Devoir n° 2

À rendre la semaine du 14 mars.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 6x - 1.$$

a) Résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$ l'équation homogène associée

$$(E_0) \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 0.$$

Que se passe-t-il pour les solutions au voisinage de 0 ? au voisinage de 2 ?

b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur chacun des intervalles ci-dessus.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de résoudre le système (S) formé des deux équations différentielles suivantes dépendant d'un paramètre ω réel

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'' + y' + 2\omega^2 y = z' + \omega^2 z \\ z'' + z' + 2\omega^2 z = y' + \omega^2 y. \end{array} \right.$$

a) On pose $u = y + z$ et $v = y - z$. Écrire les équations différentielles vérifiées par u et v.

b) En discutant sur les valeurs du paramètre ω, résoudre les équations différentielles vérifiées par u et v.

c) En déduire, en fonction de ω, l'ensemble des solutions du système d'équations différentielles (S).

Exercice 3. L'évolution de la température $T(t)$ d'un liquide se refroidissant peut être modélisée par l'équation différentielle suivante

$$T\,' = -k(T - T_{ext})$$

où T_{ext} est la température de l'air ambiant et k une constante strictement positive.

D'autre part, si on mélange un volume V_1 de liquide à la température T_1 avec un volume V_2 à la température T_2, la température T du mélange est la moyenne des températures

$$T = \frac{V_1 T_1 + V_2 T_2}{V_1 + V_2}.$$

Alice et Bernard aiment déguster leur café avec un peu de lait. Ils ont chacun une technique pour faire refroidir leur tasse de café. Alice attend cinq minutes, puis ajoute le lait. Bernard, lui, ajoute d'abord la même quantité de lait, puis attend cinq minutes. Qui d'Alice ou de Bernard boit le café le plus chaud au bout des cinq minutes ?

[*On suppose que la température du lait est T_{ext}.*]