Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S2SM
2003-2004

Mathématiques
Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui sont linéaires, déterminer le noyau, l'image, préciser si l'application est injective, surjective, bijective, et écrire la matrice associée dans les bases canoniques.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto xy$,
(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $x \mapsto (0, 2x)$,
(c) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
(d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,
(e) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto x + y + 1$,
(f) $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$,
(g) $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - 2y + z)$,
(h) $f_8 : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$; $P \mapsto P'$,
(i) $f_9 : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X]$; $P \mapsto XP$.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant :

(a) $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(2, -2) = (3, 2)$,
(b) $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(1, 1) = (3, 2)$,
(c) $f(1, -1) = (2, 3)$ et $f(3, -3) = (6, 9)$.

Exercice 3 Soit $F = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in F$, on note $D(f)$ l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f'(x) - 2xf(x)$. Montrer que $D(f) \in F$ et que l'application $D : F \to F$ ainsi définie est linéaire. Calculer son noyau et son image.

Exercice 4 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, 2x + z).$$

(a) Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.
(b) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y + z = 0\}$. Donner une équation cartésienne de $f(F)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z)$$

et $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Interprétation géométrique.
(c) Trouver une matrice inversible $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = A'$.

Exercice 6 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (-x+y, x+2y+z)$$

et $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,-1,1)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$.

(a) Montrer que $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) On note $\mathfrak{B}_3$ (resp. $\mathfrak{B}_2$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Écrire la matrice associée à f dans les bases :

  (i) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{B}_2$

  (ii) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$

  (iii) $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$

Exercice 7 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. En déduire que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. En déduire que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 8

(a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Démontrer que f est une projection sur un plan vectoriel dont on donnera une équation cartésienne, parallèlement à une droite vectorielle dont on donnera une base.

(b) Écrire, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1,2,-2)$.

Exercice 9 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha-1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de α, le rang de f_α, une base de $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$.

Exercice 10 Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de V tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ et déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u))$.

(b) En déduire qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 11 Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E, F deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de V. Soit $\psi \colon E \times F \to V$; $(e,f) \to e - f$. Montrer que ψ est linéaire et donner son image. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(x,x),\, x \in E \cap F\}$. Donner la dimension de $E \times F$. En déduire l'égalité $\dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E+F) + \dim_{\mathbb{K}}(E \cap F)$.