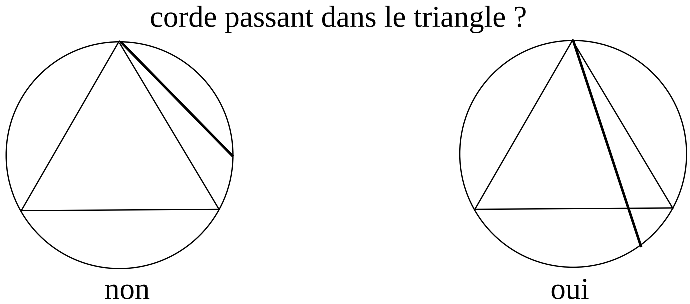
Exercices

Exercice 1 (le paradoxe des cordes de Bertrand – culture générale)
On considère un cercle. On choisit une corde au hasard et on cherche la probabilité pour que cette corde passe à l'intérieur d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont un des sommets est une des extrémités de la corde (voir la figure) ou, de façon équivalente, pour que cette corde soit plus longue que le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle.



Cet exercice est volontairement formulé de façon imprécise. Essayez de trouver la solution de façon intuitive (pas de théorème à utiliser ici). Il est fort probable que vous ne trouviez pas tous la même probabilité. Historiquement, ce genre de paradoxe a motivé l'introduction d'une théorie rigoureuse du hasard.

Exercice 2 (variance)
Soit X une v.a. réelle dans L^2. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \min_{t\in\mathbb{R}} E((X-t)^2)$.

Exercice 3 (calcul de loi, fonction de répartition)
a) Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et $Z = X^2$. Calculer la fonction de répartition et la densité de Z *(la loi de Z est appelée loi χ_2 à 1 degré de liberté).*
b) Soit Y une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de Y^3.

Exercice 4 (fonction de répartition)
Soit X une v.a. réelle positive intégrable. Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F(t))\,dt$.

Exercice 5 (indépendance d'événements)
Soit A et B deux événements indépendants. Montrer que $A \perp B^c$. En déduire que $A^c \perp B$ et $A^c \perp B^c$.

Exercice 6 (la loi exponentielle est sans mémoire – probabilités conditionnelles)
a) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$ pour tous $s, t \geq 0$.
b) Soit X une v.a. positive avec une densité continue sur $\mathbb{R}_+$. Si $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$ pour tous $s, t \geq 0$, montrer que X suit une loi exponentielle.

Ce résultat montre que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, et que c'est la seule sous l'hypothèse du b). En fait, cette hypothèse n'est pas nécessaire mais le résultat est alors plus difficile à montrer (voir [Billingsley, A20, p568]).

Exercice 7 (probabilités élémentaires ou probabilités conditionnelles et formule de Bayes)
Il y a 5% de daltoniens chez les hommes et 0,25% chez les femmes. Il y a 48% d'hommes et 52% de femmes dans la population. Quelle est la probabilité pour qu'un daltonien soit un homme ?

Remarque : la forme la plus courante du daltonisme est génétique, due à un gène récessif porté par le chromosome X. Un homme (XY) est daltonien dès que le chromosome X porte ce gène. Une femme (XX) n'est daltoniene que si les 2 chromosomes X portent ce gène. Ceci explique les taux très différents chez les hommes et les femmes.

Exercice 8 (probabilités conditionnelles, formule de Bayes)
Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Exercice 9 (calcul de loi, indépendance de v.a.)
Soit X et Y des v.a. indépendantes de loi uniforme de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}$ et $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z.

Exercice 10 (fonction de répartition, indépendance)
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Z.

Exercice 11 (v.a. indépendantes, densité)
Soit X et Y des v.a. réelles indépendantes ayant des lois continues. Montrer que $P(X = Y) = 0$.

Exercice 12 (loi d'un temps d'arrêt avec un jeu de pile ou face)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. On définit la v.a. T_1 à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par $T_1 = \inf\{k > 0 \mid X_k = 1\}$, avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$.
(si on joue à pile $= 0$ ou face $= 1$, T_1 est le temps nécessaire pour obtenir face une première fois)
a) Montrer que T_1 est fini presque sûrement.
b) Déterminer la loi et l'espérance de T_1 *(cette loi est appelée loi géométrique, $E(T_1)$ est le nombre moyen de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir face une première fois).*
c) Pour tout $n \geq 2$, on définit par récurrence $T_n = \inf\{k > T_{n-1} \mid X_k = 1\}$.
(si on joue à pile ou face, T_n est le temps nécessaire pour obtenir exactement n fois face)
Montrer que les v.a. $T_1,\ (T_2 - T_1), \ldots,\ (T_n - T_{n-1}), \ldots$ sont indépendantes et de même loi.
d) Quelle est la loi de T_n ?

Pour approfondir, voir par exemple le paradoxe de l'inspection [Foata-Fuchs, p77].

Définition générale d'un temps d'arrêt : une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un temps d'arrêt relativement à la suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ si pour tout n l'événement $\{T \leq n\}$ appartient à la tribu engendrée par les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ (autrement dit, il suffit de connaître les valeurs de $X_1, \ldots, X_n$ pour savoir si $T \leq n$).

Exercice 13 (fonctions génératrices)
Soit X une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
a) Calculer la fonction génératrice de X.
b) Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{B}(m, p)$, indépendante de X. Quelle est la fonction génératrice de $X + Y$? En déduire que $\mathcal{B}(n, p) * \mathcal{B}(m, p) = \mathcal{B}(n + m, p)$.

C'est une des façons de démontrer la stabilité des lois binomiales par convolution. La méthode marche aussi pour les lois de Poisson.
Les fonctions génératrices ne figurent pas au programme de l'agrégation. Voir par exemple [Ouvrard 1 p138] ou [Foata-Fuchs p99] pour leur définition et leurs propriétés.

Exercice 14 (fonction caractéristique)
Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Calculer sa fonction caractéristique.

Exercice 15 (fonctions caractéristiques)
a) Soit X une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer sa fonction caractéristique.
b) Soit Y une v.a. indépendante de X telle que $P_Y = \mathcal{P}(\lambda')$. Quelle est la fonction caractéristique de de $X + Y$? En déduire que $\mathcal{P}(\lambda) * \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda')$.

C'est une des façons de démontrer la stabilité des lois de Poisson par convolution. La méthode marche aussi pour les lois binomiales.

Exercice 16 (application de Borel-Cantelli)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
a) En utilisant le lemme de Borel-Cantell, montrer que

$$P(X_n > \alpha \ln n \text{ pour une infinité de } n) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

b) En déduire que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \dfrac{X_n}{\ln n} = 1$ presque sûrement (question assez difficile).