Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Les parties de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels? (Dessins encouragés!)

- $V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 + 2x_2 = 0\}$;
- $V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 x_2 = 0\}$;
- $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_2 \geq 0\}$;
- $V_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\}$;
- $V_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2\}$;
- $V_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$;
- $V_7 = \{(\alpha, \alpha + \beta, -\beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

les parties de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ ci-dessous sont-elles des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel *complexe* $\mathbb{C}^2$?

- $V_8 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ z_1 = (i+1)z_2\}$;
- $V_9 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2;\ Re(z_1) = 0\}$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que pour f, g dans E, et λ dans $\mathbb{R}$, les fonctions $f+g$ et $\lambda.f$ sont définies par:

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x),$$
$$\lambda.f : x \longmapsto \lambda f(x).$$

Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels?

- $E_1 = \{f \in E,\ f(1) = 0\}$;
- $E_2 = \{f \in E,\ f(0) = 1\}$;
- l'ensemble E_3 des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$;
- l'ensemble E_4 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$;
- l'ensemble E_5 des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que:

$$f'' + 3f' + 2f = 0.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels. Vérifier que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels?

$E_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & -2a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

$E_2 = \{\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$;

$E_3 = \{\begin{pmatrix} a+1 & b \\ -a-1 & 0 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. a) Montrer que deux vecteurs non-nuls u, v dans $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre si et seulement si ils ne sont pas colinéaires; montrer géométriquement que dans ce cas, ils engendrent $\mathbb{R}^2$; faire un dessin.

b) Soient maintenant u, v, w trois vecteurs (non-nuls) dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'ils forment une famille libre si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites: (i) u et v ne sont pas colinéaires et (ii) w n'est pas dans le plan engendré par u et v. Faire un dessin. Montrer que si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors u, v, w engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Montrer que les vecteurs $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Exprimer un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de u et v. Cette décomposition est-elle unique?

Exercice 6. Montrer que les sous-ensembles suivants d'un espace vectoriel sont des familles libres:

- $F_1 = \{(1, 2, 3),\ (3, 0, 2),\ (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
- $F_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ dans l'espace E des fonctions réelles (exercice 2), où $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ et $y_3(x) = e^{5x}$ (on pourrait utiliser le comportement de l'exponentielle à l'infini);
- $F_3 = \{X^3, X^3 - X^2 + 1, 2X + 5, X + 2\}$ dans $\mathbb{R}[X]$;
- $F_4 = \{(1 + i, 1); (1, 1 + i)\}$ dans $\mathbb{C}^2$.

La famille $F_5 = \{(1 + i, 1); (2, 1 - i)\}$ est-elle libre dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$?

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 2, 1)$, et $V_x \subset \mathbb{R}^3$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, x)$ ($x \in \mathbb{R}$). A quelle condition sur x, V_x est-elle un supplémentaire de U dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels. Vérifier que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension? Soient $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_3 = \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall i, j,\ a_{ij} = a_{ji}\}$$
$$\mathcal{A}_3 = \{A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall i, j,\ a_{ij} = -a_{ji}\}\,.$$

(les éléments de $\mathcal{S}_3$ sont appelés matrices symétriques et ceux de $\mathcal{A}_3$ matrices antisymétriques). Vérifier que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner leurs dimensions. Montrer que $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{S}_3$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarque: Ces résultats ne sont pas particuliers à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on peut les généraliser aux matrices $n \times n$ (essayez-le, si l'exercice vous a plu).