Feuille n° 3

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire lesquelles des matrices $A+B$, AB, BA sont définies et calculer celles qui le sont.

Exercice 2. On considère les deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A+B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, AB et BA. En déduire que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 3. À quelle condition sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a-t-on $AB = BA$ pour toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$?

Indication : on pourra utiliser $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 2 \\ 2x & -y & +z & = & 1 \\ 4x & +y & +3z & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & +2y & -2z & +5t & = & -6 \\ 3x & & -z & +t & = & -3 \\ 2x & -y & & -3t & = & 2 \\ 2x & -y & +z & -t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & -2z & = & -1 \\ -x & +3y & +3z & = & 2 \\ & 4y & +2z & = & 3 \end{array}\right. \qquad (S_3)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & -2z & = & -1 \\ -x & +3y & +3z & = & 2 \\ & 4y & +2z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -4t & = & 1 \\ x & +3y & +7z & +2t & = & 2 \\ x & -12y & -11z & -16t & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y, z, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$(S_6)\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha x & +y & +\alpha z & = & 2\alpha \\ \alpha x & -\alpha y & +z & = & 2\alpha \\ \alpha x & -\alpha y & +\alpha z & = & 1+\alpha \end{array}\right. \qquad (S_7)\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1+\alpha)z & = & 1 \\ x & +y & -\alpha^2 z & = & \alpha^3 \end{array}\right.$$

$$(S_8)\left\{\begin{array}{rrrcl} \alpha x & +y & +z & = & 1 \\ x & +\alpha y & +z & = & 1 \\ x & +y & +\alpha z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Discuter et résoudre le système linéaire suivant, où a et b sont des paramètres réels :

$$(S_9)\left\{\begin{array}{rrrrcl} 2x & +\,y & +3z & +\,t & = & a \\ 4x & +3y & +7z & +\,t & = & b \\ x & +2y & +3z & -\,t & = & 6-a \\ 3x & -2y & +\,z & +5t & = & 2-7b \end{array}\right.$$

Exercice 7. Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.
a) Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on introduit la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Calculer $A\tilde{A}$ et $\tilde{A}A$. En déduire la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 inversible.

b) Application : calculer les inverses des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1+xy \end{pmatrix}.$$