

## Feuille 5

**Exercice 1.** Dans l’espace vectoriel  $\mathbf{R}^3$ , on considère les trois triplets  $u_1 = (1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (-1, 0, 1)$  et  $u_3 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  engendrent  $\mathbf{R}^3$ . Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ . Calculer les coordonnées des vecteurs  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 0, 1)$  et  $v_3 = (2, -3, 1)$  dans cette base.

**Exercice 2.** Déterminer pour quelles valeurs du réel  $t$ , les vecteurs  $u_1 = (1, 0, t)$ ,  $u_2 = (1, 1, t)$  et  $u_3 = (t, 0, 1)$  forment une base de  $\mathbf{R}^3$ .

**Exercice 3.** a) Montrer que les vecteurs  $w_1 = (1, -1, i)$ ,  $w_2 = (-1, i, 1)$ ,  $w_3 = (i, 1, -1)$  forment une base de l’espace vectoriel  $\mathbf{C}^3$  sur  $\mathbf{C}$ .

b) Déterminer les coordonnées de  $v = (1 + i, 1 - i, i)$  dans cette base.

**Exercice 4.** Trouver une base du sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbf{R}^4$  dans chacun des cas suivants.

a.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y = 0\}$  ;

b.  $F$  admet comme système d’équations 
$$\begin{cases} x + 2y & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{cases} .$$

c.  $F$  est l’ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y - z - t & = & 0 \\ x - y + z - t & = & 0 \\ 4x - y + 2z - 4t & = & 0 \end{cases} .$$

Dans chacun des cas, préciser un système d’équations paramétriques.

**Exercice 5.** Déterminer un système d’équations du sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  dans les cas suivants :

(a)  $E = \mathbf{R}^3$  et  $F$  est engendré par  $(1, 0, 0)$  et  $(0, 1, 1)$  ;

(b)  $E = \mathbf{R}^3$  et  $F = \text{Vect}((1, 2, -1))$ .

(c)  $E = \mathbf{R}^2$  et  $F = \text{Vect}((1, 2))$ .

(d)  $E = \mathbf{R}^4$  et  $F = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (2, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 2))$ .

(e)  $E = \mathbf{R}^4$  et  $F = \text{Vect}((1, -2, -1, 0), (2, -2, -1, 1), (-1, 0, -1, -2))$ .

(f)  $E = \mathbf{R}^4$  et  $F$  est l’intersection des sous-espaces définis en (d) et (e).

(g)  $E = \mathbf{R}^3$  et  $F$  est la somme des sous-espaces définis en (a) et (b).

**Exercice 6.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  un élément de l’espace vectoriel  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  des matrices

$3 \times 3$  à coefficients réels. Montrer que l’ensemble des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  telles que  $AM = MA$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ . Donner une base et la dimension de ce sous-espace.

**Exercice 7.** Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel

$$E = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 \mid x + 2y - 5z + 3t - u = 0, 2x + y - 2u = 0\}.$$

**Exercice 8.** a. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$  et  $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 0\}$  sont supplémentaires dans  $\mathbf{R}^2$ .

b. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = x + z = 0\}$  sont supplémentaires dans  $\mathbf{R}^3$ .

c. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F = \text{Vect}(1 - X + X^2, 1 + 2X - X^3)$  et  $G = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbf{R}_3[X] \mid a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = 0, a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\}$  sont supplémentaires dans l'espace vectoriel  $\mathbf{R}_3[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 3.

**Exercice 9.** On considère la famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs de  $\mathbf{R}^4$  suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (1, 2, 0, 1), v_2 = (4, 4, 1, 2), v_3 = (2, 0, 1, 0), v_4 = (2, 2, \frac{1}{2}, 1)\}.$$

- La famille  $\mathcal{F}$  est-elle libre ? Calculer son rang. Déterminer les relations de dépendance entre les vecteurs de  $\mathcal{F}$ .
- Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathbf{R}^4$  engendré par  $\mathcal{F}$ . Quelle est la dimension de  $F$  ? Extraire de  $\mathcal{F}$  une famille libre  $\mathcal{F}'$  engendrant  $F$ .
- On note  $\mathcal{G}$  la famille génératrice de  $\mathbf{R}^4$  formée des vecteurs  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ . Compléter  $\mathcal{F}'$  en une base de  $\mathbf{R}^4$  à l'aide de vecteurs de  $\mathcal{G}$ .
- Déterminer un supplémentaire de  $F$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels. Soient  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  cinq matrices de  $E$ .

- Montrer que la famille  $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$  engendre  $E$ .
- La famille  $\{A_1, A_2, A_4\}$  est-elle liée ? Si oui, préciser les relations de dépendance entre  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_4$ .
- Extraire de  $\mathcal{F}$  une base de  $E$ .
- Déterminer un supplémentaire de  $\text{Vect}(A_1, A_2)$ .

**Exercice 11.** a. Soit  $G$  le sous-espace de  $\mathbf{R}^4$  engendré par les vecteurs  $u = (1, -1, 2, -2)$ ,  $v = (4, 0, 1, -5)$  et  $w = (3, 1, -1, -3)$ . Déterminer une base, la dimension et un système d'équations de  $G$ .

b. Dans  $\mathbf{R}^4$ , on considère le sous-espace  $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = y = x - y + z + 2t = 0\}$ . Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de  $H$ .

- Déterminer une base de  $G \cap H$ , la dimension et une base de  $G + H$ .
- Déterminer un supplémentaire  $F$  de  $G + H$  dans  $\mathbf{R}^4$ .