III. Espaces vectoriels

7. Dimension

b) Sous-espaces vectoriels et dimension

Théorème.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Preuve.
On note $n = \dim E$. Si $F = \{\vec{0}\}$ alors $\dim F = 0$.

Supposons $F \neq \{\vec{0}\}$. Toute famille libre de vecteurs de F est aussi une famille libre dans E, donc elle contient au plus n vecteurs.

Soit d le nombre maximal de vecteurs formant une famille libre de F ; par ce qui précède, on a $d \leq n$. Soit $(u_1, \ldots, u_d)$ une famille libre de F. Pour tout vecteur $v \in F$, la famille $(u_1, \ldots, u_d, v)$ est liée sinon le nombre d ne serait pas maximal. Donc v est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_d$. Par conséquent $(u_1, \ldots, u_d)$ est une famille génératrice de F. C'est donc une base de F, donc $\dim F = d \leq n = \dim E$.

De plus, si $d = n$ alors $(u_1, \ldots, u_d)$ est une famille libre de E avec $d = \dim E$. Par un des résultats du paragraphe 7 a), c'est une base de E, donc $F = E$.

Proposition.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel.
• Si $p = \dim F$, il existe une base de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F.
• F admet un supplémentaire dans E.

Preuve.
Soit $n = \dim E$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E donc par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Si $n = p$ alors $F \oplus \{\vec{0}\} = E$.
Si $p < n$, on pose $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Alors $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base de G et $F \oplus G = E$.
Ceci termine la preuve.

Remarque.
Si $F \neq E$ et $F \neq \{\vec{0}\}$ alors F admet une infinité de supplémentaires différents.

Théorème.
Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

Preuve. Voir le paragraphe 6 (construction d'une base de $E \times F$).

Théorème.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels en somme directe alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Preuve. Voir le paragraphe 6 (construction d'une base de $E \oplus F$).

Remarque.
Pour montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires, il suffit de montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Théorème.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Preuve.
Soit $p = \dim F$, $q = \dim G$ et $k = \dim(F \cap G)$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $F \cap G$. On a $F \cap G \subset F$ donc on peut appliquer la proposition de la page précédente à l'espace vectoriel F et à son sous-espace vectoriel $F \cap G$: on peut compléter la base de $F \cap G$ en une base de F, qu'on note $(e_1, \ldots, e_p)$. Soit $F' = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p)$. Les sous-espaces vectoriels F' et $F \cap G$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel F (par un théorème du paragraphe 6), c'est-à-dire $F' \oplus (F \cap G) = F$. Par le théorème précédent on a donc

$$\dim F = \dim F' + \dim(F \cap G). \tag{1}$$

De même, on a $F \cap G \subset G$ donc on peut compléter la base de $F \cap G$ en une base de G, qu'on note $(e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_q)$. On a

$$\begin{aligned} F + G &= \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_p) + \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_q) \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, \ldots, e_p, f_{k+1}, \ldots, f_q) \end{aligned}$$

(on remarque que les vecteurs $e_1, \ldots, e_k$ apparaissent dans les 2 familles) et

$$F' + G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_p) + \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots f_q) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_{k+1}, \ldots, f_q)$$

donc

$$F + G = F' + G. \tag{2}$$

Montrons que F' et G sont en somme directe. Soit $u \in F' \cap G$. Alors $u \in F \cap G$ (car $F' \subset F$) et $u \in F'$. Or $(F \cap G) \cap F' = \{\vec{0}\}$ car ces sous-espaces sont en somme directe donc $u = \vec{0}$. On on déduit que $F' \cap G = \{\vec{0}\}$, donc F' et G sont en somme directe. Par le théorème précédent, on a donc

$$\dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G \tag{3}$$

Par (2) et (3) on a $F' \oplus G = F + G$ et $\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim F' + \dim G$. De plus, par (1) on a $\dim F' = \dim F - \dim(F \cap G)$, on en conclut que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$