Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

S2SM
Mathématiques
2003/2004

Devoir 4

A remettre dans la semaine du 3 mai 2004.

Exercice 1. Soit λ un paramètre réel. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^4$ les vecteurs suivants : $u = (1, -1, 2, 2)$, $v = (1, 1, 0, 2)$ et $w_\lambda = (1, -3, 4, \lambda)$.

a. Déterminer, suivant les valeurs de λ, une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes du sous-espace F_λ engendré par les vecteurs u, v et w_λ.

b. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x + y - 2z + 2t = 0\}$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de G.

c. Montrer que $G \cap F_0$ est un plan vectoriel.

d. En déduire $G + F_0$ (on calculera dim $(G + F_0)$). Les sous-espaces G et F_0 sont-ils supplémentaires ?

e. Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle F_λ et G sont supplémentaires ?

f. Déterminer un supplémentaire de $G \cap F_0$ dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à deux. Soient a, b, c trois nombres complexes deux à deux distincts.

a. On pose $A(x) = (x-b)(x-c)$, $B(x) = (x-c)(x-a)$ et $C(x) = (x-a)(x-b)$. Montrer que la famille $\{A, B, C\}$ est une base de E.

b. Soit P un élément de E. Calculer les coordonnées de P dans la base (A, B, C). En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$