Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Les parties de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_2 \geq 0\}$;
- $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0\}$;
- $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 = 0\}$;
- $V_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 2\}$;
- $V_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$;
- $V_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_2 x_3 = 0\}$;
- $V_7 = \{(\alpha, \alpha + \beta, -\beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que pour f, g dans E, et λ dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f + g$ et $\lambda.f$ sont définies par:

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x),$$
$$\lambda.f : x \longmapsto \lambda f(x).$$

Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels?

- $E_1 = \{f \in E,\ f(1) = 0\}$;
- $E_2 = \{f \in E,\ f(0) = 1\}$;
- l'ensemble E_3 des fonctions croissantes sur E;
- l'ensemble E_4 des fonctions dérivables sur E;
- l'ensemble E_5 des fonctions deux fois dérivables sur E telles que:

$$f'' + 3f' + 2f = 0.$$

Exercice 3. Les sous-familles suivantes d'un espace vectoriel sont-elles des familles libres? Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par chacune de ces sous-familles?

- $F_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dans l'espace E de l'exercice 2, où u_k est l'application:

$$u_k : x \longmapsto e^{kx};$$

- $F_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dans E, où v_k est l'application:

$$v_k : x \longmapsto \cos(x + k\pi/2);$$

- $F_3 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ dans $\mathbb{R}[X]$ où P_k est un polynôme à coefficients réels de degré k (une telle famille est appelée famille de polynômes **de degrés échelonnés**).

À quelle condition sur le réel m la sous-famille de $\mathbb{R}^3$:

$$F_4 = \{(1, -2, m),\ (3, 0, 2),\ (2, -1, 5)\}$$

est-elle libre? Quel est, selon la valeur de m, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par F_4?

Soit $f \in E$, dérivable. À quelle condition sur f la famille $\{f, f'\}$ est-elle libre?

Soit $f \in E$, deux fois dérivable. À quelle condition sur f la famille $\{f, f', f''\}$ est-elle libre?

Exercice 4. Montrer que les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Exprimer un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de u et v. Cette décompostion est-elle unique?

Exercice 5. Soient a, b, c, d les éléments de l'espace E de l'exercice 2 définis par:

$$\begin{array}{llll} a: & x \longmapsto 2e^x + 3e^{2x}, & b: & x \longmapsto -e^x - e^{2x} + 2e^{3x} \\ c: & x \longmapsto e^x + 2e^{2x} + 2e^{3x}, & d: & x \longmapsto e^{2x} + 4e^{3x}. \end{array}$$

Montrer que $\mathrm{Vect}\{a, b\}$ et $\mathrm{Vect}\{c, d\}$ sont confondus.

Exercice 6. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont le zéro, le polynôme nul, a pour degré $-\infty$ par convention. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$. Quel est la dimension de $\mathbb{C}_3[X]$?

Montrer que la famille:

$$B = \{1,\ X + 1,\ X^2 + 1,\ X^3 + iX^2 + X + 1\}$$

est une base de $\mathbb{C}^3[X]$. Calculer les coordonnées du polynôme X^3 dans cette base. Les sous-espaces:

$$E = \mathrm{Vect}\{X^2 - 1, X^2 + X + 1\}, \quad F = \mathrm{Vect}\{X^3, X^3 + X + 1\}$$

sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{C}_3[X]$?

Exercice 7. Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels[1]. Vérifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension? Soient $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{Z}_n$ et $\mathcal{A}_n$ les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i, j,\ a_{ij} = a_{ji}\} \\ \mathcal{Z}_n &= \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i,\ a_{ii} = 0\} \\ \mathcal{A}_n &= \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall i, j,\ a_{ij} = -a_{ji}\}\,. \end{aligned}$$

(les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont appelés matrices symétriques et ceux de $\mathcal{A}_n$ matrices antisymétriques). Vérifier que $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{Z}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner leurs dimensions. Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

[1]on pourra d'abord supposer pour simplifier $n = 2$ puis $n = 3$