Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

S2SM
Mathématiques
2004/2005

Feuille 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Etudier la fonction f. En particulier, montrer que f est décroissante sur l'intervalle $I = [0; 1]$. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle I. (on prendra un repère orthonormé d'unité 5 cm).

On note $\mathcal{A}$ l'aire limitée par les axes de coordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative de f. On se propose de calculer une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 0,05$ près.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$

b) Interpréter géométriquement S_n et S'_n et représenter S_{10}, S'_{10} et $\mathcal{A}$ sur le graphique de la question (a). En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer en fonction de n et de f la quantité $|S_n(f) - S'_n(f)|$. Déterminer la plus petite valeur de n pour que $|S_n(f) - S'_n(f)|$ soit strictement inférieure à $0,1$. Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 0,05$ près.

d) Pour quelle valeur minimale de n obtient-on une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à $\pm 5 \cdot 10^{-3}$ près ?

Remarque : Il n'existe pas de primitive de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ donnée par des fonctions connues.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^4+3t^2-t)dt$; (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)(t+3)dt$; (d) $\displaystyle\int_{-1}^{5} |t-3|dt$;

(e) $\displaystyle\int_1^3 (t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{3}{2}})dt$; (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1}dt$; (g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\sin t+\cos t)^2 dt$; (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}dt$;

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cos^2 2t dt$; (j) $\displaystyle\int_1^2 t \ln t dt$.

Exercice 3. Linéariser $\cos^4 x$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt$.

Exercice 4. Quelle est l'aire limitée par les droites d'équations $y = \dfrac{x}{4}$ et $y = 2x$ respectivement, et la courbe d'équation $y = \dfrac{2}{x^2}$?

Exercice 5.

a. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{8x^2 - 4x + 5}{x^4}$ en précisant son domaine de définition.

b. Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x+7}$ et préciser leurs domaines de définition.

c. Calculer la primitive de la fonction $x \mapsto \tan x$ qui est nulle en $x = \pi$. Préciser son domaine de définition.

d. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \tan x dx$.

Exercice 6. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$; (b) $x \mapsto \ln x$; (c) $x \mapsto x\ln(x+1)$; (d) $x \mapsto \sqrt{x}\ln x$;

(e) $x \mapsto \arctan x$; (f) $x \mapsto x \arctan x$; (g) $x \mapsto \ln^2 x$; (h) $x \mapsto \mathrm{e}^x \cos x$;
(i) $x \mapsto \cos^2 x \sin^3 x$; (j) $x \mapsto \cos^2 x$; (k) $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice 7. Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x \mapsto \dfrac{x-3}{2x^2+2x+1}$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$; (c) $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$;
(d) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+5}$; (e) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{6-x^2}}$; (f) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; (g) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$;
(h) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; (i) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes à l'aide
1. d'un changement de variable d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{dt}{t\ln^2 t}$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3}dt$; (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable $x = 1/t$) ;

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$ (on prend pour nouvelle variable $x = \tan(t/2)$).

2. d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable u telle que $t = \sin u$) ;

(b) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-t^2}dt$ où R est un réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 9. Sans calcul et avec justifications, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t^{2005})}{2+\sqrt{1+t^4}}dt.$