,E}$ et $\gamma_{X,E}$ seront bijectives, voir notamment le théorème III.16.

4 Dérivation de foncteurs ensemblistes

Dans cette section, on se propose de déterminer une condition suffisante (voire nécessaire et suffisante sous certaines hypothèses) sur un objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ pour que pour tout objet P de $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ (noter le « $[\mathscr{S}^{-1}]$ », c'est le point-clef ici), l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi FX,P) \overset{\beta'_{X,P}}{\to} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X,P)$$

induite par $\tau_X\colon X \to \varphi FX$ soit injective (si c'est le cas, l'application $\beta_{X,E} = \beta'_{X,\varphi E}$ sera bien injective pour tout objet E de $\mathscr{H}$).

Proposition B.8 *Le foncteur d'« inclusion » de* $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ *dans* $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ *admet un adjoint à gauche que nous noterons* $-[\mathscr{S}^{-1}]$*. Pour tout objet* X *de* $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$*, on dispose ainsi d'un morphisme* $X \to X[\mathscr{S}^{-1}]$ *(où* $X[\mathscr{S}^{-1}]$ *est un objet de* $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$*) tel que pour tout objet* P *de* $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$*, l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X\left[\mathscr{S}^{-1}\right], P) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, P)$$

qui s'en déduit soit bijective.

Notons $L\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ le foncteur de localisation. Le foncteur pleinement fidèle évident $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ est le foncteur $L^\star$ de SGA 4 I 5.0 et celui-ci admet un adjoint à gauche $L_!$ d'après SGA 4 I 5.1, ce qui assure bien l'existence du foncteur $-[\mathscr{S}^{-1}]$.

On dispose d'une autre interprétation : si on considère un objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ comme un foncteur $X\colon \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$, le foncteur $X[\mathscr{S}^{-1}] : \mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}} \to \mathbf{Ens}$ cherché n'est autre que le foncteur dérivé total à droite de X. Ce foncteur existe bien ici, il s'agit d'un cas particulier d'extension de Kan, cf. [25, remark 7.4, Chapter II] pour cette interprétation des foncteurs dérivés totaux. On a ainsi la formule

$$(X\left[\mathscr{S}^{-1}\right])(U) = \operatorname*{colim}_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]}(U,V), V\in\mathscr{C}} X(V) \tag{B.1}$$

pour tout objet U de $\mathscr{C}$.

Le préfaisceau $\varphi F X$ étant un préfaisceau sur $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$, on peut factoriser le morphisme $\tau_X\colon X \to \varphi F X$ en $X \to X[\mathscr{S}^{-1}] \xrightarrow{\tilde{\tau}_X} \varphi F X$, ce qui donne une factorisation de l'application $\beta'_{X,E}$ de la façon suivante, pour tout objet P de $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi F X, P) \arrow[rr, "\beta'_{X,P}"] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, P) \\
& \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X[\mathscr{S}^{-1}], P) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire B.9 *L'application* $\beta'_{X,P}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi F X, P) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, P)$ *est injective pour tout objet* P *de* $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ *si et seulement si le morphisme*

$$\tilde{\tau}_X\colon X\left[\mathscr{S}^{-1}\right] \to \varphi F X$$

est un épimorphisme de préfaisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$*.*

On rappelle qu'un morphisme de préfaisceaux d'ensembles $A \to B$ sur une catégorie $\mathscr{D}$ est un épimorphisme si et seulement si les applications $A(X) \to B(X)$ associées pour tout objet X de $\mathscr{D}$ sont surjectives [1].

[1] Rappelons brièvement pourquoi : en présence de sommes amalgamées, un morphisme $A \to B$ dans une catégorie est un épimorphisme si et seulement si le morphisme « codiagonal » $B \vee_A B \to B$ est un isomorphisme. Dans une catégorie de préfaisceaux, les limites inductives existent (en particulier, les sommes amalgamées existent) et se calculent terme à terme ; on obtient ainsi le critère voulu.

Définition B.10 (propriété (i)) *Soit X un objet de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$. On dira que $(X,\mathscr{S})$ satisfait la propriété (i) si pour tout objet U de $\mathscr{C}$ et tout élément u de $(\varphi FX)(U)$, il existe un objet V de $\mathscr{C}$, un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]}(U,V)$ et un élément v de $X(V)$ tel que $u = f^\star(\tilde{\tau}_X(v))$.*

Le lemme suivant résulte aussitôt de la formule (B.1) :

Lemme B.11 *Soit X un objet de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$, le morphisme $\tilde{\tau}_X \colon X[\mathscr{S}^{-1}] \to \varphi FX$ est un épimorphisme dans $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ si et seulement si (X,S) vérifie la propriété (i).*

Définition B.12 (propriété (i')) *On dira que $(X,\mathscr{S})$ satisfait la propriété (i') si pour tout objet U de $\mathscr{C}$ et tout élément u de $(\varphi FX)(U)$, il existe un morphisme $s \colon \tilde{U} \to U$ qui soit un composé de morphismes de $\mathscr{S}$ dans la catégorie $\mathscr{C}$ et $v \in X(\tilde{U})$ tel que $s^\star u = \tilde{\tau}_X(v)$.*

Autrement dit, on obtient la propriété (i') en restreignant les morphismes f autorisés dans la propriété (i) à ceux de la forme s^{-1} dans $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ où s est un composé de morphismes appartenant à $\mathscr{S}$. Dans la variante (i") qui suit, on n'autorise que les inverses dans $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ des morphismes appartenant à $\mathscr{S}$:

Définition B.13 (propriété (i")) *On dira que $(X,\mathscr{S})$ satisfait la propriété (i") si pour tout objet U de $\mathscr{C}$ et tout élément u de $(\varphi FX)(U)$, il existe un morphisme $s \colon \tilde{U} \to U$ appartenant à $\mathscr{S}$ et $v \in X(\tilde{U})$ tel que $s^\star u = \tilde{\tau}_X(v)$.*

Pour un couple $(X,\mathscr{S})$ donné, on a donc les implications évidentes

$$(i'') \Rightarrow (i') \Rightarrow (i)\,.$$

Si $\mathscr{S}$ est stable par composition, (i'') et (i') sont évidemment équivalentes.

Lemme B.14 *On suppose que $F \colon \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens} \to \mathscr{H}$ commute aux produits finis. Si deux objets X et Y de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}$ sont tels que $(X,\mathscr{S})$ et $(Y,\mathscr{S})$ satisfont la propriété (i'), alors $(X\times Y,\mathscr{S})$ aussi.*

On se donne donc X et Y comme dans l'énoncé. Vérifions la propriété (i'). Soit U un objet de $\mathscr{C}$ et $u \in (\varphi F(X\times Y))(U)$. Comme F commute aux produits finis, on peut représenter u comme un couple $(u_1,u_2) \in (\varphi F(X))(U) \times (\varphi F(Y))(U)$. D'après la propriété (i') appliquée à l'élément $u_1 \in (\varphi FX)(U)$, il existe un morphisme $f \colon U' \to U$ dans $\mathscr{C}$ qui est un composé de flèches de $\mathscr{S}$ et $v_1 \in X(U')$ tel que $f^\star(u_1) = \tilde{\tau}_X(v_1)$ dans $(\varphi FX)(U')$. Appliquons maintenant la propriété (i') à l'élément $f^\star(u_2) \in (\varphi FY)(U')$, il existe un morphisme $g \colon U'' \to U'$ dans $\mathscr{C}$, composé de flèches appartenant à $\mathscr{S}$, et $v_2 \in Y(U'')$ tel que $g^\star(f^\star(u_2)) = \tilde{\tau}_Y(v_2)$. On note alors $h \colon U'' \to U$ le morphisme composé $f\circ g$, c'est un composé de flèches de $\mathscr{S}$; soit $v = (g^\star(v_1),v_2) \in X(U'')\times Y(U'') \simeq (\varphi F(X\times Y))(U'')$, on obtient aussitôt que $h^\star u = \tilde{\tau}_{X\times Y}(v)$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Définition B.15 *On dira que $\mathscr{S}$ possède un faible calcul de fractions à droite si pour tout diagramme*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

dans $\mathscr{C}$ avec $p \in \mathscr{S}$, on peut compléter ceci en un diagramme commutatif de $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, dotted, "p'"'] & Y' \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

avec $p' \in \mathscr{S}$.

La notion de calcul de fractions (d'un côté) est définie dans [22, §2.2, Chapter I], la propriété donnée ici est la condition c) de [*loc. cit.*].

Remarque B.16 *La famille de flèches $\mathscr{T}$ utilisée dans la section 2 possède un faible calcul de fractions à droite ; en effet, les morphismes de* Sm/S *appartenant à $\mathscr{T}$ sont quarrables et stables par images inverses. La famille $\mathscr{S}_{\mathrm{rel}}$ admet aussi un faible calcul de fractions à droite, cela résulte de l'existence, pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ entre schémas noethériens d'un foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathscr{H}(Y) \to \mathscr{H}(X)$ bénéficiant de propriétés raisonnables (voir [57, page 108]).*

En revenant à la construction de la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ donnée dans [22, §1, Chapter I], on voit aussitôt que si $\mathscr{S}$ possède un faible calcul de fractions à droite, alors tout morphisme $X \to Y$ dans $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$ peut se représenter sous la forme $f \circ g^{-1}$ où $f\colon X' \to Y$ et $g\colon X' \to X$ sont des flèches de $\mathscr{C}$, g étant un composé de flèches de $\mathscr{S}$ (rappelons que l'on a supposé que $\mathscr{S}$ contenait les identités et était stable par composition à gauche et à droite par des isomorphismes). Cette remarque implique aussitôt la proposition suivante :

Proposition B.17 *On suppose que $\mathscr{S}$ admet un faible calcul de fractions à droite. Alors pour tout objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$**Ens**, le couple $(X, \mathscr{S})$ satisfait la propriété (i) si et seulement s'il satisfait la propriété (i').*

Compte tenu du lemme B.14, la proposition précédente admet le corollaire suivant :

Corollaire B.18 *Si $\mathscr{S}$ admet un faible calcul de fractions à droite et que F commute aux produits finis, alors la famille des objets X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$**Ens** tels que $(X, \mathscr{S})$ satisfasse la propriété (i) est stable par produits finis.*

Théorème B.19 *Soit $\mathscr{A}$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$. On suppose que si $f\colon A' \to A$ est dans $\mathscr{S}$ et que $A \in \mathscr{A}$, alors $A' \in \mathscr{A}$ et f admet une section. On suppose aussi que pour tout objet U de $\mathscr{C}$, il existe $f\colon T \to U$ appartenant à $\mathscr{S}$ avec $T \in \mathscr{A}$. On suppose enfin que $\mathscr{S}$ possède un faible calcul de fractions à droite.*

*Alors, pour un objet X de $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$**Ens**, les conditions (i), (i') et (i") (cf. définitions B.10, B.12 et B.13) sont équivalentes pour le couple $(X, \mathscr{S})$; elles sont encore équivalentes à la condition suivante :*

(ii) Pour tout objet A de $\mathscr{A}$, la flèche

$$X(A) \to (\varphi F X)(A)$$

induite par τ_X est surjective.

Ces conditions impliquent que pour tout objet E de $\mathscr{H}$, l'application

$$\beta_{X,E} \colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(\varphi F X, \varphi E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\mathbf{Ens}}(X, \varphi E)$$

est injective.

La dernière assertion ne fait que reprendre le corollaire B.9 et le lemme B.11. Pour montrer les équivalences, commençons par observer que l'on a toujours $(i'') \Rightarrow (i') \Rightarrow (i)$. Comme on a supposé que pour tout objet U de $\mathscr{C}$, il existait un morphisme $T \to U$ dans $\mathscr{S}$ avec $T \in \mathscr{A}$, on obtient immédiatement l'implication $(ii) \Rightarrow (i'')$. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ qui reste résulte trivialement du lemme suivant :

Lemme B.20 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si U est un objet de $\mathscr{A}$ et V un objet de $\mathscr{C}$, la flèche évidente*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]}(U, V)$$

est surjective.

Comme on dispose d'un faible calcul de fractions à droite, on peut écrire tout morphisme $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]}(U, V)$ sous la forme $f \circ g^{-1}$ avec $f \colon \tilde{U} \to V$ et $g \colon \tilde{U} \to U$ deux morphismes dans $\mathscr{C}$ avec g un composé de morphismes appartenant à $\mathscr{S}$. Par hypothèse, g admet une section σ dans $\mathscr{C}$; dans la catégorie $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}]$, on a donc $g^{-1} = \sigma$ et h est en fait représenté par le morphisme composé $f \circ \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(U, V)$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

Remarque B.21 *Les hypothèses du théorème B.19 concernant la catégorie $\mathscr{A}$ sont vérifiées par l'exemple de la section 2 si $\mathscr{S} = \mathscr{T}$ et que $\mathscr{A} = \mathrm{SmAff}/S$: si U est un objet de Sm/S, l'astuce de Jouanolou (cf. théorème* II*.13) produit un morphisme $f \colon T \to U$ appartenant à $\mathscr{T}$ et $T \in \mathrm{SmAff}/S$, de plus les morphismes de $\mathscr{T}$ ayant pour but un objet de SmAff/S admettent des sections puisque les torseurs sous des fibrés vectoriels au-dessus de schémas affines sont des torseurs triviaux. Notons que dans cette situation, la catégorie localisée $\mathscr{C}[\mathscr{S}^{-1}] = \mathrm{Sm}/S[\mathscr{T}^{-1}]$ s'identifie à la catégorie obtenue en inversant les morphismes de la forme $\mathbb{A}^1_U \to U$ dans SmAff/S (cf. proposition* II*.16).*

Bibliographie

[1] Donald W. Anderson. There are no phantom cohomology operations in K-theory. *Pacific Journal of Mathematics* 107 (1983), n^{o}2, pages 279–306.

[2] Yves André, Bruno Kahn, avec un appendice de Peter O'Sullivan. Nilpotence, radicaux et structures monoïdales. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 108 (2002), pages 107–291.

[3] Michael F. Atiyah. Characters and cohomology of finite groups. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 9 (1961), pages 23–64.

[4] Michael F. Atiyah. K-Theory. Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New-York-Ansterdam, 1967.

[5] Michael F. Atiyah, David O. Tall. Group representations, λ-rings and the J-homomorphism. *Topology* 8 (1969), pages 253–297.

[6] Joseph Ayoub. Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. *Thèse de doctorat soutenue le 25 février 2006.* Université Denis Diderot (Paris 7).

[7] Luca Barbieri-Viale, Bruno Kahn. On the derived category of 1-motives. Preprint (2006). `http://www.math.jussieu.fr/~kahn/preprints/prep.html`

[8] Hyman Bass (éd.). Higher K-theories. Volume I. *Lecture Notes in mathematics* 341 (1973). Springer.

[9] Alexander Beilinson. Height pairing between algebraic cycles *in* K-theory arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), *Lectures Notes in Mathematics* 1289 (1987), pages 1–25. Springer.

[10] Spencer Bloch. Algebraic cycles and Higher K-theory. *Advances in Mathematics* 61 (1986), pages 267–304. Academic Press.

[11] Marcel Bökstedt, Amnon Neeman. Homotopy limits in triangulated categories. *Compositio Mathematica* 86 (1993), n^{o}2, pages 209–234.

[12] Aldridge K. Bousfield, Daniel M. Kan. Homotopy limits, completions and localizations. *Lectures Notes in Mathematics* 304 (1972). Springer.

[13] Kenneth S. Brown, Stephen M. Gersten. Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology *in* [8, pages 266–292].

[14] Kenneth S. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Transactions of the American Mathematical Society* 186 (1974), pages 419–458.

[15] Daniel J. Christensen. Ideals in triangulated categories : phantoms, ghosts and skeleta. *Advances in Mathematics* 136 (1998), n^{o}2, pages 284–339.

[16] Denis-Charles Cisinski. Images directes cohomologiques dans les catégories de modèles. *Annales Mathématiques Blaise Pascal* 10 (2003), n°2, pages 195–244.

[17] Pierre Deligne. Le déterminant de la cohomologie *in* Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, 1985). *Contemporary Mathematics*, AMS, Volume 67 (1987), pages 93–177,

[18] Daniel Dugger, Sharon Hollander, Daniel C. Isaksen. Hypercovers and simplicial presheaves. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 136 (2004), pages 9–51.

[19] Daniel Dugger, Daniel C. Isaksen. Topological hypercovers and $\mathbb{A}^1$-realizations. *Mathematische Zeitschrift* 246 (2004), pages 667–689.

[20] Charles Ehresmann. Sur la topologie de certains espaces homogènes. *Annals of Mathematics* 35 (1934), pages 396–443.

[21] William Fulton. Intersection theory. Deuxième édition (1998). Springer.

[22] Peter Gabriel, Michel Zisman. Calculus of fractions and homotopy theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 35 (1967).

[23] Henri Gillet. Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory. *Advances in Mathematics* 40 (1981), n°3, pages 203–289.

[24] Roger Godement. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. 1958. Hermann.

[25] Paul G. Goerss, John F. Jardine. Simplicial homotopy theory. *Progress in Mathematics* 174 (1999). Birkhaüser.

[26] Daniel R. Grayson. Higher Algebraic K-theory II *in* Michael Stein (éd.). Algebraic K-theory (Evanston, 1976). *Lecture Notes in mathematics* 551 (1976), pages 217–240. Springer.

[27] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Mathematical Journal* 9 (1957), pages 119–221.

[28] Alexandre Grothendieck. Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections *in* Séminaire Claude Chevalley. Deuxième année (1958). *Anneaux de Chow et applications*. École normale supérieure.

[29] Alexander Grothendieck. La théorie des classes de Chern. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 86 (1958), pages 137–154.

[30] Robin Hartshorne. Residues and duality. Lectures notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard, 1963–1964. *Lectures Notes in Mathematics* 20 (1966). Springer.

[31] Robin Hartshorne. Algebraic Geometry. *Graduate texts in mathematics*, 52 (1977). Springer.

[32] Sigurður Helgason. Differential geometry and symmetric spaces. Pure and applied mathematics 12 (1962). Academic Press.

[33] Peter Hilton, Guido Mislin, Joseph Roitberg. Localization of nilpotent groups and spaces. *North-Holland mathematics studies* 15, *Notas de Matemática* (55) (1974). American Elsevier.

[34] Michael J. Hopkins, Douglas C. Ravenel. Suspension spectra are harmonic. *Papers in honor of José Adem. Boletín de la Sociedas Matemática Mexicana. Segunda Serie* 37 (1992), pages 271–279.

[35] Mark Hovey. Model category structures on chain complexes of sheaves. *Transactions of the American Mathematical Society* 353 (2001), n°6, pages 2441–2457.

[36] Mark Hovey. Spectra and symmetric spectra in general model categories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 165 (2001), pages 63–127.

[37] Po Hu. S-modules in the category of schemes. *Memoirs of the American Mathematical Society* 767 (2003).

[38] Annette Huber. Realization of Voevodsky's motives. *Journal of Algebraic Geometry* 9 (2000), pages 755–799.

[39] Luc Illusie. Complexe cotangent et déformations I. *Lecture Notes in Mathematics* 239 (1971). Springer.

[40] John F. Jardine. Simplicial presheaves. *Journal of Pure and Applied Algebra* 47 (1987), pages 35–87.

[41] John F. Jardine. Motivic symmetric spectra. *Documenta Mathematica* 5 (2000), pages 445–552.

[42] John F. Jardine. Presheaves of chain complexes. *K-theory* 30 (2003), n°4, special issue in honor of Hyman Bass on his seventieth birthday Part IV, pages 365–420.

[43] Jean-Pierre Jouanolou. Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique *in* [8, pages 293–316].

[44] Jean-Pierre Jouanolou. Théorèmes de Bertini et Applications. *Progress in Mathematics* 42 (1983). Birkhaüser.

[45] Bruno Kahn. La conjecture de Milnor, d'après V. Voevodsky. *Séminaire Bourbaki*, juin 1997, exposé n°834. *Astérisque*, **245** (1997). Société Mathématique de France.

[46] Bruno Kahn. Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties *in* Wayne Raskind, Charles Weibel (éd.). Algebraic K-theory (Seattle, 1997). *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 67 (1999), pages 149–174. AMS.

[47] Kazuya Kato, Shuji Saito. Global class field theory of arithmetic schemes *in Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory (Boulder, Colo., 1983). Contemporary Mathematics*, AMS, Volume 55 (1986), pages 255–331.

[48] Charles Kratzer. λ-structure en K-théorie algébrique. *Commentarii Mathematici Helvetici* 55 (1980), n°2, pages 233–254.

[49] Florence Lecomte. Simplicial schemes and Adams operations *in Algebraic K-theory ans its applications (Trieste, 1997)* pages 437–449. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999.

[50] Marc Levine. Lambda-operations, K-theory and motivic cohomology. *Fields Institure Communications*, volume 16 (1997), pages 131–184.

[51] Marc Levine. The homotopy coniveau filtration. Preprint (2003). `http://www.math.neu.edu/~levine/publ/HomotopyConiveau.pdf`

[52] Marc Levine, Fabien Morel. Cobordisme algébrique I. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris*, Série I 332 (2001), pages 723–728.

[53] Jean-Louis Loday. K-théorie algébrique et représentations de groupes. *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure* (quatrième série) 9 (1976), n°3, pages 309–377.

[54] Georges Maltsiniotis. La K-théorie d'un dérivateur triangulé (2005). `http://www.math.jussieu.fr/~maltsin/ps/streetfest.ps`. À paraître aux *Proceedings* de la conférence pour les 60 ans de Ross Street.

[55] Georges Maltsiniotis. Structure triangulée sur les catégories des coefficients d'un dérivateur triangulé. *En préparation.*

[56] Fabien Morel. Théorie homotopique des schémas. *Astérisque* 256 (1999). *Société Mathématique de France.*

[57] Fabien Morel, Vladimir Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 90 (1999), pages 45–143.

[58] Fabien Morel. Rationalized motivic sphere spectrum and rational motivic cohomology (2004). `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~morel/NoteSHQ.ps`.

[59] Amnon Neeman. Triangulated Categories. *Annals of mathematics studies*, volume 148, Princeton University Press, 2001.

[60] Yevsey Nisnevich. The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory *in* Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (1989), pages 241-342. *Kluwer Academic Publishers.*

[61] Daniel G. Quillen. Homotopical algebra. *Lecture Notes in Mathematics* 43 (1967). Springer.

[62] Daniel G. Quillen. Higher Algebraic K-theory I *in* [8, pages 85–147].

[63] Douglas C. Ravenel. Localization with respect to certain periodic homology theories. *American Journal of Mathematics* 106 (1984), n°2, pages 351–414.

[64] David L. Rector. Modular characters and K-theory with coefficients in a finite field. *Journal of Pure and Applied Algebra* 4 (1974), pages 137–158.

[65] Joël Riou. Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris*, Série I 340 (2005), pages 431–436.

[66] Neantro Saavedra Rivano. Catégories tannakiennes. *Lecture Notes in Mathematics* 265 (1972). Springer.

[67] Jean-Pierre Serre. Groupe de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 34 (1968), pages 37–52.

[68] Jean-Pierre Serre. Algèbre locale. Multiplicités. *Troisième édition. Lecture Notes in Mathematics* 11 (1975). Springer.

[69] Jean-Pierre Serre. Cohomologie galoisienne. *Cinquième édition. Lecture Notes in Mathematics* 5 (1994). Springer.

[70] Christophe Soulé. Opérations en K-théorie algébrique. *Canadian Journal of Mathematics* 37 (1985), pages 488–550.

[71] Edwin H. Spanier. Algebraic topology. Springer. 1966.

[72] Srinivas. Comparison of the Plus and Q-Constructions *in* Algebraic K-theory. *Progress in Mathematics* 90 (1996), Chapter 7, pages 127–144. Second edition. Birkhaüser.

[73] Patrice Tauvel. Agrégation de mathématiques. Cours d'algèbre. 1999. Dunod.

[74] Robert W. Thomason, Thomas Trobaugh. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories *in* Pierre Cartier, Luc Illusie, Nicholas M. Katz, Gérard Laumon, Yuri Manin, Kenneth A. Ribet (éd.). The Grothendieck Festschrift. A collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck. Volume III. *Progress in Mathematics* 88 (1990), pages 247–435. Birkhaüser.

[75] Jean-Louis Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque* 239 (1996). Société Mathématique de France.

[76] Vladimir Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory *in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin)*, Volume I, pages 579–604. *Documenta Mathematica* (1998). Extra Volume I.

[77] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, Eric M. Friedlander. Cycles, transfers and Motivic Homology Theories. *Annals of Mathematics Studies* 143 (2000). Princeton University Press.

[78] Vladimir Voevodsky. Triangulated Categories of Motives over a Field *in* [77].

[79] Vladimir Voevodsky. Cancellation theorem. Preprint (2002). `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0541/`.

[80] Vladimir Voevodsky. Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. *International Mathematics Research Notices* 7 (2002), pages 351–355.

[81] Vladimir Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 98 (2003), pages 59–104.

[82] Friedhelm Waldhausen. Algebraic K-theory of spaces *in* Andrew Ranicki, Norman Levitt, Frank Quinn (éd.). Algebraic and geometric topology (New Brunswick, N. J., 1983). *Lecture Notes in mathematics* 1126 (1985), pages 318–419. Springer.

[83] Charles A. Weibel. Homotopy algebraic K-theory *in Algebraic K-theory and Algebraic Number Theory : Proceedings of a Seminar held January 12–16, 1987. Contemporary Mathematics*, AMS, Volume 83 (1989), pages 461–488.

[EGA] Alexander Grothendieck et Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* 4 (1960), 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[GAGA] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Annales de l'Institut Fourier* 6 (1956), pages 1–42.

[SGA 1] Alexander Grothendieck, Michèle Raynaud. Revêtements étales et groupe fondamental. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1960-1961). Lecture Notes in Mathematics* 224 (1971). Springer.

[SGA 4] Michael Artin, Alexander Grothendieck, Jean-Louis Verdier. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1963-1964). Lecture Notes in Mathematics* 269 (1972), 270 (1972), 305 (1973). Springer.

[SGA 6] Pierre Berthelot, Alexander Grothendieck, Luc Illusie. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie (1966-1967). Lecture Notes in Mathematics* 225 (1971). Springer.

Index des notations

Index terminologique

Joël Riou — <joel.riou@normalesup.org>

Résumé

Cette thèse est une contribution à la théorie homotopique des schémas. Dans la première partie, on poursuit les constructions de Fabien Morel et Vladimir Voevodsky en définissant la catégorie homotopique *stable* des sites suspendus avec intervalles. La généralité, plus grande que celle permise par la définition de John F. Jardine, permet de donner une construction rigoureuse des foncteurs « points complexes » en théorie homotopique des schémas.

Dans la seconde partie, on montre qu'au-dessus d'un schéma de base régulier S, se donner un endomorphisme dans la catégorie homotopique de S de la grassmannienne infinie (donnant un modèle de la K-théorie algébrique d'après un théorème de Morel et Voevodsky) revient à se donner une application fonctorielle $K_0(X) \to K_0(X)$ où X parcourt la catégorie des schémas lisses sur S. Ceci permet de construire une structure de λ-anneau spécial sur les groupes de K-théorie algébrique supérieure et de vérifier que cette structure coïncide avec les constructions antérieures. Les opérations additives sur la K-théorie algébrique sont étudiées en détail et des versions stables de ces énoncés sont obtenues, à coefficients entiers ou rationnels. La technique utilisée permet également de construire des classes de Chern sur la K-théorie algébrique supérieure à valeurs dans la cohomologie motivique (et dans d'autres théories cohomologiques) et de montrer très explicitement l'existence de morphismes stablement fantômes en théorie homotopique des schémas.

Mots-clefs : anneaux de représentations, catégories virtuelles, cohomologie motivique, grassmannienne, K-théorie algébrique, λ-anneaux, théorie homotopique des schémas.

Summary

This thesis contributes to the homotopy theory of schemes. In the first part, we carry onward the constructions by Fabien Morel and Vladimir Voevodsky: we define the *stable* homotopy categories of hanging sites with intervals. This construction is more general than the one of John F. Jardine: this enables us to provide a precise definition of the "complex points" functors in the homotopy theory of schemes.

In the second part, we prove that in the homotopy category of a regular scheme S, the set of endomorphisms of the infinite Grassmannian (which gives a model for algebraic K-theory by a theorem by Morel and Voevodsky) is naturally isomorphic to the set of natural transformations from the Grothendieck group functor (considered as presheaf of sets on the category of smooth schemes over S) to itself. This enables us to build a special λ-ring structure on higher K-groups and to check that this construction is the same as the ones that were constructed before. Additive operations on algebraic K-theory are studied carefully and stable versions of the theorems are provided either with integer or rational coefficients. The technique also allows us to define Chern classes on higher K-groups with values in motivic cohomology (and other cohomological theories) and to assert the existence of "superphantom" maps in the homotopy theory of schemes.

Keywords: algebraic K-theory, Grassmannian, homotopy theory of schemes, λ-rings, representation rings, motivic cohomology, virtual categories.