

Mathématiques

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 + 2x + 2)y'(x) - (2x + 3)y(x) = 0$$

Trouver la solution pour laquelle $y(0) = 2$ et celle pour laquelle $y'(0) = 1$.

Exercice 2 On considère les équations différentielles

$$\begin{aligned} (E) \quad & (1 - x^2)y' + (2x + 1)y = 1 \\ (H) \quad & (1 - x^2)y' + (2x + 1)y = 0 \end{aligned}$$

1. Déterminer la solution générale $y(x)$ de (H) en précisant les intervalles de validité.
2. Trouver un polynôme du second degré $P(x)$ qui soit solution de (E) .
3. En déduire la solution générale de (E) sur les intervalles de validité.
4. A-t-on des solutions de (H) et de (E) sur $] - \infty, 1[$? sur $] - 1, +\infty[$?

Exercice 3

a) Résoudre l'équation différentielle suivante, à l'aide de la méthode de variation de la constante, tout en précisant les intervalles de validité.

$$xy' + 2y - x^3 = 0$$

b) A-t-on des solutions définies sur \mathbb{R} ?

Exercice 4 On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 - 3x + 2)y' - y = x - 2$$

1. Résoudre (E) en précisant les intervalles de validité des solutions.
2. L'équation (E) a-t-elle des solutions sur $] - \infty, 2[$?
3. L'équation (E) a-t-elle des solutions sur $]1, +\infty[$?
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y'(0) = \ln 2 - 1$ ainsi que son intervalle de définition.

Exercice 5 Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2e^x$;
2. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$;
3. $y'' - 3y' + 2y = e^x(x - 1)$ et $y'' - 3y' + 2y = e^x(x - 1) + x^2 + x + 1$;
4. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ et trouver la solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 6 Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} \sin(3x)$$