

## Examen partiel de mathématiques du 26 mars 2004

Durée : trois heures – Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

*Les six exercices sont indépendants.*

*Barème indicatif : 2, 4, 4, 4, 4, 2.*

**Exercice 1.** Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 x \sin 2x \, dx$ .

**Exercice 2.** Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel positif  $s$  l'équation

$$y'' + y' - 2y = 18x e^{sx}.$$

**Exercice 3.**

- Décomposer la fraction rationnelle  $\frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$  en éléments simples.
- Résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2 + 1)y' - (2x^2 + 1)y = x^3(x^2 + 1)^2.$$

**Exercice 4.** Résoudre, en discutant suivant la valeur du paramètre  $\lambda$ , le système

$$\begin{cases} x + 3y - z + 5t = 4 \\ x + 4y - 2z + 7t = -1 \\ -y + \lambda z - 3t = 4 \\ x + 3y + (\lambda - 2)z + 4t = \lambda + 1 \end{cases}$$

**Exercice 5.** Pour tout nombre réel  $x$ , on pose  $F(x) = \int_0^x \frac{du}{1 + \cos^2 u}$ .

- La fonction  $F$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?
- Lorsque  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  calculer  $F(x)$  (on pourra faire le changement de variable  $t = \tan u$ ).
- Que vaut  $F(\frac{\pi}{2})$  ?

**Exercice 6.** Sans calcul, donner la valeur de  $\int_{-1}^1 \frac{\sin(x^{2001})}{2 + \sqrt{1 + x^4}} \, dx$ . Justifier votre réponse.