III. Espaces vectoriels

8. Différentes façons de définir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

a) Définitions

Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ peut être défini de plusieurs façons.

• **Système d'équations cartésiennes :**
F est défini comme étant l'ensemble des vecteurs qui vérifient certaines équations.
Exemple. Soit F l'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $\begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$

• **Système d'équations paramétriques :**
Si $(v_1, \dots, v_k)$ est une base de F alors $F = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$ et le nombre de paramètres est égal à la dimension de F.
Exemple. Soit $F = \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,2)\}$. On peut écrire $F = \{(\lambda, \mu, 2\mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ car

$\lambda(1,0,0) + \mu(0,1,2) = (\lambda, \mu, 2\mu)$.

La description du sous-espace vectoriel F par un système d'équations cartésiennes permet de tester facilement si un vecteur donné appartient à F.

La description du sous-espace vectoriel F par un système d'équations paramétriques permet de trouver rapidement des vecteurs appartenant à F.

Il est important de savoir passer d'une description à une autre.

Les méthodes que nous allons exposer pour $\mathbb{K}^n$ peuvent être appliquées à un espace vectoriel E de dimension finie n en choisissant une base $(e_1, \dots, e_n)$ et en écrivant les coordonnées des vecteurs dans cette base.
Exemple. $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Les polynômes $X-3$ et $1+X^2$ ont pour coordonnées dans cette base $(-3,1,0)$ et $(1,0,1)$.

b) Méthode pour obtenir une base à partir d'un système d'équations cartésiennes

Exemple. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x+y-z & =0 \\ x+2y+2z-t & =0 \end{cases}$

Systèmes équivalents : $\begin{cases} x+y-z & =0 \\ \quad y+3z-t & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y & =z \\ \quad y & =-3z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =4z-t \\ y & =-3z+t \end{cases}$
(les inconnues principales sont x et y).

Donc $(x,y,z,t) = (4z-t, -3z+t, z, t) = (4z, -3z, z, 0) + (-t, t, 0, t) = z(4,-3,1,0) + t(-1,1,0,1)$.
Soit $v_1 = (4,-3,1,0)$ et $v_2 = (-1,1,0,1)$. Ce qui précède montre que $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. De plus (v_1, v_2) est libre car si $zv_1 + tv_2 = \vec{0}$ alors $(4z-t, -3z+t, z, t) = (0,0,0,0)$ donc en regardant les deux dernières coordonnées on a immédiatement $z = t = 0$.

Conclusion : (v_1, v_2) est une base de F.

Méthode générale.

On utilise le pivot de Gauss pour obtenir un système échelonné puis on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires. Ensuite on remplace dans $(x_1, \dots, x_n)$, qu'on écrit en séparant les inconnues secondaires les unes des autres et en les mettant en facteur. Les vecteurs obtenus donnent une base de l'espace vectoriel.

Remarque.
• Les vecteurs obtenus sont toujours linéairement indépendants, il n'est pas nécessaire de le vérifier.
• Si on a p équations cartésiennes et qu'on est dans $\mathbb{R}^n$, la dimension est en général $n-p$ (on perd une dimension par équation). S'il y a des équations redondantes, on le verra en résolvant le système.

c) Méthode pour obtenir une base à partir d'une famille génératrice finie

Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. On ne change pas le sous-espace engendré par $v_1, v_2, \ldots, v_k$
• en échangeant deux vecteurs,
• en multipliant un des vecteurs par $\lambda \neq 0$,
• en remplaçant un des vecteurs v_i par $v_i - \lambda v_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$.

Si on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ dans une matrice A, ces règles permettent d'appliquer la méthode du pivot de Gauss aux colonnes de A et d'en déduire une base de F.

Exemple 1.
$v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (-2, -2)$, $v_3 = (1, 3)$, $v_4 = (0, 3)$. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Remplaçons la colonne C_2 par $C_2 + 2C_1$ et la colonne C_3 par $C_3 - C1$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$C_2 \leftarrow \frac{1}{2} C_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 3C_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathrm{Vect}\{(1, 2), (0, 1)\}$. De plus $(1, 2)$ et $(0, 1)$ sont linéairement indépendants:
$\lambda(1, 2) + \mu(0, 1) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$

Conclusion : $(1, 2), (0, 1)$ forment une base de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exemple 2. $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (2, 0, 3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 0, 3)$ forment une base de F.

Remarque. Cette méthode donne toujours des vecteurs linéairement indépendants car le système est échelonné. Il est donc inutile de le vérifier.

On a donc $\dim F = 3$. Comme (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de 3 éléments, on en déduit que c'est une base.

Méthode générale.
Soit $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, A la matrice de cette famille de vecteurs et $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$. En appliquant la méthode du pivot de Gauss aux colonnes de A, on obtient une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & & 0 & 0 \\ * & * & * & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit r le nombre de colonnes non nulles. Les vecteurs correspondant aux colonnes non nulles de A' forment une base de F. De plus, si on n'a pas permuté les colonnes, alors $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants donc ils forment également une base de F.

On a $\dim F = r$. De plus, r est le rang des colonnes de A, autrement dit $r = \mathrm{rang}({}^tA)$.

Définition. Le rang de $(v_1, \ldots, v_p)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

Théorème. Soit A la matrice des vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$. Le rang de $(v_1, \ldots, v_p)$ est égal au rang de ${}^tA$.

d) Méthode pour obtenir un système d'équations cartésiennes à partir d'une base

Exemple. Soit $v_1 = (1,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,3,4)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Le vecteur $u = (x,y,z,t)$ appartient à F si et seulement si $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, u) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Appliquons la méthode précédente aux vecteurs v_1, v_2, u.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & 4 & t \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - xC_1 \end{array} \right. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & y-x \\ 2 & -1 & z-2x \\ 1 & 2 & t-x \end{pmatrix} \qquad C_3 + (y-x)C_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & z-y-x \\ 1 & 2 & t+2y-3x \end{pmatrix}$$

Le vecteur u appartient à $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ si et seulement si la dernière colonne est nulle, autrement dit si $z - y - x = 0$ et $t + 2y - 3x = 0$.

Conclusion : F a pour système d'équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{l} z - y - x = 0 \\ t + 2y - 3x = 0 \end{array} \right.$

Méthode générale.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F. Soit $u = (x_1, \dots, x_n)$.

On écrit la matrice des vecteurs $(v_1, \dots, v_p, u)$ et on applique l'algorithme du paragraphe c) (pivot de Gauss sur les colonnes). On obtient une matrice échelonnée.
Le vecteur u appartient à F si et seulement si tous les coefficients de la dernière colonne sont nuls. Ces différentes conditions ("$\dots = 0$") donnent le système d'équations cartésiennes de F.

Remarque. Si $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ on peut
• soit commencer par chercher une base de F puis chercher les équations cartésiennes de F.
• soit directement appliquer l'algorithme aux vecteurs $(v_1, \dots, v_p, u)$.
Exemple. $v_1 = (1,1), v_2 = (2,2)$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y-x \end{pmatrix}$

On en déduit que $(1,1)$ est une base de F et que l'équation cartésienne de F est $y - x = 0$.

e) Combinaisons linéaires et systèmes linéaires

Soit $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soit V_i la matrice colonne contenant les coordonnées de v_i. Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont $V_1, \dots, V_p$; c'est la **matrice de la famille de vecteurs**.

Exemple. $v_1 = (1,0), v_2 = (2,1), v_3 = (1,-1)$.
Alors $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (écriture des vecteurs sous forme de colonne)
et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice de la famille de vecteurs).

Soit b un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et B la matrice colonne correspondante. Soit $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$.

L'équation matricielle $AX = B$ peut s'écrire $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_p V_p = B$,
ce qui correspond à la combinaison linéaire $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = b$.

f) Autre méthode pour rechercher une sous-famille libre d'une famille génératrice finie

Propriété. $(v_1, \dots, v_p)$ est libre si et seulement si $AX = 0$ n'a qu'une seule solution (solution nulle).

Exemple.
$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. $aV_1 + bV_2 + cV_3 + dV_4 = 0$ est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} a & -2b & +c & & = & 0 \\ 2a & -2b & +3c & +3d & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllllll} a & -2b & +c & & = & 0 & \\ & 2b & +c & +dt & = & 0 & (L2 - 2L1) \end{array} \right.$$

Système échelonné d'inconnues principales a, b.

En prenant $c = 0$ et $d = 0$ (inconnues secondaires) on obtient le système triangulaire

$$\begin{cases} a & -2b & = & 0 \\ & 2b & = & 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a = b = 0$. Comme ce système est équivalent à $aV_1 + bV_2 = 0$, les vecteurs V_1 et V_2 sont linéairement indépendants.

En prenant $c = 1, d = 0$ on obtient $a = -2, b = -\frac{1}{2}$ donc $-2V_1 - \frac{1}{2}V_2 + V_3 = 0$, soit $V_3 = 2V_1 + \frac{1}{2}V_2$. Donc $V_3 \in \text{Vect}(V_1, V_2)$.

En prenant $c = 0, d = 1$ on obtient $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$ donc $V_4 = \frac{3}{2}V_1 + \frac{3}{2}V_2$. Donc $V_4 \in \text{Vect}(V_1, V_2)$.

On en déduit que la famille (V_1, V_2) engendre $\text{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$.

Conclusion : (V_1, V_2) est une base de $\text{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$.

Les vecteurs correspondant aux inconnues principales forment toujours une base du sous-espace, il n'est pas nécessaire de le vérifier.

Méthode générale.
On considère l'équation vectorielle $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = \vec{0}$, qui est équivalente au système linéaire $AX = 0$. Le pivot de Gauss donne un système échelonné avec r inconnues principales (où $r = \text{rang}(A)$) et $p - r$ inconnues secondaires.

• Les inconnues principales donnent r vecteurs qui forment une base de $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.
• Si pour chaque inconnue secondaire λ_i on prend $\lambda_i = 1$ et on donne la valeur 0 aux autres inconnues secondaires alors on trouve les relations de dépendance entre les vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$.

Théorème. Soit A la matrice des vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$. Le rang de $(v_1, \ldots, v_p)$ est égal au rang de A.

Théorème. Soit $A \in \text{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal au rang de ${}^tA$.

On a vu deux méthodes pour trouver une base.
• Avantage de la 1ère méthode : obtenir une base avec des vecteurs plus simples.
• Avantage de la 2ème méthode : trouver les relations de dépendance entre les vecteurs.

g) Autre méthode pour passer d'une base à un système d'équations cartésiennes

Exemple.
Soit $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 3)$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. On peut vérifier que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc ils forment une base de F.

Le vecteur $b = (x, y, z)$ appartient à F si et seulement s'il existe λ et μ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 = b$, ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda & +\mu & = & x \\ \lambda & +2\mu & = & y \\ & 3\mu & = & z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & +\mu & = & x \\ & \mu & = & y - x \\ & 3\mu & = & z \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & +\mu & = & x \\ & \mu & = & y - z \\ & 0 & = & z - 3y + 3x \end{cases}$$

Si $z - 3y + 3x \neq 0$, il n'y a pas de solution.
Si $z - 3y + 3x = 0$, on obtient un système triangulaire, il y a donc une unique solution.

Conclusion : $(x, y, z) \in F \iff z - 3y + 3x = 0$. Donc F a pour équation cartésienne $z - 3y + 3x = 0$.

Méthode générale.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de F.

On considère un vecteur $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et on applique la méthode du pivot de Gauss au système linéaire $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = u$. On obtient une ou plusieurs relations de compatibilité. Ces relations donnent le système d'équations cartésiennes de F.

Remarque.
• Il n'est pas nécessaire de résoudre complètement le système, on se contente d'obtenir un système triangulaire suivi de relations "0 = ..."

• Si $F = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ on commence par extraire une base de la famille génératrice $(v_1, \ldots, v_p)$.