Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S2SM
2004-2005

Mathématiques
Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui le sont, en déterminer le noyau, l'image, préciser si l'application est injective, surjective, bijective, et écrire la matrice associée dans les bases canoniques.

(a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto xy$,
(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto (0,2x)$,
(c) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,
(d) $f_4\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,
(e) $f_5\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto x+y+1$,
(f) $f_6\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$,
(g) $f_7\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x-2y+z)$,
(h) $f_8\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X];\ P \mapsto P'$,
(i) $f_9\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X];\ P \mapsto XP$.

Exercice 2 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y, 2x+z).$$

(a) Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.
(b) Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y+z=0\}$. Déterminer un système d'équations de $f(F)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z)$$

et $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathfrak{B}' = \{u_1,u_2,u_3\}$.
(c) Trouver une matrice inversible $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = A'$.

Exercice 4 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (-x+y, x+2y+z)$$

et $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,-1,1)$, $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$.

(a) Montrer que $\mathfrak{U} = \{u_1,u_2,u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $\mathfrak{V} = \{v_1,v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) On note $\mathfrak{B}_3$ (resp. $\mathfrak{B}_2$) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Écrire la matrice associée à f dans les bases :
  (i) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{B}_2$
  (ii) $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$
  (iii) $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$

Exercice 5 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. En déduire que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. En déduire que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 6 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de α, le rang de f_α, une base de $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$.