

Feuille n° 2

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant les intervalles de validité des solutions :

a) $y' = -\frac{2y}{x}$.

b) $y' = 3y$.

c) $y' + xy = 0$.

d) $y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = 0$.

e) $xy' - 2y = 0$. A-t-on des solutions définies sur \mathbb{R} , si oui lesquelles ?

Exercice 2.

a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = \frac{2y}{x} + 1$$

puis déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

b) On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - 3y = e^{2x}.$$

Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y'(0) = 1$.

Exercice 3.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante, à l'aide de la méthode de variation de la constante, tout en précisant les intervalles de validité : $xy' + 2y - x^3 = 0$

b) A-t-on des solutions définies sur \mathbb{R} ?

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 - 3x + 2)y' - y = x - 2$$

a) Résoudre (E) en précisant les intervalles de validité des solutions.

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 4 \ln 2$ ainsi que son intervalle de définition.

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 2y = 0$. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

d) $y'' + 4y = 0$.

Exercice 6.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + y' - 2y = e^{3x}$. d) $y'' + y' - 2y = 2x^2$. g) $y'' - 4y' + 5y = (x + 1)e^{-x}$.

b) $y'' + y' - 2y = 3e^x$. e) $y'' + y' - 2y = \cos x$. h) $y'' + 4y = \cos(2x)$.

c) $y'' + y' - 2y = e^{3x} + 3e^x$. f) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. i) $y'' + 4y = \cos xe^x$.

Exercice 7.

Soit $\alpha > 0$. À quelle condition sur α l'équation différentielle $y'' + \alpha^2 y = 0$ admet-elle une solution réelle f telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$?