Primitives usuelles

fonction	primitive
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$ exemples : x^3 $\sqrt{x} = x^{1/2}$ $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ $\frac{1}{4}x^4$ $\frac{2}{3}x^{3/2}$ $-x^{-1} = -\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$ $\sin(x)$	$\sin(x)$ $-\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$

Remarque : $\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\mathrm{Argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ a pour dérivée $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

PRIMITIVES DES FRACTIONS RATIONNELLES

Une fraction rationnelle (réelle) est un quotient de polynômes (à coefficients réels).

Exemple : $\dfrac{x^4 - x^3 + 1}{5x^2 + 3x - \frac{1}{2}}$.

On sait déjà intégrer certaines fractions rationnelles :

- $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$,
- $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, $n \geq 2$,
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arctan}(x)$,
- $\displaystyle\int \frac{P'(x)}{P(x)} dx = \ln|P(x)|$.

1. Décomposition des polynômes

Un polynôme à coefficients réels s'écrit

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

La plus grande puissance de X avec un coefficient non nul est appelée le **degré** de P. C'est l'entier n à condition que $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant.

Exemple.
$-\frac{1}{2}X^3 - 2X + \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 3, de coefficient dominant $-\frac{1}{2}$.

Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé polynôme nul (donc $\forall X \in \mathbb{R}, P(X) = 0$).

On admet les théorèmes suivants :

Théorème (décomposition sur $\mathbb{C}$).
Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels ou complexes de coefficient dominant λ. Il existe des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ et des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que
$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{n_1}(X - \alpha_2)^{n_2} \cdots (X - \alpha_k)^{n_k}$.

Théorème (décomposition sur $\mathbb{R}$).
Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de coefficient dominant 1. Alors $P(X)$ est égal à un produit de polynômes de la forme :
- $(X - \alpha)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $(X^2 + pX + q)^m$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Exemples.
- $2X^2 + 4X^2 + 2 = 2(X + 1)^2$

- $$\begin{aligned} X^3 - 2X^2 + X - 2 &= (X - 2)(X^2 + 1) \\ &= (X - 2)(X + i)(X - i) \end{aligned}$$

2. Division euclidienne de polynômes

Exemple. division de $X^3+\frac{1}{2}X^2-X+2$ par X^2+1.

Théorème. Soit $A(X)$ et $B(X)$ deux polynômes avec $B(X)$ non nul. Il existe des polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ et le degré de $R(X)$ est <u>strictement inférieur</u> au degré de $B(X)$.
$Q(X)$ s'appelle le quotient de la division eucidienne de $A(X)$ par $B(X)$ et $R(X)$ s'appelle le reste. Les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ sont uniques.

Application à la factorisation.
$B(X)$ divise $A(X)$ si et seulement si le reste $R(X)$ est nul, dans ce cas $A(X) = B(X)Q(X)$.

Exemple. Division euclidienne de $X^3 + X^2 + X - 3$ par $X - 1$.

3. Décomposition des fractions rationnelles

Pour pouvoir calculer les primitives d'une fraction rationnelle quelconque, on la décompose en somme d'éléments simples.

Définition. On appelle élément simple une fraction rationnelle d'un des deux types suivants :

• $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ où a, α sont des réels et k est un entier strictement positif (type "racine réelle"),

• $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ où a, b, p, q sont des réels tels que $\Delta = p^2 - 4q < 0$ et k est un entier strictement positif (type "racines complexes conjuguées").

Nous admettons le théorème de décomposition suivant :

Théorème. Toute fraction rationnelle s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme (appelé partie entière de la fraction) et d'un certain nombre d'éléments simples.

Le type des éléments simples est déterminé par la factorisation du dénominateur.

Partie entière. La partie entière de $\frac{A(X)}{B(X)}$ est donnée par la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$: si $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ alors

$$\frac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)},$$

et $Q(X)$ est la partie entière de $F(X)$.

On est ramené à décomposer en éléments simples la fraction $\frac{R(X)}{B(X)}$ où le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Exemple. $F(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

$F(x) = \frac{(x+1)(x-2)+3}{x+1} = x - 2 + \frac{3}{x+1}$.
Primitives de F : $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + C$, $C \in \mathbb{R}$.

a) Dénominateur de degré 2

Théorème.
Soit $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$. On note $\Delta = p^2 - 4q$.
La fraction rationnelle $F(x)$ se décompose sous l'une des 3 formes suivantes :

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$ lorsque x^2+px+q a 2 racines réelles distinctes α et β (cas où $\Delta > 0$),

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$ lorsque x^2+px+q a une racine double α (cas où $\Delta = 0$),

• $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ est déjà un élément simple lorsque x^2+px+q n'a pas de racine réelle (cas où $\Delta < 0$).

(Dans le théorème, les lettres $a, b, p, q, \alpha, \beta, A, B$ représentent des nombres réels.)

1er Cas. Exemple : $F(x) = \frac{x+2}{(x-4)(x+1)}$.

Le dénominateur a deux racines : $\alpha = 4$ et $\beta = -1$. Par le théorème, on sait qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$.

On multiplie les deux expressions de $F(x)$ par $x-4$ et on obtient

$$\frac{x+2}{x+1} = A + \frac{B(x-4)}{x+1}.$$

On évalue en $x = 4$ et on trouve $\frac{4+2}{4+1} = A+0$ donc $A = \frac{6}{5}$.

On applique la même méthode pour le calcul de B. On multiple par $x-1$:

$$\frac{x+2}{x-4} = \frac{A(x+1)}{x-4} + B.$$

On prend $x = -1$, on trouve $\frac{-1+2}{-1-4} = 0 + B$ donc $B = \frac{-1}{5}$.

Conclusion : $F(x) = \frac{6}{5(x-4)} - \frac{1}{5(x+1)}$.

2ème cas. Exemple : $F(x) = \frac{3x+1}{(x+1)^2}$.
Le dénominateur a une racine double $\alpha = -1$.
Par le théorème, on sait qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$.

On multiplie par $(x+1)^2$: $3x+1 = A(x+1)+B$.
On évalue en $x = -1$, on trouve $-3+1 = 0+B$ donc $B = -2$. C'est la technique vue au cas 1.

On multiplie par x :

$$\frac{3x^2+x}{x^2+2x+1} = A\frac{x}{x+1} + B\frac{x}{(x+1)^2}.$$

On calcule la limite en $+\infty$: $3 = A+0$ donc $A = 3$.

Conclusion : $F(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$.

3ème cas. Le dénominateur n'a pas de racine réelle et $F(x)$ est déjà un élément simple. On va chercher les primitives de $F(x)$.

Si $F(x) = \frac{2x+p}{x^2+px+q}$, on voit que le numérateur est la dérivée du dénominateur donc

$$\int F(x)dx = \ln |x^2 + px + q|.$$

Si $F(x) = \frac{1}{x^2+px+q}$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$, on met le dénominateur sous forme canonique :

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{-\frac{\Delta}{4}>0}.$$

Puis on se ramène à la forme $\frac{1}{u^2+1}$ comme dans l'exemple suivant.

Exemple. $F(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$. $\Delta = 16 - 28 < 0$.

$x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 + 3$ donc

$$F(x) = \frac{1}{(x+2)^2+3} = \frac{1}{3\left(\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}$$

On pose $u = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$, on a $u' = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On obtient

$$F(x) = \frac{1}{3(u^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{u'}{u^2+1}$$

donc

$$\int F(x)dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right).$$

Cas général. Si $F(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ avec $\Delta < 0$, on écrit le dénominateur sous la forme $\lambda(2x+p)+\mu$. Ainsi $F(x) = \dfrac{\lambda(2x+p)}{x^2+px+q} + \dfrac{\mu}{x^2+px+q}$ et on est ramené aux deux cas précécents.

Les coefficients λ et μ peuvent se trouver en faisant une division euclidienne.

Exemple. $F(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$. $\Delta = -4 < 0$.

La dérivée du dénominateur est $2x+2$. On écrit le numérateur sous la forme $x-1 = \frac{1}{2}(2x+2)-2$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int F(x)dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 2\int \frac{dx}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| - 2\mathrm{Arctan}(x+1).\end{aligned}$$

b) Dénominateur de degré 3

Théorème. Une fraction rationnelle $F(x)$ dont le dénominateur est de degré 3 et le numérateur est de degré inférieur ou égal à 2 se décompose sous l'une des formes suivantes :

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$ lorsque le dénominateur a 3 racines réelles distinctes α, β et γ,

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{x-\beta}$ lorsque le dénominateur a une racine réelle double α et une racine réelle simple β,

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$ lorsque le dénominateur a une racine réelle triple α

• $F(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ avec $\Delta = p^2 - 4q < 0$ lorsque le dénominateur a une racine réelle α et 2 racines complexes conjuguées.

($\alpha, \beta, \gamma, A, B, C, p, q$ sont des nombres réels.)

Exemple. $F(x) = \frac{-3x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+2)}$.
Le polynôme x^2+x+2 n'a pas de racine réelle (car $\Delta < 0$). Par le théorème, on sait qu'il existe trois nombres A, B, C tels que $F(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2}$.

On multiplie par $x - 1$:

$$\frac{-3x^2 + x + 1}{x^2 + x + 2} = A + \frac{(Bx + C)(x - 1)}{x^2 + x + 2}.$$

On calcule en $x = 1$ et on trouve $\frac{-1}{4} = A$.

On multiplie par x :

$$\frac{-3x^3 + x^2 + x}{(x - 1)(x^2 + x + 2)} = A\frac{x}{x - 1} + \frac{Bx^2 + Cx}{x^2 + x + 2}.$$

On calcule la limite en $+\infty$ et on trouve
$-3 = A + B$, donc $B = \frac{-11}{4}$.

On calcule $F(x)$ pour $x = 0$ (par exemple) et on trouve $\frac{-1}{2} = -A + \frac{C}{2}$, donc $C = \frac{-3}{2}$.

Conclusion : $F(x) = \dfrac{-1}{4(x-1)} - \dfrac{\frac{11}{4}x + \frac{3}{2}}{x^2 + x + 2}$

Résumé des techniques permettant de trouver les coefficients de la décomposition.

Technique 1. Pour obtenir le coefficient au dessus de $x-\alpha$ (avec α une racine réelle simple), on multiplie par $x-\alpha$ puis on évalue en $x=\alpha$.

Si α est une racine réelle double, on multiplie par $(x-\alpha)^2$ puis on évalue en $x=\alpha$ et on obtient le coefficient au dessus de $(x-\alpha)^2$.

Technique 2. On multiplie par x puis on calcule la limite quand $x \to +\infty$.

Technique 3. On calcule $F(x)$ pour une valeur particulière de x.

On peut aussi mettre au même dénominateur puis identifier les coefficients, c'est souvent plus long.