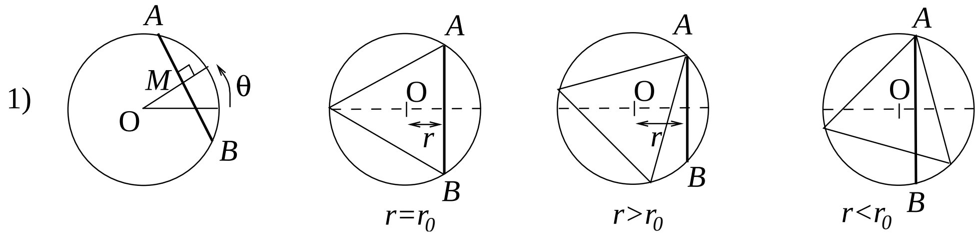
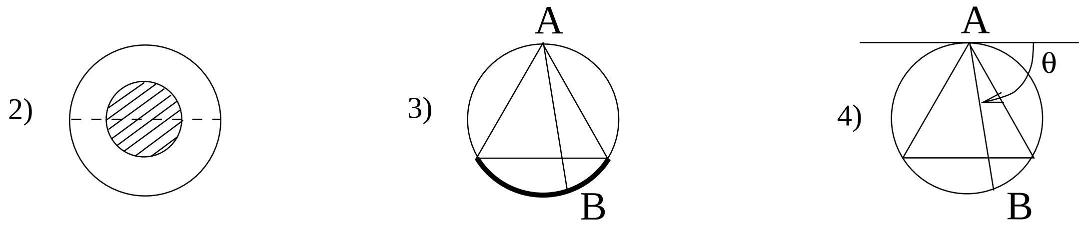
Corrigé des exercices

Exercice 1
Voici plusieurs façons de définir une corde, qui mènent à choisir un point au hasard dans un espace différent. Même avec la probabilité "naturelle" (probabilité uniforme), on obtient des résultats différents.

1) La corde $[AB]$ est déterminée par sa distance au centre O, qui est $r = OM$, où M est le milieu de $[AB]$, et par l'angle θ entre l'horizontale et la droite (OM) (voir la figure de gauche dans (1) ci-dessous). Le problème étant symétrique par rotation, l'angle θ n'intervient pas. On est donc ramené à choisir une distance r au hasard dans $[0, R]$, où R est le rayon du cercle. La corde est à l'extérieur si $r \geq r_0$ avec $r_0 = \frac{1}{2}R$ (voir les figures (1) ci-dessous). Donc la probabilité cherchée est 1/2 (on a pris la probabilité uniforme sur $[0, R]$).



2) La corde $[AB]$ est déterminée par son centre M : il suffit de tracer la perpendiculaire à (OM) passant par M (figure de gauche ci-dessus, comme pour 1). On est donc ramené à choisir un point M au hasard dans le disque de rayon R. La corde passe à l'intérieur du triangle si $|OM| \leq \frac{1}{2}R$ (comme au 1), autrement dit si le point M se trouve dans le disque de rayon $R/2$, hachuré sur la figure (2) ci-dessous. L'aire du domaine est $\pi(R/2)^2$ et l'aire totale est πR^2, donc la probabilité cherchée est 1/4 (on a pris la probabilité uniforme sur le disque de rayon R).



3) Une corde est déterminée par 2 points A et B sur le cercle (ses extrémités). Le problème étant symétrique par rotation, on peut fixer le point A et considérer la position du point B. On est donc ramené à choisir un point B au hasard sur le cercle. La corde passe à l'intérieur du triangle pour B appartenant à un arc de cercle faisant 1/3 du cercle (voir la figure (3) ci-dessus). Donc la probabilité cherchée est 1/3 (on a pris la probabilité uniforme sur le cercle, c'est-à-dire la longueur d'un arc divisé par la longueur du cercle entier).

4) On peut déterminer la corde par son extrémité A et l'angle θ que fait la corde avec la tangente au cercle en A (voir la figure (4) ci-dessus). On est donc ramené à choisir un angle θ au hasard dans $[0, \pi]$. On voit que la corde passe dans le triangle si $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$. Ce qui donne une probabilité de 1/3 (on a pris la probabilité uniforme sur $[0, \pi]$).

Exercice 2
Soit $g(t) = E((X - t)^2) = E(X^2) - 2tE(X) + t^2$. C'est une parabole dont le minimum est en $t = E(X)$ (on peut aussi dériver g et trouver le minimum de cette manière).

Exercice 3
a) $P(Z \leq t) = 0$ si $t < 0$ et $P(Z \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$ si $t \geq 0$.
Donc, pour $t \geq 0$, $F_Z(t) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$.
$F_X(t)$ est dérivable de dérivée $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$, donc F_Z est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $F'_Z(t)$ est la densité de Z.

$F_Z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(F_X'(\sqrt{t}) + F_X'(-\sqrt{t}))$. Donc la densité de Z est $f_Z(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-t/2}$.

b) $F_{Y^3}(t) = P(Y^3 \leq t) = P(Y \leq \sqrt[3]{t}) = F_Y(\sqrt[3]{t})$. On a $F_Y(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $F_Y(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda t}$ si $t > 0$. Donc $F_{Y^3}(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $F_{Y^3}(t) = 1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}}$ si $t > 0$. La fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux donc on peut dériver pour trouver la densité de X^3, qui est $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\frac{\lambda}{3}t^{-2/3}e^{-\lambda\sqrt[3]{t}}$.

Exercice 4

$1 - F(t) = P(X > t) = P_X(]t, +\infty[) = \displaystyle\int_{]t,+\infty[} 1\,dP_X(x)$. Donc

$$\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_{]t,+\infty[} 1\,dP_X(x)\right)dt.$$

On applique Fubini-Tonelli, le domaine d'intégration étant $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t < x\}$:

$$\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt = \int_{]0,+\infty[}\left(\int_{[0,x[} 1\,dt\right)dP_X(x) = \int_{]0,+\infty[} x dP_X(x).$$

Par ailleurs, comme X est positive,

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\,dP_X(x), \quad \text{donc} \quad E(X) = 0 \times P_X(\{0\}) + \int_{]0,+\infty[} x\,dP_X(x).$$

On en déduit que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt$.

Remarque : si la loi de X est continue, on n'a pas à se préoccuper si les intervalles sont ouverts ou fermés puisque $P(X > a) = P(X \geq a)$.

Exercice 5

$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ et cette union est disjointe, donc $P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B)$. Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc $P(A \cap B^c) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$, autrement dit $A\perp B^c$. On applique le résultat à $A' = B, B' = A$ et on trouve $A^c\perp B$. On réapplique le résultat à A^c et B pour trouver $A^c\perp B^c$.

Exercice 6

a) $P(A \mid B) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ donc $P(X > t + s \mid X > t) = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}$. Or $P(X > y) = \displaystyle\int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda y}$ si $y \geq 0$. Donc $P(X > t + s \mid X > t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$.

b) Soit $H(t) = 1 - F_X(t) = P(X > t)$. Par hypothèse, on a $H(t + s) = H(t)H(s)$. Comme la densité de X est continue sur $\mathbb{R}_+$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc H aussi. Si on dérive par rapport à s, on trouve : $H'(t+s) = H(t)H'(s)$. Si $s = 0$, on a $H'(t) = H(t)H'(0)$. Posons $\lambda = -H'(0)$. La fonction H est solution sur $[0, +\infty[$ de l'équation $y' + \lambda y = 0$, donc il existe K tel que $H(t) = Ke^{-\lambda t}$, et $F_X(t) = 1 - Ke^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$. Le cas $K = 0$ est exclu, sinon $P_X = \delta_0$, ce qui est impossible car X est une v.a. à densité. On a

$$\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1 \quad \text{et} \quad F_X(0) = 0 \quad \text{car} \quad X \text{ est une v.a. positive,}$$

donc nécessairement $\lambda > 0$ et $K = 1$. En dérivant $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, on trouve que la densité de X sur $\mathbb{R}_+$ est $\lambda e^{-\lambda t}$, c'est-à-dire que X est de loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 7

La méthode la plus simple consiste à introduire la population totale N et à compter les daltoniens. Soit $d_H = 5\%$, $d_F = 0,25\%$ (taux de daltoniens chez les hommes et les femmes), $p_H = 48\%$, $p_F = 52\%$ (proportions d'hommes et de femmes dans la population). Le nombre d'hommes est Np_H, le nombre d'hommes daltoniens est Np_Hd_H. De même, le nombre de femmes daltoniennes est Np_Fd_F. La proportion de daltoniens hommes parmi les daltoniens est donc

$$\frac{\text{nombre de daltoniens hommes}}{\text{nombre de daltoniens}} = \frac{Np_Hd_H}{Np_Hd_H + Np_Fd_F} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F} \approx 0,95.$$

La probabilité pour qu'un daltonien soit un homme est d'environ 95%.

Une formulation plus élaborée (mais strictement équivalente) consiste à utiliser la formule de Bayes. Soit H l'événement "être un homme" et D l'événement "être daltonien". On veut calculer $P(H|D)$. Selon la formule de Bayes, $P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}$. En utilisant que $P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)$ (formule des probabilités totales), on obtient

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F)} = \frac{p_Hd_H}{p_Hd_H + p_Fd_F}.$$

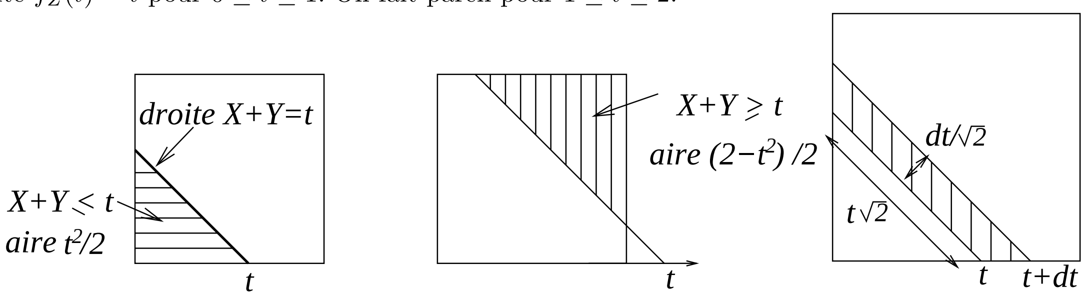
Exercice 8
Soit U_1 l'événement "on tire la boule dans la première urne" et U_2 l'événement "on tire la boule dans la seconde urne". Le choix de l'urne étant équiprobable, on a : $P(U_1) = P(U_2) = 0,5$. Soit B l'événement "on tire une boule blanche". L'énoncé donne les probabilités conditionnelles suivantes :
$P(B|U_1) = 30/40 = 0,75$ et $P(B|U_2) = 20/40 = 0,5$.
On cherche la probabilité $P(U_1|B)$. La formule de Bayes, appliquée à la partition (H_1, H_2), nous donne :

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)P(U_1)}{P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2)} = \frac{0,75 \times 0,5}{0,75 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5} = 0,6 \text{ (probabilité a posteriori).}$$

Interprétation : avant de regarder la couleur de la boule, la probabilité d'avoir choisi la première urne est une probabilité a priori $P(U_1)$ soit 50 %. Après avoir regardé la boule, on révise notre jugement et on considère $P(U_1|B)$, soit 60 %.

Exercice 9
On donne 2 méthodes graphiques et un calcul direct.
On peut prendre comme modèle $\Omega = [0,1]^2$, P la mesure de Lebesgue sur le carré, $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$. On peut alors représenter $Z = t$ par la droite d'équation $x + y = t$ dans le carré (figure de gauche). Si $0 \le t \le 1$ alors $F_Z(t) = P(X + Y \le t) = \frac{t^2}{2}$ (figure de gauche). Si $1 \le t \le 2$, alors $F_Z(t) = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$ (figure du milieu). Si $t < 0$ alors $F_Z(t) = 0$ et si $t > 2$ alors $F_Z(t) = 1$.
F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 par morceaux, on peut donc dériver pour obtenir f_Z la densité de Z : $f_Z(t) = t$ si $0 \le t \le 1$, $f_Z(t) = 2 - t$ si $1 \le t \le 2$, $f_Z(t) = 0$ sinon.

On peut également calculer la densité directement, "à la physicienne", en considérant dt comme un tout petit accroissement (on l'a dessiné assez gros pour rendre le dessin lisible). Sur la figure de droite, on a dessiné $X + Y \in [t, t+dt]$ pour $0 \le t \le 1$. L'aire de la partie hachurée est à peu près $t\sqrt{2} \times \frac{dt}{\sqrt{2}}$ (longueur $\times$ largeur), donc on a $P(t \le X + Y \le t + dt) = tdt$. Or $P(t \le Z \le t + dt) = f_Z(t)dt$, ce qui donne la densité $f_Z(t) = t$ pour $0 \le t \le 1$. On fait pareil pour $1 \le t \le 2$.



Calcul direct : La densité de X et Y est $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$. Par indépendance, $Z = X + Y$ a une densité $f_Z(t) = f * f(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t-x)f(x)dx$ (résultat du cours, qu'on peut redémontrer par changement de variable à partir de la définition de $P_X * P_Y$).

$f(t-x)f(x) = 1$ si $0 \leq t-x \leq 1$ et $0 \leq x \leq 1$, $f(t-x)f(x) = 0$ sinon.
Soit $D_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t-x \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid t-1 \leq x \leq t \text{ et } 0 \leq x \leq 1\}$. $D_t = [\max(0,t-1), \min(t,1)]$. On a $f_Z(t) = \displaystyle\int_{D_t} 1\,dx$, alors :
– si $0 \leq t \leq 1$, $D_t = [0,t]$ et $f_Z(t) = t$,
– si $1 \leq t \leq 1$, $D_t = [t-1,1]$ et $f_Z(t) = 2-t$,
– si $t < 0$ ou $t > 2$, $D_t = \emptyset$ et $f_Z(t) = 0$.

Exercice 10
$P(Z > t) = P(X_1 > t, X_2 > T, \ldots, X_n > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)\cdots P(X_n > t)$ par indépendance. Comme $P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$, on a $1 - F_Z(t) = \displaystyle\prod_{1 \leq i \leq n} (1 - F_{X_i}(t))$.
Comme $F_{X_i}(t) = 1 - e^{-t}$ si $t \geq 0$ et $F_{X_i}(t) = 0$ sinon, on trouve que $F_Z(t) = 1 - e^{-nt}$ si $t \geq 0$ et $F_Z(t) = 0$ sinon. La densité de Z est donc $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} ne^{-nt}$. Par conséquent, Z est de loi exponentielle de paramètre n.

Exercice 11
Soit f la densité de X et g la densité de Y. X est indépendante de Y donc X est indépendante de $-Y$.

$$P(-Y \in [a,b]) = P(Y \in [-b,-a]) = \int_{-b}^{-a} g(t)\,dt = \int_a^b g(-u)\,du \text{ (changement de variable } u = -t)$$

donc la densité de $-Y$ est $h(t) = g(-t)$. Par indépendance, $X + (-Y)$ a une loi continue de densité $f * h$, donc $P(X = Y) = P(X - Y = 0) = \int_0^0 f * h(x)\,dx = 0$.

Exercice 12
a) $\{\omega \mid T_1(\omega) = +\infty\} = \{\omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1\} \subset \{\omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ pour } 1 \leq n \leq N\}$.
Donc $P(T_1 = +\infty) \leq P(X_n = 0 \text{ pour } 1 \leq n \leq N) = \displaystyle\prod_{n=1}^{N} P(X_n = 0)$ par indépendance
d'où $P(T_1 = +\infty) \leq (1-p)^N$. Or $1 - p \in]0,1[$ et N est arbitrairement grand, donc $P(T_1 = +\infty) = 0$, autrement dit T_1 est fini presque sûrement.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\{T_1 = k\} = \{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1\}$ donc par indépendance $P(T_1 = k) = p(1-p)^{k-1}$.
$E(T_1) = \displaystyle\sum_{k \geq 1} kP(T_1 = k) = p \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$. On reconnaît une série dérivée. Si on introduit la série $f(x) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} x^k$ (bien définie si $|x| < 1$), alors $E(T_1) = pf'(1-p)$. Or $f(x) = \frac{1}{1-x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
D'où $E(T_1) = pf'(1-p) = \frac{1}{p}$.

c) Montrons par récurrence que T_n est finie p.s. (hypothèse vérifiée par T_1 par a) et que les v.a. $T_1, (T_2 - T_1), \ldots (T_n - T_{n-1}), \ldots$ ont la même loi que T_1 (hypothèse évidemment vérifiée par T_1).
Supposons que T_{n-1} est finie p.s. et montrons que $T_n - T_{n-1}$ a la même loi que T_1 et que T_n est finie p.s. Si $T_{n-1} = j$ alors $\{T_n = j + k\} = \{X_{j+1} = 0, \ldots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1\}$. Comme T_{n-1} est finie p.s., la formule des probabilités conditionnelles s'applique et donne :

$$\begin{aligned}
P(T_n - T_{n-1} = k) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k \mid T_{n-1} = j)P(T_{n-1} = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} P(X_{j+1} = 0, \ldots, X_{j+k-1} = 0, X_{j+k} = 1)P(T_{n-1} = j) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} p(1-p)^{k-1} P(T_{n-1} = j) \quad \text{par indépendance} \\
&= p(1-p)^{k-1} \sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_{n-1} = j)
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{N}} P(T_{n-1} = j) = P(T_{n-1} < +\infty) = 1$ (hypothèse de récurrence pour $n-1$),
donc $P(T_n - T_{n-1} = k) = (1-p)^{k-1}p$. On vérifie que $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} P(T_n - T_{n-1} = k) = 1$, donc $T_n - T_{n-1} < +\infty$

p.s., et par conséquent $T_n < +\infty$ p.s. (on peut aussi calculer directement $P(T_n - T_{n-1} = +\infty) = 0$, comme pour T_1). On vient de montrer que $T_n - T_{n-1}$ a la même loi que T_1. Ceci termine la récurrence.

Pour montrer l'indépendance, on regarde $\{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n\}$, ce qui décrit exactement les valeurs de X_i pour $0 \le i \le k_1 + k_2 + \dots + k_n$. C'est un peu lourd à écrire :

$$\{T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n\} = \left\{ \begin{array}{l} X_0 = \dots = X_{k_1 - 1} = 0, X_{k_1} = 1, \\ X_{k_1+1} = \dots = X_{k_1+k_2-1} = 0, X_{k_1+k_2} = 1, \\ \dots \\ X_{k_1+\dots+k_{n-1}+1} = \dots = X_{k_1+\dots+k_n - 1} = 0, X_{k_1+\dots+k_n} = 1 \end{array} \right\}$$

D'où par indépendance des X_i :

$$\begin{aligned} P(T_1 = k_1, T_2 - T_1 = k_2, \dots, T_n - T_{n-1} = k_n) &= p^n (1-p)^{(k_1-1)+\dots+(k_n-1)} \\ &= P(T_1 = k_1) P(T_2 - T_1 = k_2) \cdots P(T_n - T_{n-1} = k_n) \end{aligned}$$

Conclusion : les v.a. $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes.

d) Ce qui précède permet de voir que, pour avoir $T_n = k$, d'une part il faut que $X_k = 1$, et d'autre part parmi les $(X_i)_{1 \le i \le k-1}$ il faut que $n-1$ soient égaux à 1 et les autres soient égaux à 0. Il y a C_{k-1}^{n-1} façons de choisir les 1 (à condition bien sûr que $k \le n$), et chaque combinaison a la même probabilité, qui est $p^n(1-p)^{k-n}$. On peut en déduire que la loi de T_n est $P(T_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ si $k \ge n$ et $P(T_n = k) = 0$ si $k < n$.

Exercice 13

a) $G_X(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k (1-p)^{n-k}$ donc $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$.

b) $G_Y(z) = (pz + 1 - p)^m$ par a). Par indépendance, $G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z) = (pz + 1 - p)^{n+m}$. C'est la fonction génératrice de la loi binomiale $\mathcal{B}(n+m, p)$. Or la loi de $X + Y$ est $\mathcal{B}(n,p) * \mathcal{B}(m,p)$, donc $\mathcal{B}(n,p) * \mathcal{B}(m,p) = \mathcal{B}(n+m,p)$.

Exercice 14

La densité de X étant $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$, on doit calculer $\varphi_X(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx$. On a

$$\int_0^M e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{1}{it - \lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^M = \frac{\lambda}{it - \lambda} \left(e^{(it-\lambda)M} - 1 \right)$$

(remarquer que $it - \lambda \neq 0$ car $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$).

On a $|e^{(it-\lambda)M}| = |e^{it}| e^{-\lambda M} = e^{-\lambda M} \to 0$ quand $M \to +\infty$ donc l'intégrale est bien convergente et $\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$.

Exercice 15

a) $\varphi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it})$, donc $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.

b) $\varphi_Y(t) = \exp(\lambda'(e^{it} - 1))$ par a). Par indépendance, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) = \exp((\lambda + \lambda')(e^{it} - 1))$. C'est la fonction caractéristique de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \lambda')$. Donc $\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

Exercice 16

a) On pose $A_n(\alpha) = \{X_n > \alpha \ln n\}$ et $A(\alpha) = \limsup A_n(\alpha)$. Les $(A_n(\alpha))_{n \ge 1}$ sont des événements indépendants. Si $\alpha \ge 0$ alors $\alpha \ln n \ge 0$ et $P(A_n(\alpha)) = \displaystyle\int_{\alpha \ln n}^{+\infty} e^{-x}\, dx = e^{-\alpha \ln n} = \frac{1}{n^\alpha}$, donc $\sum P(A_n(\alpha)) = \sum \dfrac{1}{n^\alpha}$. C'est une série de Riemann. Si $\alpha > 1$ la série converge et le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A(\alpha)) = 0$. Si $0 \le \alpha \le 1$ la série diverge et le lemme de Borel-Cantelli implique que $P(A(\alpha)) = 1$. Si $\alpha < 0$ alors $P(A_n(\alpha)) = 1$ pour tout n parce que X_n est positive p.s., donc on a $P(A(\alpha)) = 1$. Ce qui répond à la question a).

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(A(1-\varepsilon)) = 1$. Or $A(1-\varepsilon) = \left\{\frac{X_n}{\ln n} > 1-\varepsilon \text{ pour une infinité de } n\right\}$, donc si ω appartient à $A(1-\varepsilon)$ alors $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n(\omega)}{n} \geq 1-\varepsilon$. Soit N_k le complémentaire de $A(1-1/k)$ et $N = \bigcup_{k\geq 1} N_k$. On a $P(N_k) = 0$ donc $P(N) \leq \sum_{k\geq 1} P(N_k) = 0$ (somme dénombrable d'ensembles de mesures nulles). Si $\omega \notin N$ alors $\forall k \geq 1$, $\omega \notin N_k$ donc $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n(\omega)}{n} \geq 1 - 1/k$, et comme $1/k$ tend vers 0 alors $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n(\omega)}{n} \geq 1 \ \forall \omega \notin N$.

$\forall \varepsilon > 0$, on a $P(A(1+\varepsilon)) = 0$ donc $P((A(1+\varepsilon))^c) = 1$. Or

$$(A(1+\varepsilon))^c = \liminf (A_n(1+\varepsilon))^c = \left\{\frac{X_n}{n} \leq \alpha \text{ à partir d'un certain rang}\right\},$$

donc si $\omega \in (A(1+\varepsilon))^c$ alors $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n}{\ln n} \leq 1+\varepsilon$. Soit $N' = \bigcup_{k\geq 1} A(1+1/k)$. On a $P(A(1+1/k)) = 0$ pour tout $k \geq 1$ donc $P(N') = 0$. Si $\omega \notin N'$ alors pour tout $k \geq 1$, $\omega \in (A(1+1/k))^c$ donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} \leq 1 + 1/k,$$

et comme $1/k$ tend vers 0 alors $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n(\omega)}{n} \geq 1$.

Conclusion : $\forall \omega \notin N \cup N'$ alors $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n(\omega)}{\ln n} = 1$. Autrement dit $\limsup_{n\to+\infty} \dfrac{X_n}{\ln n} = 1$ presque sûrement, puisque $P(N \cup N') \leq P(N) + P(N') = 0$.