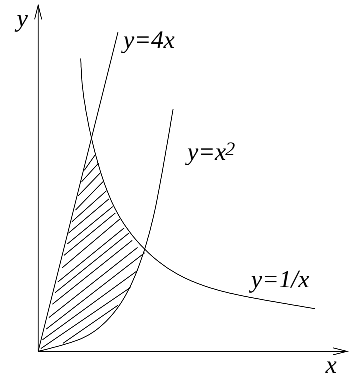
Partiel

Le 31 mars 2005

Durée 3 heures – documents et calculatrices interdits

Barème approximatif : 2 - 2 - 1,5 - 4 - 2,5 - 4,5 - 3,5

1. Calculer l'aire suivante :



2. Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{t(1+\sqrt{t})}$ *(on pourra poser $u=\sqrt{t}$).*

3. Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ puis calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Soit $f(x) = \frac{x^4-4x}{(x-2)(x^2+2)}$.
a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
b) Calculer une primitive de f sur $]-\infty, 2[$ puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

5. Soit (E) $\quad (x^2-1)y' - 2xy = (x+1)^2$.
a) Résoudre (E) en précisant les intervalles de validité.
b) Trouver la solution de (E) définie sur $]-1,1[$ telle que $y(0)=2$.

6. On considère l'équation différentielle (E) $\quad y'' + 4y = \cos(4x)\cos(2x)$.
a) Montrer que $\cos(4x)\cos(2x) = \frac{1}{2}(\cos(6x)+\cos(2x))$.
b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E1)$ $\quad y''+4y = \frac{1}{2}\cos(6x)$.
Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E2)$ $\quad y''+4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$.
c) En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
d) Trouver la solution de (E) déterminée par $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

7. On considère l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti :
(E) $\quad y'' = -y - \lambda y'$ avec $\lambda > 0$.
a) Écrire l'équation caractéristique de (E).
b) Dans cette question, on se place dans le cas $\lambda > 2$. Écrire l'ensemble des solutions de (E). Montrer que les 2 racines de l'équation caractéristique sont strictement négatives. Si y est une solution de (E), quelle est la limite de $y(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
c) Écrire l'ensemble des solutions de E pour $0 < \lambda < 2$.
d) Écrire l'ensemble des solutions de E pour $\lambda = 2$.