Seconde interrogation écrite de Mathématiques

Université Paris-Sud, Orsay
S2SM 2003–2004

27 mai 2004

Durée : une heure – Documents et calculatrices non autorisés

Question de cours

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F

Enoncer le théorème noyau-image. En déduire que f est bijective si et seulement si $\dim E = \dim F = \operatorname{rg} f$.

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{R}^3$ quatre vecteurs $\boldsymbol{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 3, 2)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2, 5, 3)$ et $\boldsymbol{u}_4 = (1, 2, 0)$. On pose $U = \operatorname{Vect}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\})$.

1. (a) Déterminer la dimension du sous-espace U ; en donner une base.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de U.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{F} = \big(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_4\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner un supplémentaire de U dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x, 6x - 2y + z, 7x - 3y + z)$$

   (a) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_4)$ et exprimer ces trois vecteurs dans la base $\mathcal{F}$.
   (b) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2

Peut-on trouver trois nombres réels a, b et c tels que la famille

$$\big((1, 2, 3), (1, 1, a), (2, b, 1), (3, 1, c)\big)$$

de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ soit libre ?