# Examen de Mathématiques

Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 7 septembre 2004

**Exercice 1.**

1. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$ en éléments simples.
2. Donner les solutions, sur chacune des demi-droites $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle
$$x^4y' + 3x^3y = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Exercice 2.**

Dessiner les domaines du plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé ainsi définis :

$$\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{x} \leq 1\} \text{ et } \mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Calculer l'aire de $\mathcal{D}_1$ et en déduire celle de $\mathcal{D}_2$.

**Exercice 3.**

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{2+\cos(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^2+y^2 \leq 1\}$.

**Exercice 4.** On considère un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$ et une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$ de $E$.

Soit $f$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Trouver le noyau de $f$.
2. On pose $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_2} + 3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$ et $\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{e_1} + 2\boldsymbol{e_3}$. Montrer que les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ et $\boldsymbol{v_3}$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $E$. Calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
3. En déduire que l'on a $f \circ f = -f$.

**Exercice 5.** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les quatre vecteurs $\boldsymbol{v_1} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v_2} = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{v_3} = (1,0,2)$ et $\boldsymbol{v_4} = (2,1,-1)$.

On pose $F = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ et $G = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4})$.

1. Déterminer les dimensions de $F$ et $G$.
2. Déterminer une base de $F + G$, ainsi qu'une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ et $\boldsymbol{v_4}$.
3. Déterminer la dimension de $F \cap G$ et une base de ce sous-espace.

Barème indicatif : 4, 2, 4, 6, 4.