

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11
Faculté des Sciences d'Orsay

Memoire présenté pour obtenir
le diplôme d'habilitation à diriger des recherches
de l'Université Paris-Sud 11
Spécialité : Mathématiques

par

Sylvie RUETTE

Dynamique en dimension 1

**Transformations de l'intervalle,
ensemble de rotation de graphes topologiques**

Rapporteurs : Jacek GRACZYK, Patrice LE CALVEZ, Michał MISIUREWICZ

Soutenu le 25 novembre 2011 devant le jury composé de :

M. Jérôme BUZZI
M. Sylvain CROVISIER
M. Jacek GRACZYK
M. Patrice LE CALVEZ
M. Jérôme LOS
M. Michał MISIUREWICZ

Remerciements

Je suis très honorée que Jacek Graczyk, Patrice Le Calvez et Michał Misiurewicz aient acceptés d'être rapporteurs de ce mémoire et membres du jury.

Je tiens à remercier Jérôme Buzzi et Sylvain Crovisier pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, et c'est avec plaisir que je soutiens en leur présence. Je remercie également Jérôme Los de participer à ce jury.

Toute ma gratitude va à Lluís Alsedà pour sa collaboration et nos échanges fructueux ; travailler avec lui est toujours un plaisir.

Je n'oublie pas le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay et l'équipe Topologie et Dynamique, qui constituent un cadre propice à la recherche.

Table des matières

Introduction	5
1 Chaos pour les transformations de l'intervalle	9
1.1 Relations entre les principaux ingrédients « chaotiques »	9
1.2 Renforcer le chaos au sens de Li-Yorke	11
1.2.1 Chaos distributionnel	12
1.2.2 Chaos générique et chaos dense	12
1.3 Une échelle du chaos : du mélange au chaos Li-Yorke	13
2 Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle	16
2.1 Diagramme de Markov associé à une transformation	17
2.1.1 Isomorphisme avec un sous-shift	17
2.1.2 Diagramme de Markov	18
2.1.3 Exemple de diagrammes de Markov	21
2.2 Transformations monotones par morceaux	23
2.3 Transformations C^r	23
2.3.1 Entropie locale	24
2.3.2 Existence d'une mesure maximale	24
2.3.3 Transformations C^r sans mesure maximale	26
3 Ensemble de rotation pour des transformations de graphes topologiques	29
3.1 Théorie de rotation sur le cercle	29
3.2 Définitions	31
3.2.1 Espaces relevés	31
3.2.2 Relèvement, degré, points périodiques	32
3.3 Connexité et compacité de l'ensemble de rotation	33
3.4 Relation entre ensemble de rotation et points périodiques	35
3.4.1 Intérieur de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$	35
3.4.2 Bord de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$	39
4 Ensemble de rotation sur les graphes sigma et soleil	43
4.1 Applications du graphe sigma	43
4.1.1 Applications σ -ressemblantes	44
4.1.2 Ensemble de rotation d'une application σ -ressemblante	45
4.2 Applications des graphes soleil	47
4.2.1 Applications soleil-ressemblantes	47
4.2.2 Graphe de recouvrement	48
4.2.3 Ensemble de rotation du graphe de recouvrement	51
4.2.4 Ensemble de rotation d'une application soleil-ressemblante	53

5 Applications peignées	54
5.1 Fonctions d'eau pour les transformations du cercle	54
5.2 Fonctions d'eau pour les transformations de graphes	55
5.3 Applications peignées	55
6 Perspectives	58
6.1 Transformations de graphes topologiques	58
6.2 Dynamique topologique abstraite	60
Glossaire	61
Bibliographie	63
Liste des travaux présentés	68

Introduction

Un système dynamique topologique (X, T) désigne une application continue $T: X \rightarrow X$, où X est un espace compact métrique. La dynamique est obtenue en itérant l'application, T^n désignant T composée n fois ($T \circ T \circ \dots \circ T$). Dans ce mémoire, nous nous intéressons à des systèmes où X est un intervalle compact, ou plus généralement un graphe topologique, c'est-à-dire un espace compact connexe obtenu en recollant un nombre fini de segments par certaines de leurs extrémités.

Une des motivations pour étudier la dynamique en dimension 1, outre son intérêt propre, est d'essayer de comprendre certaines dynamiques en dimension supérieure. Plusieurs notions de comportement chaotique ont été introduites à partir des années 1970. Comme les systèmes dynamiques sur l'intervalle sont parmi les plus simples tout en exhibant pour certains des comportements chaotiques, ils ont été largement étudiés, avec l'espoir de mieux comprendre les comportements complexes en jeu et de mettre en lumière des comportements similaires dans d'autres systèmes. Par ailleurs, dans un certain nombre de cas, on peut se ramener à étudier un système dynamique de dimension plus petite, notamment en considérant la section d'un flot ou l'action sur des fibres, ou en se restreignant à la partie «la plus intéressante» de la dynamique, qui peut être de dimension inférieure. Par exemple, cette idée a été appliquée avec succès pour étudier les flots de Lorenz en dimension 3, qui sont donnés par le système d'équations différentielles $\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$, $\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$, $\frac{dz}{dt} = xy - bz$, où σ, r, b sont des constantes strictement positives. Pour des paramètres variant dans un certain domaine, on a un feuilletage contractant et, en identifiant les points des feuilles contractantes, on peut se ramener à un semi-flot sur une variété ramifiée de dimension 2 ; puis en considérant une certaine application de premier retour, on obtient une application de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même, discontinue en un unique point $c \in]0, 1[$, croissante sur $[0, c[$ et $]c, 1]$, qui est appelée une application de type Lorenz (voir par exemple [Spa82]). On peut également citer les homéomorphismes de surface auxquels on peut associer une dynamique sur des graphes topologiques, ainsi que des train-tracks (voir par exemple [FL99, BH95] pour des constructions sur le disque et les surfaces). Notons cependant que la dimension 1 engendre des propriétés spécifiques, ce qui fait que les systèmes dynamiques en dimension 1 ne peuvent pas être des modèles pour des dynamiques quelconques. Sur l'intervalle, les diverses notions chaotiques ont souvent des relations entre elles, même quand elles peuvent apparaître de façon disjointe dans d'autres espaces ; par exemple, il existe des systèmes dynamiques topologiquement mélangeants d'entropie nulle, alors que toute transformation de l'intervalle topologiquement mélangeante a une entropie strictement positive. Les points périodiques occupent une place importante dans l'étude de la dynamique en dimension 1. Un point x est périodique de période n pour la transformation T si $T^n(x) = x$ avec n le plus petit entier strictement positif ayant cette propriété. Non seulement les points périodiques apparaissent de façon abondante en dimension 1, mais les périodes donnent également des renseignements sur la dynamique. Par exemple, une transformation de l'intervalle a une entropie topologique non nulle si et seulement s'il existe un point périodique dont la période n'est pas une puissance de 2 ; et une transformation du cercle n'a pas de point périodique si et seulement

si elle est de degré 1 et a un unique nombre de rotation, qui est irrationnel.

Une question classique de la dynamique en dimension 1 est la caractérisation des ensembles d'entiers pouvant être réalisés comme ensembles de périodes. La première réponse vient du théorème de Sharkovskii [Sha64a, Sha95], qui a motivé les travaux ultérieurs.

Théorème de Sharkovskii. *L'ordre de Sharkovskii est défini comme suit :*

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

On note \triangleright l'ordre inverse, et $\triangleright, \triangleleft$ les inégalités larges associées.

Soit I un intervalle compact et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue. Si f a un point périodique de période n , alors f a des points périodiques de période m pour tout $m \triangleleft n$.

Le théorème de Sharkovskii implique de l'ensemble des périodes d'une transformation de l'intervalle est égal à un segment terminal de l'ordre de Sharkovskii, c'est-à-dire un ensemble de la forme $S(n) = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \triangleleft n\}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ ou $S(2^\infty) = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$; en fait, tous les segments terminaux peuvent être réalisés comme ensemble de période [Sha64a, Šte77, BP78].

Ce résultat a été généralisé par étapes aux arbres, c'est-à-dire aux graphes topologiques sans sous-espace homéomorphe à un cercle. Pour chaque entier $p \geq 2$, le p -ordre de Baldwin est un ordre partiel sur \mathbb{N}^* ; pour $p = 2$, il coïncide avec l'ordre de Sharkovskii. L'ensemble des périodes d'une transformation continue d'un arbre dans lui-même est l'union d'un nombre fini de segments terminaux d'ordres de Baldwin et d'un ensemble fini [AJM05b].

Une autre direction est donnée par l'étude des graphes topologiques qui ne sont pas des arbres. Les transformations du cercle présentent en effet un comportement nouveau : l'ensemble des périodes dépend du degré de la transformation et, dans le cas du degré 1, de l'intervalle de rotation. Si f est une application continue du cercle $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans lui-même, on considère un relèvement de f , c'est-à-dire une application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ f = f \circ \pi$, où $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la projection canonique. Il existe un unique entier $d \in \mathbb{Z}$, appelé le degré de f ou de F , tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = F(x) + d$. Si $|d| \geq 2$, l'ensemble des périodes de f est égal à \mathbb{N}^* (sauf quand $d = -2$, où il peut également être égal à $\mathbb{N}^* \setminus \{2\}$). Si $d = 0$ ou -1 , l'ensemble des périodes de f est de la forme $S(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^* \cup \{2^\infty\}$, comme dans le cas des transformations de l'intervalle. Dans le cas $d = 1$, on définit le nombre de rotation d'un point $x \in \mathbb{R}$ par

$$\rho_F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

si cette limite existe, et $\text{Rot}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \{\rho(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } \rho_F(x) \text{ existe}\}$. L'ensemble $\text{Rot}(F)$ est un intervalle compact non vide, appelé intervalle de rotation de F ou de f . Remarquons que l'intervalle de rotation de f est défini modulo l'addition d'un entier : si F' est un autre relevé de f , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $F' = F + k$, et on a $\text{Rot}(F') = \text{Rot}(F) + k$. L'ensemble des périodes de f contient l'ensemble de tous les dénominateurs des rationnels (non nécessairement écrits sous forme irréductible) à l'intérieur de l'intervalle de rotation de f . C'est Misiurewicz [Mis82] qui a déterminé les ensembles de périodes des transformations du cercle de degré 1. La caractérisation de l'ensemble de périodes pour une transformation f de degré d différent de 1 est plus simple que le cas de degré 1; elle est due à Block, Guckenheimer, Misiurewicz et Young [BGM80].

Peu de choses ont été faites concernant les ensembles de périodes de transformations sur un graphe topologique qui n'est ni un arbre ni le cercle. Seuls deux cas ont été étudiés par le passé : le graphe en forme de σ [LL95], qui est le graphe le plus simple dans cette classe, et le graphe en forme de 8 [LPR03], en se limitant dans les deux cas aux transformations fixant le point de branchement; cette hypothèse facilite grandement l'étude, tout comme dans le cas des arbres où les transformations fixant les points de branchement ont été étudiées en premier.

Caractériser les ensembles de période pour n'importe quel graphe est un objectif lointain. Le chantier étant vaste, nous nous sommes intéressés pour commencer aux graphes ayant le type d'homotopie du cercle, et plus particulièrement aux transformations de degré 1 sur ces graphes, le degré 1 semblant le cas le plus riche, comme pour le cercle. Nous avons développé une théorie de rotation pour les transformations de degré 1 sur une famille de graphes topologiques, incluant tous les graphes ayant le type d'homotopie du cercle. Nous espérons que cette théorie de rotation permettra de caractériser précisément les ensembles de périodes de ces transformations ; ce sera l'objet de recherches futures.

Contenu du mémoire

Ce mémoire comporte cinq chapitres où sont présentés mes travaux, suivis d'un chapitre de perspectives et d'un glossaire.

Les deux premiers chapitres traitent de dynamique sur l'intervalle. Dans le premier chapitre, nous nous intéressons à certaines propriétés « chaotiques » des transformations continues d'un intervalle compact dans lui-même. Nous commençons par donner un rapide aperçu de l'état de l'art, puis nous étudions deux notions distinctes : d'une part l'existence d'un sous-système transitif sensible (aussi appelé *chaos au sens de Wiggins*), qui apparaît être une notion intermédiaire entre l'entropie topologique non nulle et le chaos au sens de Li-Yorke [5] ; d'autre part les transformations *densément chaotiques* (c'est-à-dire pour lesquelles les couples de Li-Yorke sont denses), dont nous étudions la structure [6].

Le chapitre suivant est consacré à l'existence ou non de mesures d'entropie maximale pour des transformations de l'intervalle. Nous présentons l'outil principal qui consiste à associer une chaîne de Markov topologique à une transformation de l'intervalle. Puis nous exposons les résultats pour les transformations continues par morceaux. Enfin nous parlons des transformations C^r : nous donnons un critère d'existence de mesure d'entropie maximale [7] et nous parlons d'un exemple sans mesure d'entropie maximale [1], [4].

Nous changeons ensuite de cadre pour nous intéresser à des dynamiques sur des graphes topologiques. Dans le troisième chapitre est présentée la théorie de rotation pour des transformations continues de degré 1 sur certains graphes topologiques [8]. On considère un graphe topologique G ayant une unique boucle S (une boucle étant un sous-espace homéomorphe à un cercle) et une transformation continue $f : G \rightarrow G$, de degré 1 par rapport à la boucle. Pour définir les nombres de rotation, on considère T le revêtement universel de G , $\pi : T \rightarrow G$ la projection canonique et $F : T \rightarrow T$ un relèvement continu de f ; pour simplifier, on suppose dans cette introduction que $T \subset \mathbb{C}$ et que $\pi^{-1}(S)$ coïncide avec \mathbb{R} , pour que les opérations arithmétiques ci-dessous n'aient pas besoin d'être définies. L'application F est de degré 1 si $\forall x \in T, F(x+1) = F(x) + 1$. On définit alors le nombre de rotation d'un point $x \in T$ par $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$, quand cette limite existe. Les points périodiques de f correspondent aux points périodiques (mod 1) de F . On travaille au niveau du relèvement F ; il suffit de projeter les résultats pour les exprimer pour f . Nous avons montré que l'ensemble $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \{\rho(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a des propriétés similaires à l'intervalle de rotation d'une transformation du cercle ; en particulier $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ est un intervalle compact non vide. De plus, si $p/q \in \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ alors il existe un point périodique (mod 1) de nombre de rotation p/q . Ces résultats sont en fait valables pour une famille de graphes plus grande que les graphes ayant une unique boucle.

Le chapitre 4 continue l'étude de l'ensemble de rotation en se restreignant à des graphes particuliers : le graphe σ (un segment recollé à un cercle) et les graphes « soleil » (plusieurs segments disjoints recollés à un cercle). Dans ces deux situations, on montre que l'ensemble de rotation tout entier est un ensemble fermé avec un nombre fini de composantes connexes. De plus, tous les rationnels (resp. tous les rationnels sauf un nombre fini) dans l'ensemble de

rotation sont nombres de rotation de points périodiques (mod 1) dans le cas du graphe σ (resp. des graphes soleil). Pour le graphe σ , la preuve mélange des outils spécifiques à la dimension 1 et de la dynamique symbolique via une partition adaptée [10]. Pour étudier les graphes soleil, on construit un graphe symbolique infini permettant de représenter les trajectoires par des chemins infinis dans ce graphe symbolique [11]; cette construction s'inspire des diagrammes de Markov initialement introduits par Hofbauer pour étudier les mesures d'entropie maximale des transformations de l'intervalle monotones par morceaux. Bien que le graphe σ soit un cas particulier de graphe soleil, nous présentons les deux techniques car la preuve dans le cas du graphe σ donne des résultats plus forts.

Au chapitre 5 nous abordons la théorie de rotation sous un angle différent du chapitre précédent, en faisant porter les hypothèses sur la transformation et non le graphe. Considérons comme ci-dessus une application $F: T \rightarrow T$ continue de degré 1. Une branche de T est une composante connexe de $T \setminus \mathbb{R}$. La rétraction r de T sur \mathbb{R} est définie par $r(x) = x$ si $x \in \mathbb{R}$, et $r(x) = z$ si x est dans une branche B et $\overline{B} \cap \mathbb{R} = \{z\}$. Nous dirons que la transformation F est *peignée* si l'image de toute branche est «cachée» par $F(\mathbb{R})$ si on observe le graphe de $r \circ F$ en se plaçant en $-\infty$ ou en $+\infty$, plus précisément si :

$$\text{pour toute branche } B, r(F(B)) \subset F(]-\infty, x]) \cap F([x, +\infty[) \text{ où } x = r(B).$$

L'ensemble de rotation des transformations peignées a exactement les mêmes propriétés que celui d'une transformation du cercle de degré 1, notamment en ce qui concerne l'ensemble des périodes correspondant à un nombre de rotation donné et l'existence d'orbites bien ordonnées [8]. Pour cela, nous utilisons la technique des *fonctions d'eau* introduite pour les transformations du cercle. Les transformations peignées sont les applications pour lesquelles cette approche peut être adaptée avec succès.

Autres travaux

Je donne ci-dessous un aperçu des articles [2] et [3], qui s'inscrivent mal dans ce mémoire et que je de développerai pas.

Dans [2], François Blanchard, Bernard Host et moi-même nous intéressons aux systèmes dynamiques donnés par une transformation continue T d'un espace métrique compact dans lui-même. Nous montrons qu'un système dynamique topologique (X, T) d'entropie non nulle possède des couples asymptotiques propres, c'est-à-dire des couples de points distincts (x, y) tels que la distance entre $T^n x$ et $T^n y$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Plus précisément, si on considère une mesure T -ergodique d'entropie non nulle, presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. De plus, quand T est inversible, «la plupart» des couples asymptotiques pour T sont des couples de Li-Yorke pour T^{-1} .

L'article [3] est consacré aux chaînes de Markov topologiques; ce sont des systèmes symboliques définis par l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté dénombrable, muni de la transformation shift. Un graphe fortement connexe est soit transient, soit récurrent positif, soit récurrent nul. Une chaîne de Markov transitive admet une mesure d'entropie maximale si et seulement si son graphe est récurrent positif. Nous montrons qu'un graphe transient peut être étendu en un graphe récurrent de même entropie, qui est soit récurrent positif, soit récurrent nul. Nous montrons également qu'une chaîne de Markov transitive admet une mesure d'entropie maximale si son entropie locale est strictement inférieure à son entropie (globale).

Chapitre 1

Chaos pour les transformations de l'intervalle

Une *transformation de l'intervalle* désigne un système dynamique topologique donné par une application continue $f: I \rightarrow I$, où I est un intervalle compact non dégénéré (c'est-à-dire non vide et non réduit à un point). Dans la littérature, beaucoup a été écrit concernant le chaos pour les transformations de l'intervalle, ou plutôt les divers comportements chaotiques. Les relations entre les différentes propriétés liées au chaos sont bien plus nombreuses en dimension 1 que pour les systèmes dynamiques en général. Certaines notions deviennent équivalentes sur l'intervalle, par exemple les mélanges topologiques faible et fort, et une « échelle du chaos » relativement ordonnée se dégage. Nous avons écrit un survey sur ce sujet [Rue]. Les théorèmes 1.1.8 et 1.2.5 sont tirés respectivement de [5] et [6].

1.1 Relations entre les principaux ingrédients « chaotiques »

Les définitions du « chaos » sont nombreuses dans la littérature (“*As many authors, as many definitions of chaos*” [KS97]), si bien que la notion de chaos reste diffuse. C'est plutôt un faisceau de propriétés mettant en relief certains comportements en rapport avec l'imprévisibilité ou la complexité de la dynamique. Les principales notions apparaissant quand on parle du chaos, en particulier sur l'intervalle, sont : transitivité, sensibilité aux conditions initiales, points périodiques, entropie, couples de Li-Yorke. Remarquons que l'existence de points périodiques ne semble pas en soi « chaotique » ; mais, d'une part le chaos au sens de Devaney (définition 1.1.3) a introduit la densité des points périodiques comme « ingrédient chaotique », d'autre part les points périodiques et leurs périodes ont une grande importance en dimension 1.

Un système dynamique (X, T) est *transitif* si, pour tous ouverts non vides U, V de X , il existe un entier $n \geq 0$ tel que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$; de façon équivalente, le système est transitif s'il existe un point d'orbite dense. Le système est (*fortement*) *topologiquement mélangeant* si, pour tous ouverts non vides U, V , il existe un entier $N \geq 0$ tel que, $\forall n \geq N$, $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

La transitivité est souvent vue comme une hypothèse assurant l'« irréductibilité » d'un système dynamique. Sur l'intervalle, la transitivité est très proche du mélange topologique, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 1.1.1 (Barge-Martin) *Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une transformation transitive de l'intervalle. Alors*

- *soit f est topologiquement mélangeante,*

- soit il existe $c \in]a, b[$ tel que $f([a, c]) = [c, b]$, $f([c, b]) = [a, c]$, et les applications $f^2|_{[a, c]}$, $f^2|_{[c, b]}$ sont topologiquement mélangeantes.

Le mélange topologique est un « chaos fort ». Sur l'intervalle, il implique presque toutes les propriétés topologiques chaotiques qu'on peut imaginer. En particulier, une transformation de l'intervalle a les propriétés d'entropie uniformément positive (tout recouvrement d'ouverts non denses a une entropie strictement positive, un analogue topologique de K-système) et de spécification (des morceaux d'orbites mis bout à bout, en laissant un temps donné entre deux, peuvent être pistés par un point périodique).

Pour Devaney, le chaos se caractérise par un mélange d'imprévisibilité (via la sensibilité aux conditions initiales) et de comportements réguliers (via les points périodiques) [Dev89]. Il a basé sa définition du chaos sur l'observation de systèmes faciles à étudier, en particulier sur l'intervalle. Sa définition s'est popularisée, notamment en raison de sa simplicité.

Définition 1.1.2 Soit $T: X \rightarrow X$ une application continue sur un espace X compact métrique, muni de la distance d . Le système (X, T) est *sensible aux conditions initiales* (ou simplement *sensible*) s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in X$ et $n \geq 0$ tels que $d(x, y) < \varepsilon$ et $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$.

Définition 1.1.3 Soit $T: X \rightarrow X$ une application continue sur un espace X compact métrique. Le système (X, T) est *chaotique au sens de Devaney* s'il est transitif, sensible aux conditions initiales, et si les points périodiques sont denses dans X .

Il est apparu que cette définition est redondante : dans le cas général, un système dynamique transitif ayant des points périodiques denses est chaotique au sens de Devaney dès que l'espace est infini [BBC⁺92, GW93] ; et une transformation transitive de l'intervalle est toujours chaotique au sens de Devaney [Sha64b, BM85, Rue]. On est alors tenté de supprimer certaines hypothèses du chaos au sens de Devaney et/ou de considérer des sous-systèmes (Devaney lui-même s'intéressait à l'existence de sous-systèmes chaotiques plutôt qu'au « chaos » de tout le système). Si on garde seulement l'hypothèse de sensibilité ou de densité des points périodiques, on ne peut évidemment pas espérer obtenir la transitivité du système entier, mais on obtient néanmoins la transitivité sur un cycle périodique de sous-intervalles ou, de façon équivalente, la transitivité (et même le mélange) d'un itéré de la transformation sur un sous-intervalle.

Théorème 1.1.4 (Blokh, Barge-Martin) Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle. Si l'une des deux conditions est réalisée :

- les points périodiques de période différente de 1 et 2 sont denses,
- f est sensible aux conditions initiales,

alors il existe un entier $n \geq 1$ et un sous-intervalle compact non dégénéré J , invariant par f^n , tel que $f^n|_J$ est topologiquement mélangeante.

Des sous-systèmes chaotiques au sens de Devaney apparaissent naturellement quand on considère un fer à cheval¹, c'est-à-dire deux intervalles J, K fermés et d'intérieurs disjoints tels que $f(J) \cap f(K) \supset J \cup K$, car les points dont l'orbite ne sort pas de $J \cup K$ forment un sous-ensemble sur lequel f agit quasiment comme un shift. Pour les transformations de l'intervalle, le fait d'avoir une entropie non nulle est équivalent à l'existence d'un fer à cheval pour un itéré de f [Mis80, BGM80] ; Shihai Li en a déduit le résultat suivant [Li93].

¹Des variantes existent quant à la définition de fer à cheval ; nous suivons ici la définition donnée dans [ALM00].

Théorème 1.1.5 (Li) Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle. L'entropie topologique de f est non nulle si et seulement s'il existe $X \subset I$ un sous-ensemble fermé non vide invariant tel que $f|_X$ est transitive, sensible aux conditions initiales et les points périodiques sont denses dans X .

Si on considère un sous-système transitif et sensible, on obtient la définition suivante, découlant des travaux de Wiggins [Wig90].

Définition 1.1.6 Une transformation de l'intervalle $f: I \rightarrow I$ est *chaotique au sens de Wiggins* s'il existe un sous-ensemble Y fermé f -invariant tel que la restriction $f|_Y$ est transitive et sensible aux conditions initiales.

Un autre type d'« imprévisibilité » est capté par la notion de couple de Li-Yorke. Deux points formant un couple de Li-Yorke ont des orbites qui tantôt s'éloignent, tantôt se rapprochent, de sorte que connaître une orbite ne renseigne en rien sur la position de l'autre orbite.

Définition 1.1.7 (couples de Li-Yorke, chaos au sens de Li-Yorke) Soit $T: X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique X , muni de la distance d . Si $x, y \in X$ et $\delta > 0$, (x, y) est appelé un *couple de Li-Yorke de module δ* si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) > \delta \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

(x, y) est un *couple de Li-Yorke* si c'est un couple de Li-Yorke de module δ pour un certain $\delta > 0$. L'ensemble des couples de Li-Yorke (resp. des couples de Li-Yorke de module δ) est noté $\text{LY}(T)$ (resp. $\text{LY}(T, \delta)$).

Un système dynamique (X, T) est chaotique au sens de Li-Yorke s'il existe un ensemble non dénombrable S tel que tout couple de points distincts $x, y \in S$ est un couple de Li-Yorke ; autrement dit, $S \times S \setminus \Delta \subset \text{LY}(T)$, où $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

On déduit trivialement du théorème 1.1.5 qu'une transformation de l'intervalle d'entropie non nulle est chaotique au sens de Wiggins. Par ailleurs, on sait qu'un système dynamique d'entropie topologique non nulle est chaotique au sens de Li-Yorke ; ceci est montré dans [JS86] pour les transformations de l'intervalle et [BGKM02] pour un système dynamique général. Nous avons montré que, pour les transformations de l'intervalle, le chaos au sens de Wiggins est un échelon strictement intermédiaire entre ces deux notions [5].

Théorème 1.1.8 Une transformation de l'intervalle chaotique au sens de Wiggins est chaotique au sens de Li-Yorke. De plus, il existe une transformation de l'intervalle d'entropie topologique nulle qui est chaotique au sens de Wiggins ; et il existe une transformation de l'intervalle qui est chaotique au sens de Li-Yorke mais pas au sens de Wiggins.

Les exemples servant à montrer la deuxième partie du théorème précédent montrent que le comportement des transformations d'entropie nulle est plus varié qu'on pourrait s'y attendre.

Nous donnons en section 1.3 un diagramme récapitulant les résultats de cette section et ceux de la suivante.

1.2 Renforcer le chaos au sens de Li-Yorke

La section 1.1 montre que, sur l'intervalle, le chaos au sens de Li-Yorke est « en bas de l'échelle du chaos ». On peut renforcer cette notion de deux façons, soit en considérant des couples de Li-Yorke dont les orbites s'écartent et se rapprochent « souvent », soit en demandant que les

couples de Li-Yorke soient «à peu près partout». Ceci mène d'un côté à la notion de chaos distributionnel, de l'autre aux définitions de chaos générique et dense.

1.2.1 Chaos distributionnel

Soit (X, T) un système dynamique et x, y deux points distincts de X . Les fonctions distributionnelles supérieures et inférieures de (x, y) sont les fonctions de $]0, +\infty[$ dans $[0, 1]$ définies par :

$$F_{xy}^*(t) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid d(T^i(x) - T^i(y)) < t\},$$

$$F_{xy}(t) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \#\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid d(T^i(x) - T^i(y)) < t\}.$$

Autrement dit, ce sont les densités supérieure et inférieure de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid d(T^n(x) - T^n(y)) < t\}$. Les fonctions F_{xy}^* et F_{xy} sont l'équivalent de la fonction de répartition d'une loi de probabilité, pour les valeurs prises par $d(T^n(x), T^n(y))$ (on a une vraie loi de probabilité si $F_{xy}^* = F_{xy}$).

Si $F_{xy}^*(t) \equiv 1$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_{xy}(\varepsilon) < 1$, alors $T^n(x)$ et $T^n(y)$ sont à une distance supérieure à ε (resp. inférieure à t pour t arbitrairement petit) pendant une proportion strictement positive de n ; en particulier, (x, y) est un couple de Li-Yorke. Ceci donne un renforcement de la notion de couple de Li-Yorke. Cette idée a conduit Schweizer et Smítal à définir le chaos distributionnel [SS94]. Des variantes ont ensuite été introduites, conduisant aux définitions suivantes.

Définition 1.2.1 Soit (X, T) un système dynamique. S'il existe un ensemble non dénombrable $S \subset X$ tel que, pour tout couple de points distincts $x, y \in S$, on ait une des conditions suivantes :

- (CD1) $F_{xy}^* \equiv 1$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_{xy}(\varepsilon) = 0$,
- (CD2) $F_{xy}^* \equiv 1$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F_{xy}(\varepsilon) < 1$,
- (CD3) il existe $0 < a < b$ tels que $\forall t \in]a, b[, F_{xy}^*(t) > F_{xy}(t)$,

alors T est distributionnellement chaotique de type 1, 2 ou 3 respectivement.

Il est clair que (CD1) \Rightarrow (CD2) \Rightarrow (CD3). Il a été montré que les trois types de chaos distributionnel coïncident pour les transformations de l'intervalle, mais pas en général [BSS05].

On voit assez facilement que le full shift est distributionnellement chaotique. On peut en déduire qu'une transformation de l'intervalle d'entropie non nulle est distributionnellement chaotique, en raison de l'existence de fer à cheval pour un itéré de la transformation. Schweizer et Smítal ont montré que la réciproque est vraie [SS94].

Théorème 1.2.2 (Schweizer-Smítal) *Soit f une transformation de l'intervalle. Alors f est distributionnellement chaotique (de type 1, 2 ou 3) si et seulement si son entropie topologique est strictement positive.*

1.2.2 Chaos générique et chaos dense

Les définitions suivantes sont dues à Lasota et Snoha [Sno90]

Définition 1.2.3 Soit $T: X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique X et $\delta > 0$.

- T est génériquement (resp. densément) chaotique si $\text{LY}(T)$ est résiduel (resp. dense).
- T est génériquement (resp. densément) δ -chaotique si $\text{LY}(T, \delta)$ est résiduel (resp. dense).

Le chaos δ -générique implique trivialement le chaos générique et le chaos δ -dense, qui impliquent eux-même le chaos dense. Kuchta et Smítal ont montré que, sur l'intervalle, l'existence d'un couple de Li-Yorke suffit à impliquer le chaos au sens de Li-Yorke [KS89]. Par conséquent, une transformation de l'intervalle densément chaotique est chaotique au sens de Li-Yorke.

Snoha a montré que, pour une transformation de l'intervalle, le chaos générique implique le chaos δ -générique pour un certain $\delta > 0$, et les chaos δ -générique et δ -denses coïncident [Sno90]. Il a donné une caractérisation du chaos générique en termes de sous-intervalles transitifs (c'est-à-dire un sous-intervalle compact non dégénéré invariant sur lequel la transformation est transitive).

Théorème 1.2.4 (Snoha) *Soit f une transformation de l'intervalle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- f est génériquement chaotique,
- soit il existe un unique sous-intervalle transitif, soit il existe deux sous-intervalles transitifs avec une extrémité commune. De plus, pour tout intervalle non dégénéré J , $f^n(J)$ est non dégénéré et il existe un sous-intervalle transitif T et un entier $n \geq 0$ tels que $f^n(J) \cap \text{Int}(T) \neq \emptyset$.

Il existe des transformations de l'intervalle densément chaotiques non génériquement chaotiques. Snoha se demandait quel était l'entropie minimale et le type de Sharkovskii impliqués par le chaos dense. Nous avons obtenu un résultat sur la structure des transformations de l'intervalle qui sont densément chaotiques [6], qui permet de répondre à ces questions.

Théorème 1.2.5 *Soit f une transformation de l'intervalle. Si f est densément mais pas génériquement chaotique, il existe une suite de sous-intervalles non dégénérés invariants $(J_n)_{n \geq 0}$ tels que, pour tout $n \geq 0$, $J_{n+1} \subset J_n$, $f^2|_{J_n}$ a un fer à cheval, et la longueur de J_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

La figure 1.1 illustre ce théorème. Cet exemple est initialement dû à Mizera (voir [Sno90]). Remarquons que ces transformations n'admettent pas de sous-intervalle transitif (pour f ou un itéré), ce que distingue ce type de « chaos global » de ceux vus précédemment.

Il est connu que si $f|_J$ est transitive (où J est un intervalle invariant) alors f^2 a un fer à cheval dans J [BC87] (voir aussi [Rue, proposition 3.3.26]). Les théorèmes 1.2.4 et 1.2.5 impliquent donc le résultat suivant.

Corollaire 1.2.6 *Si f est une transformation de l'intervalle densément chaotique, alors f^2 a un fer à cheval. Par conséquent, $h_{\text{top}}(f) \geq \frac{\log 2}{2}$ et f est de type au plus 6 pour l'ordre de Sharkovskii (autrement dit, tous les entiers pairs sont des périodes pour f).*

1.3 Une échelle du chaos : du mélange au chaos Li-Yorke

Le diagramme suivant donne une vue d'ensemble de la hiérarchie du chaos pour les transformations de l'intervalle. Les implications ne sont pas des équivalences : toutes les implications inverses sont fausses. Les quatre premières colonnes correspondent à des notions « globales » (sur

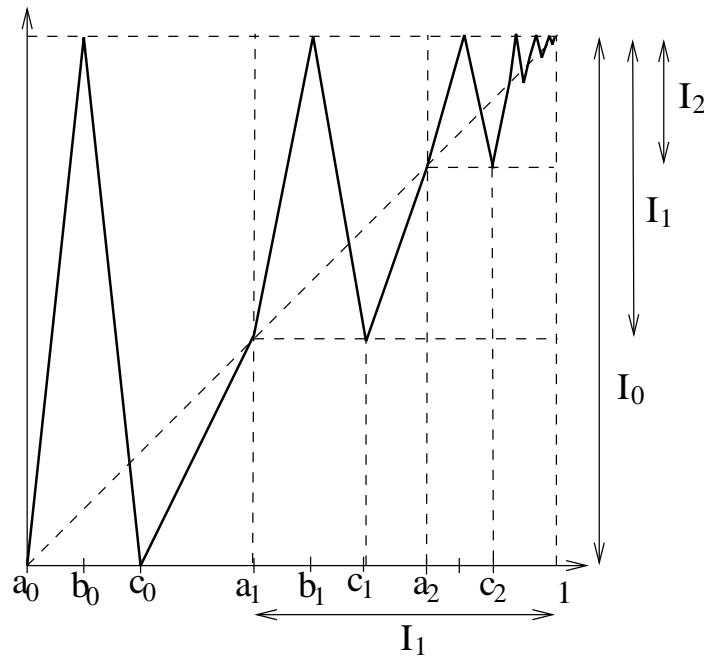
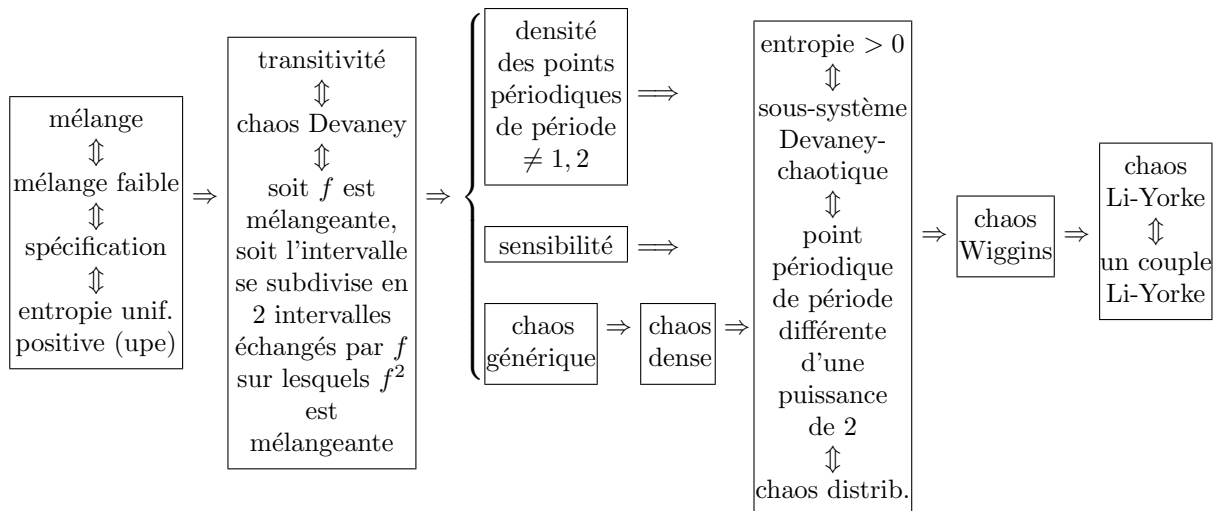


FIGURE 1.1 – Transformation de l'intervalle densément mais non génériquement chaotique. On a trois suites $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$, $(c_n)_{n \geq 0}$ qui convergent vers 1 et vérifient $a_n < b_n < c_n < a_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. L'intervalle $I_n = [a_n, 1]$ est invariant et $([a_n, b_n], [b_n, c_n])$ est un fer à cheval inclus dans I_n .

tout l'intervalle), alors que les trois dernières colonnes sont des propriétés « locales » (comportement pouvant être concentré sur un sous-ensemble, par exemple un Cantor). Il est remarquable que les propriétés « globales » ci-dessous, sauf le chaos dense, impliquent toutes le mélange d'un itéré sur un sous-intervalle, donc un « retour à la colonne 1 » (et tout ce qui en découle), non pour tout le système, mais sur un sous-intervalle.



Il semble qu'on a essentiellement fait le tour des relations entre les différentes propriétés topologiques liées au chaos concernant les transformations de l'intervalle qui sont simplement continues. Pour aller plus loin, on peut se concentrer sur des familles de transformations plus restreintes (unimodales, fonctions différentiables, etc), ou au contraire considérer des applications continues sur des espaces de dimension 1 plus généraux, ce que nous faisons dans les

chapitres 3 à 5 ; on peut également s'intéresser à des propriétés ergodiques, comme l'existence de certaines mesures invariantes, ce qui est le cas au chapitre suivant.

Chapitre 2

Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle

On a vu au chapitre 1 que le fait de se restreindre aux systèmes dynamiques sur l'intervalle mène à des cascades de propriétés topologiques. On peut s'interroger sur l'existence de « bonnes » mesures (par mesure, nous entendons toujours une mesure de probabilité invariante). Les deux types de mesures habituellement considérées sont les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et les mesures d'entropie maximale (appelées *mesures maximales*). Les premières donnent des mesures relativement maniables par le biais de leur densité mais leur existence n'est pas conservée par conjugaison. Les mesures maximales, auxquelles nous nous intéressons dans ce chapitre, peuvent paraître davantage intrinsèques puisqu'elles sont préservées par conjugaison ; cependant, l'ordre de dérivabilité intervient de façon déterminante dans les résultats.

Le théorème de décomposition ergodique (voir par exemple [DGS76]) dit que, pour un système dynamique (X, T) avec X compact métrique, toute mesure invariante μ s'écrit comme barycentre de mesures ergodiques : il existe une mesure de probabilité P_μ sur l'ensemble \mathcal{M}^e des mesures ergodiques telle que $\mu = \int_{\mathcal{M}^e} \omega dP_\mu(\omega)$. De plus, l'entropie de μ est également donnée par cette décomposition : $h_\mu(X, T) = \int_{\mathcal{M}^e} h_\omega(X, T) dP_\mu(\omega)$. Ceci implique qu'une mesure maximale s'écrit comme barycentre de mesures ergodiques maximales. On peut donc se restreindre à l'étude des mesures ergodiques maximales.

L'existence d'une mesure maximale, connue pour les transformations markoviennes, a d'abord été montrée pour les β -shifts [Hof78]. Dans [Hof79], Hofbauer étend la technique utilisée pour les β -shifts – associer une chaîne de Markov topologique au système initial – aux transformations monotones par morceaux. Il montre que de telles transformations admettent un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques dès que leur entropie topologique est non nulle, et la transitivité implique l'unicité de la mesure maximale.

Dans [Buz97], Buzzi étend la construction d'un diagramme de Markov à toutes les transformations de l'intervalle ; sous certaines conditions, l'étude des mesures maximales du système initial se ramène à celle de la chaîne de Markov associée. Il montre que le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul si la transformation est C^∞ , et que la mesure maximale est unique si le système est transitif ; on obtient ainsi les mêmes résultats que pour les transformations monotones par morceaux. La condition de régularité ne peut pas être affaiblie : il existe des transformations C^n de l'intervalle sans mesure maximale, pour un entier n arbitrairement grand [Buz97], [1]. Néanmoins la régularité C^1 nous a permis de donner une nouvelle condition suffisante pour l'existence et la finitude des mesures maximales ergodiques, en terme d'entropie des points critiques et d'entropie locale (théorème 2.3.8). En particulier, ce résultat implique que, si $f: I \rightarrow I$ est une transformation C^r de l'intervalle telle que $h_{top}(I, f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty$,

alors elle possède une mesure maximale. Nous soulignons que cette condition n'implique pas la semi-continuité supérieure de l'entropie métrique, qui est la méthode la plus souvent utilisée pour montrer l'existence de mesures maximales (en particulier pour les transformations monotones par morceaux et C^∞).

Dans la première section, nous présentons la construction du diagramme de Markov associé à une transformation de l'intervalle; nous illustrons également la construction d'un diagramme de Markov sur un exemple. En section 2.2, nous rappelons les résultats concernant les transformations monotones par morceaux. Enfin, en section 2.3 nous donnons une condition suffisante pour l'existence de mesures maximales pour les transformations C^r et présentons un exemple C^r sans mesure maximale; les résultats de cette dernière section sont tirés de [7], [1] et [4].

2.1 Diagramme de Markov associé à une transformation

Dans cette section, nous exposons la construction d'une chaîne de Markov topologique associée à une transformation continue de l'intervalle et les conditions permettant de s'y ramener pour l'étude des mesures maximales. L'intérêt est qu'on connaît des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité de mesures maximale pour une chaîne de Markov topologique. Cette construction se fait en deux étapes : tout d'abord, on se ramène à un sous-shift sur un alphabet infini, puis on associe à ce sous-shift une chaîne de Markov sur un graphe orienté, appelé *diagramme de Markov*; la décomposition de la construction sert avant tout à construire les bijections entre les mesures maximales de part et d'autre. Nous illustrons la définition du diagramme de Markov en section 2.1.3.

En général, la chaîne de Markov ne représente pas entièrement le système de départ. La question de l'existence de mesures maximales pour le système de départ ne peut se ramener à l'étude de la chaîne de Markov que si les parties non représentées sont négligeables.

La construction proposée dans cette section est due à Buzzi [Buz97]; c'est une généralisation de la méthode de Hofbauer, qui associe une chaîne de Markov à une transformation monotone par morceaux [Hof79], méthode déjà employée pour les β -shifts [Tak73, Hof78].

Dans la suite, nous désignons par σ la transformation shift, quel que soit l'espace : si \mathcal{A} est un ensemble fini ou dénombrable, le shift unilatéral $\sigma: \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est défini par $\sigma((a_n)_{n \geq 0}) = (a_{n+1})_{n \geq 0}$, et le shift bilatéral $\sigma: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est défini de même par $\sigma((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (a_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

2.1.1 Isomorphisme avec un sous-shift

Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle. On note C_f l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas strictement monotone; c'est un ensemble fermé, qu'on appelle *ensemble des points critiques* de f . Si C est un fermé contenant C_f , la *partition \mathcal{P} associée à C* est l'ensemble des composantes connexes de $I \setminus C$, qui sont des intervalles ouverts. Si $A \in \mathcal{P}$, l'application $f|_A$ est strictement monotone.

Remarque 2.1.1 On prend généralement $C = C_f$. Cependant il peut être intéressant de considérer un ensemble C plus gros, par exemple en ajoutant un nombre fini de points de sorte que le diamètre des éléments de \mathcal{P} soit arbitrairement petit. Si f est monotone par morceaux, C_f et \mathcal{P} sont finis; dans le cas général, \mathcal{P} peut être vide, fini ou dénombrable.

Si $x \in I \setminus C$, il existe un unique élément de \mathcal{P} contenant x ; on le note $\mathcal{P}(x)$. On pose $C^- = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(C)$. On définit l'application *itinéraire*

$$\begin{aligned} \varphi: I \setminus C^- &\longrightarrow \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \\ x &\longmapsto (\mathcal{P}(f^n(x)))_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

L'application φ est continue et $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$.

Soit $H(f) = \{x \in I \setminus C^- \mid \exists y \neq x, \varphi(x) = \varphi(y)\}$; l'application φ est injective sur $I \setminus (C^- \cup H(f))$. Si Σ''_+ est l'image par φ de cet ensemble, on a une bijection $\varphi: I \setminus (C^- \cup H(f)) \rightarrow \Sigma''_+$. L'application réciproque est continue et est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \quad \Sigma''_+ &\longrightarrow I \setminus (C^- \cup H(f)) \\ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto x, \text{ où } \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A_n) \end{aligned}$$

Jérôme Buzzi a montré d'une part que $\Sigma_+ \setminus \Sigma''_+$ est dénombrable, et d'autre part qu'une mesure ergodique non atomique ne charge pas $H(f)$ [Buz97]. Ceci donne l'isomorphisme suivant.

Proposition 2.1.2 (Buzzi) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f . Avec les notations introduites ci-dessus, l'application $\varphi: I \setminus (C^- \cup H(f)) \rightarrow \Sigma''_+$ est inversible bimesurable et $\varphi \circ f = \sigma \circ \varphi$. De plus, Σ''_+ est de mesure 1 dans Σ_+ pour toute mesure sans atome, et $I \setminus (C^- \cup H(f))$ est de mesure 1 dans I pour toute mesure ergodique sans atome ne chargeant pas C .*

On sait contrôler la mesure de C ou C_f dans les cas suivants :

- quand C est dénombrable, il est de mesure nulle pour toute mesure non atomique ;
- si f est C^1 , l'ensemble C_f est négligeable pour toute mesure d'entropie non nulle. Ce résultat se montre à l'aide de l'inégalité de Ruelle-Margulis, qui implique que l'entropie d'une mesure ergodique est inférieure ou égale à son exposant de Lyapounov dès que celui-ci est positif [Rue78].

2.1.2 Diagramme de Markov

Si G est un graphe orienté fini ou dénombrable, on définit Γ_G^+ (resp. Γ_G) l'ensemble des chemins infinis (resp. bi-infinis) sur le graphe G :

$$\begin{aligned} \Gamma_G^+ &= \{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 0, v_n \in G \text{ et } v_n \rightarrow v_{n+1}\}, \\ \Gamma_G &= \{(v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, v_n \in G \text{ et } v_n \rightarrow v_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles ne sont pas compacts si G est infini. La *chaîne de Markov topologique* unilatérale (resp. bilatérale) sur le graphe G est (Γ_G^+, σ) (resp. (Γ_G, σ)), où σ désigne le shift. Notons $h(G)$ l'entropie de Gurevich de cette chaîne de Markov ; elle vérifie le principe variationnel [Gur69], et cette propriété peut être prise comme définition équivalente :

$$h(G) = \sup\{h_\mu(\Gamma_G, \sigma) \mid \mu \text{ mesure } \sigma\text{-ergodique sur } \Gamma_G\}.$$

Quand le graphe est fortement connexe, Gurevich a donné une condition nécessaire et suffisante (en termes combinatoires sur le nombre de chemins) pour l'existence d'une mesure maximale [Gur70] ; en particulier, il existe au plus une mesure ergodique maximale. Comme une mesure ergodique est nécessairement supportée par une composante connexe C (ou plus exactement par Γ_C), on en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.1.3 *Soit G un graphe orienté dénombrable. Si μ est une mesure ergodique maximale pour (Γ_G, σ) , il existe une composante connexe C de G telle que μ est supportée par Γ_C et $h(C) = h(G)$. Réciproquement, si C est une composante connexe de G , il existe au plus une mesure ergodique maximale supportée par Γ_C .*

Nous allons maintenant expliquer comment associer une chaîne de Markov au sous-shift Σ défini précédemment.

Si A_0, \dots, A_n sont des éléments de \mathcal{P} , on définit

$$[A_0 \dots A_n]_f = \{x \in I \mid f^k(x) \in A_k, 0 \leq k \leq n\} = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(A_k).$$

On peut montrer que $[A_0 \dots A_n]_f$ est un intervalle ouvert, et f^n est strictement monotone sur $[A_0 \dots A_n]_f$. Remarquons que $[A_0 \dots A_n]_f$ est non vide si et seulement si $A_0 \dots A_n$ est un mot de Σ_+ .

Soit $\alpha = A_{-n} \dots A_0$ et $\beta = B_{-m} \dots B_0$ deux mots de Σ_+ . On dit que α et β sont *équivalents*, et on note $\alpha \approx \beta$, s'il existe $0 \leq k \leq \min\{n, m\}$ tel que

$$A_{-k} \dots A_0 = B_{-k} \dots B_0 ; \quad (2.1)$$

$$f^k([A_{-k} \dots A_0]_f) = f^n([A_{-n} \dots A_0]_f) = f^m([B_{-m} \dots B_0]_f). \quad (2.2)$$

Si k est l'entier minimal tel que $A_{-n} \dots A_0 \approx A_{-k} \dots A_0$, alors $A_{-k} \dots A_0$ est appelé la *partie significative* de $A_{-n} \dots A_0$. Deux mots de Σ_+ sont équivalents si et seulement s'ils ont la même partie significative.

On définit le graphe orienté D de la façon suivante :

- les sommets de D sont les mots de Σ_+ , quotientés par la relation d'équivalence \approx ;
- il y a une arête $\alpha \rightarrow \beta$ si et seulement s'il existe A_{-n}, \dots, A_0, A_1 des éléments de \mathcal{P} tels que $\alpha = A_{-n} \dots A_0 / \approx$ et $\beta = A_{-n} \dots A_0 A_1 / \approx$.

Le graphe D est appelé le *diagramme de Markov* associé à f relativement à C .

Si $A_{-n} \dots A_0$ est un mot de Σ_+ et $\alpha = A_{-n} \dots A_0 / \approx$, on définit la partie significative de α comme étant celle de $A_{-n} \dots A_0$ (ce qui ne dépend pas du représentant dans la classe d'équivalence), et on pose

$$\langle \alpha \rangle = \langle A_{-n} \dots A_0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f^n([A_{-n} \dots A_0]_f) = \bigcap_{i=0}^n f^i(A_{-i}).$$

De façon informelle, l'ensemble $\langle A_{-n} \dots A_0 \rangle$ représente les points de A_0 dont le « passé » est $A_{-n} \dots A_{-1}$. La partie significative de α est le passé minimum nécessaire pour connaître $\langle \alpha \rangle$, et donc le futur des points de $\langle \alpha \rangle$.

On a une application naturelle

$$\begin{aligned} \psi: \quad \Sigma_+ &\longrightarrow \Gamma_D^+ \\ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (A_0 \dots A_n / \approx)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

mais ψ ne commute pas avec le shift. Pour remédier à cela, on passe aux extensions naturelles de part et d'autre. On note $\Sigma \subset \mathcal{P}^{\mathbb{Z}}$ l'extension naturelle de Σ_+ ; il est nécessaire de se restreindre au sous-ensemble σ -invariant suivant :

$$\Sigma_0 = \{(A_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma \mid \forall n \in \mathbb{Z}, \exists k_0 \leq n, \forall k \leq k_0, A_k \dots A_n \approx A_{k_0} \dots A_n\}.$$

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_0$, alors $A_k \dots A_n / \approx$ est ultimement constant quand $k \rightarrow -\infty$, de sorte que l'application suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}: \quad \Sigma_0 &\longrightarrow \Gamma_D \\ (A_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \text{ où } \alpha_n = \lim_{k \rightarrow -\infty} A_k \dots A_n / \approx \end{aligned}$$

On a alors :

Proposition 2.1.4 (Buzzi [Buz97]) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f . Avec les notations introduites ci-dessus, l'application $\bar{\psi}: \Sigma_0 \rightarrow \Gamma_D$ est inversible bimesurable et $\bar{\psi} \circ \sigma = \sigma \circ \bar{\psi}$.*

L'ensemble $\Sigma \setminus \Sigma_0$ est appelé la *partie non markovienne* de Σ . Il reste à évaluer son entropie. On rappelle la définition d'entropie topologique (ou entropie de Bowen) d'un ensemble non nécessairement invariant [Bow71].

Définition 2.1.5 Soit X un espace compact métrique muni de la distance d , $T: X \rightarrow X$ une transformation continue et $Y \subset X$. La *boule de Bowen* de centre x , de rayon ε et d'ordre n est définie par $B_n(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon, 0 \leq k < n\}$. Un ensemble $E \subset X$ est (n, ε) -séparé si, pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$, il existe $0 \leq k < n$ tel que $d(T^k x, T^k y) > \varepsilon$. Un ensemble $E \subset X$ est un (n, ε) -recouvrement de Y si $Y \subset \bigcup_{x \in E} B_n(x, \varepsilon)$. On note $s_n(\varepsilon, Y)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n, ε) -séparé inclus dans Y , et $r_n(\varepsilon, Y)$ le cardinal minimal d'un (n, ε) -recouvrement de Y . L'*entropie topologique* de Y est définie par

$$h_{top}(Y, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, Y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon, Y).$$

Dans [Buz97], il est montré que l'entropie de la partie non markovienne est bornée par l'entropie topologique de C .

Proposition 2.1.6 (Buzzi) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle, C un ensemble fermé contenant C_f et Σ le sous-shift correspondant, construit ci-dessus. Pour toute mesure μ σ -ergodique supportée par $\Sigma \setminus \Sigma_0$, on a : $h_\mu(\Sigma \setminus \Sigma_0, \sigma) \leq h_{top}(C, f)$.*

Nous soulignons le fait que $h_{top}(C, f)$ n'est pas égale au supremum des entropies des mesures chargeant C car l'ensemble C n'est pas un fermé invariant. Nous donnerons plus loin une majoration de $h_{top}(C_f, f)$ pour des transformations régulières.

Les applications φ (définie en section 2.1.1) et $\bar{\psi}$ (ci-dessus) identifient partiellement la transformation de l'intervalle f avec un sous-shift, puis ce sous-shift avec une chaîne de Markov. Elles permettent de définir une application d'une partie de Γ_D vers I , de la façon suivante.

On note p la projection canonique de Σ sur Σ_+ , $\mathcal{N} = \bar{\psi}(p^{-1}(\Sigma_+ \setminus \Sigma''_+) \cap \Sigma_0)$, et on définit :

$$\begin{aligned} \pi = \varphi^{-1} \circ p \circ \bar{\psi}^{-1}: \Gamma_D \setminus \mathcal{N} &\longrightarrow I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \\ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto x, \text{ où } \langle \alpha_n \rangle \subset A_n \in \mathcal{P} \text{ et } \{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A_n). \end{aligned}$$

L'application π est bien définie ; elle est mesurable, surjective, et $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_D & \xrightarrow{\bar{\psi}^{-1}} & \Sigma_0 \subset \Sigma & \xrightarrow{p} & \Sigma_+ \\ & & & & \Sigma''_+ & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \\ \pi: \Gamma_D \setminus \mathcal{N} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & & & I \setminus (C_f^- \cup H(f)) \end{array}$$

FIGURE 2.1 – L'application π vue comme composition d'applications.

L'application π n'est évidemment pas inversible mais elle induit cependant une bijection entre les mesures ergodiques de « grande entropie », comme l'énonce le théorème suivant (il est montré avec l'hypothèse $C^{1+\alpha}$ dans [Buz97], mais en fait C^1 suffit).

Théorème 2.1.7 (Buzzi) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle et C un ensemble fermé contenant C_f . On suppose qu'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- i) C est dénombrable ;
- ii) f est C^1 et $C = C_f \cup C_*$, où C_* est un ensemble fini.

On suppose de plus que $h_{\text{top}}(I, f) > h_{\text{top}}(C, f)$. Alors $\nu \mapsto \mu = \pi_\nu$ est une bijection préservant l'entropie entre les mesures σ -ergodiques ν sur Γ_D et les mesures f -ergodiques μ sur I telles que $h_\nu(\Gamma_D, \sigma) > h_{\text{top}}(C, f)$ et $h_\mu(I, f) > h_{\text{top}}(C, f)$. En particulier, $h(D) = h_{\text{top}}(I, f)$ et π induit une bijection entre les mesures maximales ergodiques de f et celles de Γ_D . De plus, \mathcal{N} est de mesure nulle pour toute mesure σ -ergodique ν telle que $h_\nu(\Gamma_D, \sigma) > h_{\text{top}}(C, f)$.*

Une chaîne de Markov est transitive si et seulement le graphe est fortement connexe, de sorte qu'une chaîne de Markov transitive possède au plus une mesure maximale (théorème 2.1.3). Le résultat suivant montre que cette propriété d'unicité se transmet aux transformations transitives de l'intervalle.

Proposition 2.1.8 (Buzzi) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle et C un fermé contenant C_f . On suppose que les hypothèses du théorème 2.1.7 sont satisfaites et que f est transitive. Alors le diagramme de Markov D associé à f relativement à C contient au plus une composante connexe d'entropie strictement supérieure à $h_{\text{top}}(C, f)$. En particulier, f possède au plus une mesure maximale.*

Pour faire le tour des résultats existants, citons le théorème de Buzzi [Buz00], qui montre qu'une transformation $C^{1+\alpha}$ de l'intervalle est bien représentée par une chaîne de Markov dès que son entropie topologique est non nulle (théorème 2.1.9). Deux systèmes (X_1, T_1) et (X_2, T_2) sont dits h -conjugués s'il existe $X'_1 \subset X_1, X'_2 \subset X_2$ et une bijection bimesurable $\varphi: X'_1 \rightarrow X'_2$ tels que $\varphi \circ T_1 = T_2 \circ \varphi$ et, pour $i = 1, 2$,

$$\sup\{h_\mu(X_i, T_i) \mid \mu \in \mathcal{M}^e(X_i, T_i)\} > \sup\{h_\mu(X_i \setminus X'_i, T_i) \mid \mu \in \mathcal{M}^e(X_i \setminus X'_i, T_i)\},$$

où $\mathcal{M}^e(X_i, T_i)$ est l'ensemble des mesures T_i -ergodiques supportées par X_i . On peut montrer qu'une h -conjugaison induit une bijection préservant l'entropie entre les mesures ergodiques d'entropie proche du supremum des entropies métriques.

Théorème 2.1.9 (Buzzi) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, telle que $h_{\text{top}}(I, f) > 0$. Alors il existe un ensemble fermé $C \supset C_f$ tel que l'extension naturelle de (I, f) soit h -conjuguée à (Γ_D, σ) , où D est le diagramme de Markov associé à f relativement à C . En particulier, il y a une bijection entre les mesures maximales de (I, f) et celles de (Γ_D, σ) .*

Dans la preuve de ce résultat, chacune des composantes connexes de $I \setminus C_f$ est redécoupée en un nombre infini d'intervalles. De cette façon, la dérivée de la transformation peut être minorée par un réel non nul sur chacun des intervalles considérés, qui sont d'autant plus petits que la dérivée est proche de zéro. Ce résultat est valable en dimension supérieure sous une hypothèse appelée *entropie-expansivité*.

2.1.3 Exemple de diagrammes de Markov

Nous allons illustrer la construction du diagramme de Markov d'une transformation de l'intervalle f . Le diagramme de Markov se décompose en étages, on définit l'étage de hauteur n comme étant

$$D_n = \{\alpha \in D \mid \exists k \leq n, \exists A_0, \dots, A_k \in \mathcal{P}, \alpha = A_0 \dots A_k / \approx\}.$$

On a $D_0 = \mathcal{P}$ (formellement, $D_0 = \mathcal{P}/\approx$, qui s'identifie à \mathcal{P}). Pour savoir quelles sont les arêtes partant de $A \in \mathcal{P}$ dans le graphe D , on considère $f(A)$ et on l'intersecte avec les éléments de \mathcal{P} . Si $B \in \mathcal{P}$ est tel que $B \subset f(A)$, alors on a une arête $A \rightarrow B$; si $B \cap f(A) \neq \emptyset$ mais $B \not\subset f(A)$ alors $AB \in D_1 \setminus D_0$ et $A \rightarrow AB/\approx$. De cette façon, on obtient l'ensemble des arêtes partant de D_0 et l'ensemble des sommets de D_1 .

De même, si $A_0 \dots A_n/\approx \in D_n$ et $A_{n+1} \in \mathcal{P}$, il y a une arête $A_0 \dots A_n/\approx \rightarrow A_0 \dots A_n A_{n+1}/\approx$ si et seulement si $A_{n+1} \cap f(\langle A_0 \dots A_n \rangle) \neq \emptyset$. Le sommet $A_0 \dots A_n A_{n+1}/\approx$ peut être identifié à un sommet de D_n déjà construit. Les arêtes partant de D_n et les sommets de $D_{n+1} \setminus D_n$ sont obtenus exhaustivement de cette manière.

La figure 2.2 représente une transformation de l'intervalle g monotone par morceaux et les premiers niveaux de son diagramme de Markov (relativement à C_g). Dans [Hof79], Hofbauer

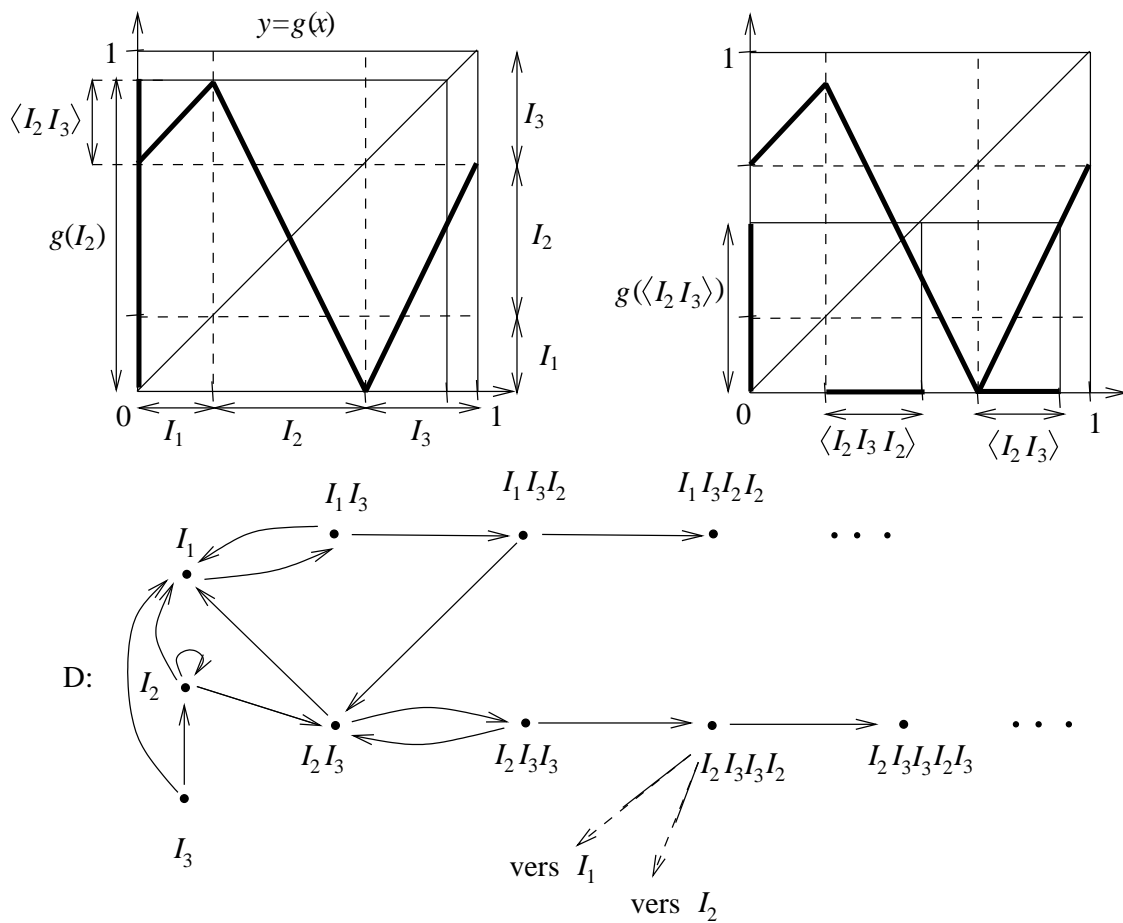


FIGURE 2.2 – Diagramme de Markov de la transformation g . Pour visualiser les arêtes partant du sommet I_2 dans D , on décompose $g(I_2) = I_1 \cup I_2 \cup \langle I_2 I_3 \rangle$; à droite on a représenté $g(\langle I_2 I_3 \rangle) = I_1 \cup \langle I_2 I_3 I_2 \rangle$. En dessous figurent les premiers niveaux du diagramme de Markov D de g .

associe un graphe de Markov aux transformations continues par morceaux monotones par morceaux. Les sommets du graphe sont les $\langle w \rangle$, avec w mot de Σ . Cette construction est différente de celle présentée ici, pour laquelle des sommets distincts peuvent avoir la même représentation sur l'intervalle, par exemple $\langle I_1 I_3 \rangle = \langle I_2 I_3 \rangle$ mais $I_1 I_3 \not\approx I_2 I_3$ dans l'exemple de la figure 2.2.

2.2 Transformations monotones par morceaux

Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle monotone par morceaux (c'est-à-dire que C_f est fini) d'entropie topologique non nulle. On considère la partition \mathcal{P} associée à C_f , Σ_+ le sous-shift correspondant et D le diagramme de Markov de f relativement à C_f (voir la section 2.1). L'ensemble C_f est fini, de sorte qu'une mesure sans atome ne charge pas C_f , et on a également $h_{\text{top}}(C_f, f) = 0 < h_{\text{top}}(I, f)$. Ainsi, l'étude des mesures maximales ergodiques de f se ramène à celles de Σ_+ (grâce à la proposition 2.1.2) ou à celles de Γ_D (théorème 2.1.7).

L'existence d'une mesure maximale peut se déduire directement des propriétés de (Σ_+, σ) . En effet, un sous-shift est expansif, et on sait qu'un système expansif possède au moins une mesure maximale [DGS76], donc il possède également une mesure maximale ergodique. Par conséquent, f admet au moins une mesure maximale ergodique ; si f est transitive, la mesure maximale de f est unique par la proposition 2.1.8.

Si f n'est pas transitive, il faut considérer les composantes connexes de D , qui sont au plus en nombre dénombrable. Le résultat suivant énonce que l'entropie à l'infini du graphe D est nulle [Hof79].

Lemme 2.2.1 (Hofbauer) *Soit f une transformation de l'intervalle monotone par morceaux et D le diagramme de Markov associé à f relativement à C_f . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(D \setminus D_n) = 0$.*

Comme \mathcal{P} est fini, le sous-graphe D_n est également fini donc il rencontre un nombre fini de composantes connexes ; les autres composantes connexes sont incluses dans $D \setminus D_n$. Pour n assez grand, le lemme 2.2.1 dit que $h(D \setminus D_n) < h(D)$, ce qui implique que le nombre de composantes connexes d'entropie égale à $h(D)$ est fini. Or chacune d'elles supporte au plus une mesure maximale ergodique (théorème 2.1.3). On en déduit que le nombre de mesures maximales ergodiques sur Γ_D est fini, donc il en est de même pour f par le théorème 2.1.7.

Remarque 2.2.2 La preuve d'existence de mesures maximales peut se faire en considérant uniquement le diagramme de Markov. La structure du graphe D – qui est non ramifié à l'infini, et dont l'entropie à l'infini est nulle – permet d'exhiber « à la main » une mesure maximale pour chaque composante connexe en étudiant la matrice d'incidence du graphe. Ceci est fait dans [Hof86].

Les résultats ci-dessus donnent le théorème suivant.

Théorème 2.2.3 (Hofbauer) *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation de l'intervalle continue et monotone par morceaux. Si $h_{\text{top}}(I, f) > 0$, alors f admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques ; si de plus f est transitive, la mesure maximale est unique.*

Remarque 2.2.4 Dans [Hof79], Hofbauer étudie en fait les transformations continues par morceaux monotones par morceaux. Le théorème 2.2.3 reste valable dans cette situation.

2.3 Transformations C^r

Si r est un réel positif, une fonction f est dite C^r si f est C^n et $f^{(n)}$ est α -höldérienne avec $n = [r]$ et $\alpha = r - n \in [0, 1[$. Nous avons montré une condition suffisante pour l'existence d'une mesure maximale pour une transformation C^r de l'intervalle, $r \geq 1$. Ce résultat utilise la notion d'entropie locale, que nous introduisons ci-dessous. Puis nous présentons les points clés permettant de prouver ce critère. Les résultats de cette section sont tirés de [7], [1] et [4].

2.3.1 Entropie locale

La notion d'*entropie locale* apparaît dans [New89] et [Buz97]; elle s'inspire des idées de Bowen [Bow72]. Nous renvoyons à la définition 2.1.5 pour les définitions de $B_n(x, \varepsilon)$ et $r_n(\delta, Y)$.

Définition 2.3.1 Soit $T: X \rightarrow X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X . L'*entropie locale* de (X, T) est définie par $h_{loc}(X, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{loc}(X, T, \varepsilon)$, où

$$h_{loc}(X, T, \varepsilon) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_{x \in X} r_n(\delta, B_n(x, \varepsilon)).$$

L'intérêt de l'entropie locale est qu'elle borne le défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique ([Buz97], d'après [New89]).

Proposition 2.3.2 Soit $T: X \rightarrow X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X . Si $(\mu_n)_{n \geq 0}$ est une suite de mesures invariantes convergeant vers μ , alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{\mu_n}(X, T) \leq h_{\mu}(X, T) + h_{loc}(X, T).$$

Dans [Kat80], Katok montre que l'entropie d'une mesure ergodique est donnée par une formule analogue à celle de Bowen. L'entropie locale permet également de borner la différence entre l'entropie métrique et son approximation dans la formule de Katok.

Théorème 2.3.3 (formule de Katok) Soit $T: X \rightarrow X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X et μ une mesure ergodique. La quantité

$$h_{\mu}(X, T, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\substack{Y \subset X \\ \mu(Y) \geq \lambda}} r_n(\varepsilon, Y)$$

est indépendante du choix de $\lambda \in]0, 1[$, et $h_{\mu}(X, T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\mu}(X, T, \varepsilon)$.

Lemme 2.3.4 Soit $T: X \rightarrow X$ une transformation continue sur un espace métrique compact X et μ une mesure ergodique. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$h_{\mu}(X, T) \leq h_{\mu}(X, T, \varepsilon) + h_{loc}(X, T, \varepsilon).$$

Si X est une variété riemannienne, l'entropie locale peut être majorée à l'aide de la dimension de X , de la norme de la différentielle et de l'ordre de différentiabilité de T . Ce résultat est montré de façons différentes dans [New89, Yom87] et [Buz97]. Nous l'énonçons dans le cadre restreint des transformations de l'intervalle.

Proposition 2.3.5 Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^r de l'intervalle, où $r \geq 1$ est un réel. Alors $h_{loc}(I, f) \leq \frac{1}{r} \log \|f'\|_{\infty}$.

2.3.2 Existence d'une mesure maximale

Soit D le diagramme de Markov associé à f relativement au fermé $C = C_f \cup C_*$, où C_* est un ensemble fini (qui servira à avoir des éléments de \mathcal{P} de diamètre plus petit qu'une constante donnée). Si $F \subset D$, le cylindre $[F]$ est défini par $[F] = \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \Gamma_D \mid \alpha_0 \in F\}$.

Nous considérons une suite de mesures ergodiques sur Γ_D qui chargent de moins en moins chaque sous-ensemble fini de sommets et dont l'entropie est minorée par $h_{top}(C_f, f)$. Nous avons

montré que ces mesures chargent de moins en moins le sous-graphe D_N quand N tend vers l'infini (proposition 2.3.6), puis nous avons montré, sous une hypothèse sur la partition, que l'entropie de ces mesures est bornée (proposition 2.3.7). Rappelons que

$$D_N = \{\alpha \in D \mid \exists k \leq N, \exists A_0, \dots, A_k \in \mathcal{P}, \alpha = A_0 \dots A_k / \approx\}.$$

C'est une suite croissante vers D ; ces ensembles sont infinis dès que \mathcal{P} est infini.

Proposition 2.3.6 *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^1 de l'intervalle et C_* un sous-ensemble fini de I . On considère le diagramme de Markov D associé à f relativement à $C = C_f \cup C_*$. Soit $(\nu_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures ergodiques sur Γ_D telles que $h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) > h_{top}(C_f, f)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n([F]) = 0$ pour tout sous-ensemble fini de sommets $F \subset D$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n([D_N]) = 0$ pour tout entier N .*

Proposition 2.3.7 *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^1 . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ satisfaisant la propriété suivante. On définit $C_* = I \cap \delta\mathbb{Z}$ et on considère le diagramme de Markov D associé à f relativement à $C = C_f \cup C_*$. Soit $(\nu_n)_{n \geq 0}$ une suite de mesures ergodiques sur Γ_D telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n([F]) = 0$ pour tout sous-ensemble fini de sommets $F \subset D$. On a alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f) + \varepsilon.$$

Ce résultat nous a permis un critère d'existence et de finitude de mesures maximales pour une transformation C^1 de l'intervalle.

Théorème 2.3.8 *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^1 de l'intervalle telle que $h_{top}(I, f) > h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f)$. Alors f admet une mesure maximale. De plus, le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et, si f est transitive, la mesure maximale est unique.*

Idée de la preuve. On montre en fait le résultat suivant :

Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^1 de l'intervalle telle que $h_{top}(I, f) > h_{top}(C_f, f)$.

Si f n'a pas de mesure maximale ergodique, ou si f admet une infinité de mesures maximales ergodiques distinctes, alors $h_{top}(I, f) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f)$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ le réel donné par la proposition 2.3.7, $C_* = I \cap \delta\mathbb{Z}$, $C = C_f \cup C_*$ et D le diagramme de Markov correspondant. Par hypothèse, $h_{top}(I, f) > h_{top}(C_f, f) = h_{top}(C, f)$ donc $h_{top}(I, f) = h(D)$ et il y a une bijection entre les mesures maximales ergodiques de (I, f) et celles de (Γ_D, σ) par le théorème 2.1.7.

On suppose tout d'abord que f n'a pas de mesure maximale ergodique. Ainsi, Γ_D n'a pas de mesure maximale ergodique non plus. Dans cette situation, le point clé consiste à montrer qu'il existe une suite de mesures ergodiques $(\nu_n)_{n \geq 0}$ telles que $h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) \rightarrow h(D)$ et pour tout ensemble fini de sommets $F \subset D$, la mesure $\nu_n([F])$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. La proposition 2.3.7 donne alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f) + \varepsilon,$$

ce qui donne $h_{top}(I, f) = h(D) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f) + \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$h_{top}(I, f) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f),$$

ce qui est le résultat souhaité.

On suppose maintenant que f admet une infinité de mesures maximales ergodiques distinctes, qu'on note $(\mu_n)_{n \geq 0}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit ν_n comme étant la mesure sur Γ_D

correspondant à μ_n par le théorème 2.1.7; on a $h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) = h_{\mu_n}(I, f) = h_{top}(I, f)$. Les ν_n sont des mesures maximales ergodiques distinctes. Par le théorème 2.1.3, il existe des composantes connexes C_n de D telles que ν_n est supportée par Γ_{C_n} et $h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) = h(C_n) = h(D)$ pour tout n . Ainsi, ν_n est une mesure maximale de Γ_{C_n} ; de plus, les composantes connexes C_n sont distinctes, et donc disjointes, si bien que les $C_n \ll$ tendent vers l'infini » dans D . On peut alors montrer que pour tout ensemble fini de sommets $F \subset D$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n([F]) = 0$. La proposition 2.3.7 donne alors

$$h_{top}(I, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{\nu_n}(\Gamma_D, \sigma) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f) + \varepsilon.$$

Comme précédemment, on fait tendre ε vers 0 et on obtient

$$h_{top}(I, f) \leq h_{top}(C_f, f) + h_{loc}(I, f).$$

Ceci termine la preuve du résultat ci-dessus.

Par contraposée, si f satisfait les hypothèses du théorème, alors elle admet une mesure maximale, et le nombre de mesures maximales ergodiques distinctes est fini. Enfin, l'unicité en cas de transitivité provient de la proposition 2.1.8. \square

J. Buzzi a montré que l'entropie de l'ensemble des zéros de la dérivée (qui contient C_f) est inférieure ou égale à $\frac{1}{r} \log \|f'\|_\infty$ si la transformation f est C^r [Buz97]. Cette majoration et celle de l'entropie locale donnée précédemment conduisent à un critère plus facile à vérifier :

Corollaire 2.3.9 *Soit $f: I \rightarrow I$ une transformation C^r de l'intervalle, où $r \geq 1$ est un réel. Si $h_{top}(I, f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty$, alors f admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques.*

Remarque 2.3.10 On a toujours $h_{top}(I, f) \leq \log \|f'\|_\infty$ [DGS76], donc ce corollaire n'est intéressant que pour $r > 2$. Dans [Buz97], il est montré que le nombre de mesures maximales est fini si f est C^r avec $r > 1$ et $h_{top}(I, f) > \frac{1}{r} \log \|f'\|_\infty$. Le résultat de finitude du corollaire 2.3.9 est donc plus faible.

Le corollaire 2.3.9 permet de retrouver le résultat, déjà connu, disant qu'une transformation C^∞ de l'intervalle admet un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques dès que son entropie est non nulle [Buz97].

2.3.3 Transformations C^r sans mesure maximale

Dans [Buz97], Buzzi construit une transformation de l'intervalle f qui est C^r ($1 \leq r < +\infty$) et qui a une infinité de composantes transitives mais aucune d'entropie maximale, si bien que f n'a pas de mesure maximale. Il ébauche également, sans entrer dans les détails, la construction d'une transformation de l'intervalle C^r d'entropie non nulle qui a une unique composante transitive (*a priori* un ensemble de Cantor) mais qui n'admet aucune mesure maximale. Nous avons construit, pour tout entier $r \geq 1$, une transformation de l'intervalle transitive (et même mélangeante) et C^r qui n'a pas de mesure maximale [1]. Cette famille d'exemples s'inspire de ceux de Buzzi, la différence essentielle est que le système est ici transitif sur l'intervalle tout entier. De plus, une erreur dans un résultat de [Sal88] utilisé dans [Buz97] nécessite de se baser sur un autre résultat de [Sal88].

Voici une description du cœur de la dynamique de cet exemple. On fixe un entier $r \geq 1$. L'application $f_r: [0, 4] \rightarrow [0, 4]$ que nous avons construite est C^∞ partout sauf au point 1 où elle est seulement C^r ; elle est constituée d'un nombre dénombrable de morceaux monotones. Elle est

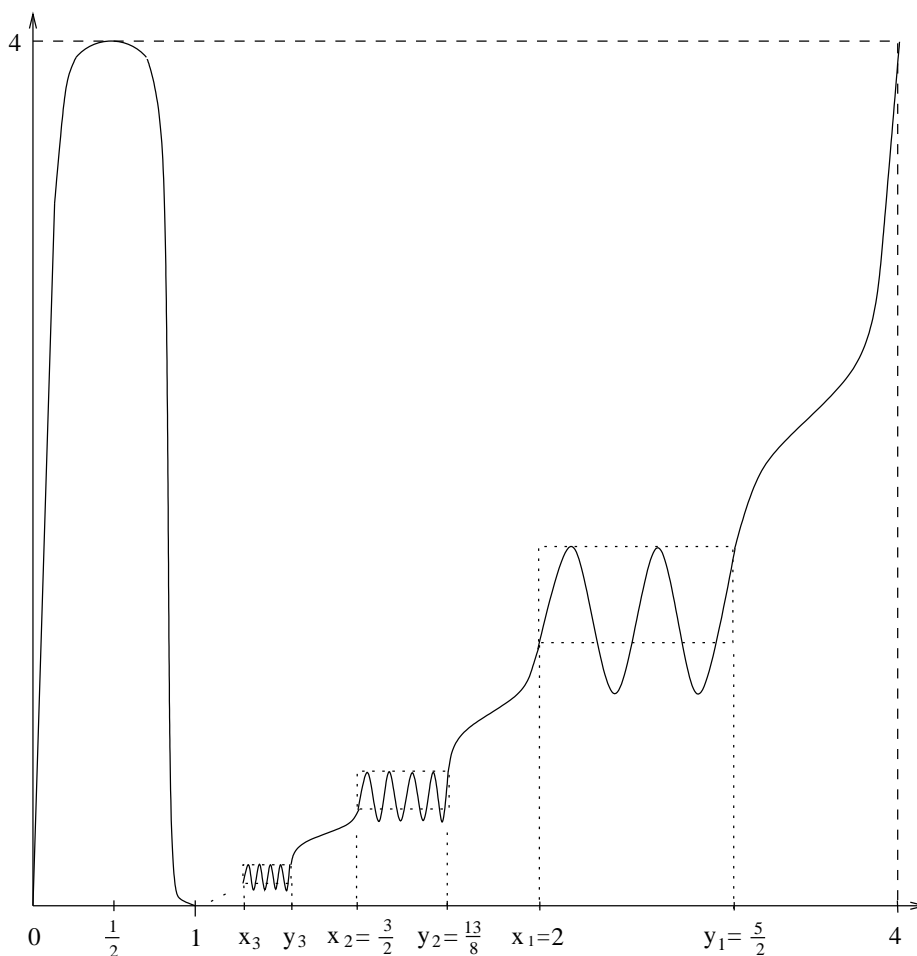


FIGURE 2.3 – Graphe de f_r (l'échelle n'est pas respectée). Les rectangles en pointillés au dessus de $[x_n, y_n]$ ont pour ordonnées $[\lambda^{-nr} x_n, \lambda^{-nr} y_n]$.

représentée en figure 2.3. Près de 0, f_r est linéaire de pente λ^r (pour un λ fixé assez grand). Des intervalles $[x_n, y_n]$ s'accroissent à droite de 1. Sur $[x_n, y_n]$, f_r a M_n oscillations, avec $M_n \simeq \frac{\lambda^n}{n^2}$. Le point x_n a pour image $\lambda^{-nr} x_n$, son orbite reste pendant un temps n dans la partie linéaire près de 0, de sorte qu'on a $f_r^2(x_n) = \lambda^{-(n-1)r} x_n$, $f_r^3(x_n) = \lambda^{-(n-2)r} x_n$, ..., $f_r^n(x_n) = \lambda^{-r} x_n$, $f_r^{n+1}(x_n) = x_n$. Ainsi, x_n est périodique de période $n + 1$. De même, $f_r(y_n) = \lambda^{-nr}(y_n)$ et y_n est périodique de période $n + 1$. Ainsi, l'intervalle $[x_n, y_n]$ se recouvre lui-même par l'action de f_r^{n+1} , et f_r^{n+1} a un M_n -fer à cheval sur $[x_n, y_n]$. Notons que $f_r^{n+1}([x_n, y_n])$ n'est pas inclus dans $[x_n, y_n]$ (sur le dessin, on voit que le graphe de f_r dépasse du rectangle au dessus de $[x_n, y_n]$), sinon f_r ne pourrait pas être transitive. De plus, le fait d'écraser d'un facteur λ^{-nr} l'intervalle $[x_n, y_n]$ contenant moins de λ^n oscillations permet d'obtenir une régularité C^r en 1. Comme l'essentiel de la dynamique se trouve dans ces fers à cheval, on montre que

$$h_{top}(f_r) = \sup_{n \geq 1} \frac{\log M_n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M_n}{n + 1} = \log \lambda.$$

Il est important que ce sup soit une limite : on peut supprimer la dynamique sur l'intervalle $[x_1, y_1]$ ou au contraire ajouter un intervalle sans changer cette limite.

On peut faire en sorte que f_r soit markovienne relativement à une partition dénombrable. Soit G son graphe de Markov. Les propriétés précédentes se traduisent par : $h(G) = \log \lambda$ et il existe des sous-graphes disjoints H_n tels que $h(H_n) = \frac{\log M_n}{n+1}$. De plus, il existe un graphe

G' contenant strictement G avec $h(G) = h(G')$ (G' est le graphe de Markov de l'application à laquelle on a « ajouté » un intervalle $[x_0, y_0]$, ce qui revient à ajouter un sous-graphe H_0 à G). Un résultat de Salama dit qu'un graphe fortement connexe G pouvant être strictement inclus dans un graphe de même entropie est transient [Sal88], donc G n'a pas de mesure maximale [Gur69, Gur70]. On en déduit que la transformation f_r n'a pas de mesure maximale non plus.

Il est assez facile de définir f_r de sorte que son graphe de Markov soit fortement connexe (et donc que la chaîne de Markov associée soit transitive). Montrer qu'on peut réellement construire f_r de façon à ce qu'elle soit transitive et C^r est en revanche technique.

On sait que l'entropie locale borne le défaut de semi-continuité supérieure de l'entropie métrique et que $h_{loc}(f_r) \leq \frac{1}{r} \log \|f_r'\|_\infty$ si f est C^r . Dans notre exemple, ces deux bornes sont atteintes car $h_{loc}(f_r) = \frac{1}{r} \log \|f_r'\|_\infty$ est exactement le défaut de semi-continuité supérieure. De plus, $h_{loc}(f_r) = h_{top}(f_r)$ et $h_{top}(C_f, f) = 0$.

Par ailleurs, cet exemple nous a permis de montrer qu'il existe des transformations de l'intervalle qui ne sont mesurablement conjuguées à aucune transformation C^∞ [4]. En effet, on sait qu'une transformation C^∞ admet toujours une mesure maximale, et l'existence d'une mesure maximale est conservée par conjugaison mesurable (on dit que deux systèmes (X, T) et (Y, S) sont mesurablement conjugués s'il existe une bijection bimesurable $h: X \rightarrow Y$ telle que $h \circ T = S \circ h$).

Remarque 2.3.11 On conjecture qu'une transformation $C^{1+\alpha}$ a une mesure maximale dès que $h_{top}(f) > h_{loc}(f)$, autrement dit la quantité $h_{top}(C_f, f)$ serait inutile dans le théorème 2.3.8. La transformation f_r est sans mesure maximale et vérifie $h_{top}(f) = h_{loc}(f)$, ce qui montre qu'on ne peut pas espérer mieux. Par contre on ne connaît pas d'exemple au moins C^1 avec $h_{top}(C_f, f) > 0$. Dans [3], nous avons montré qu'une chaîne de Markov topologique sur G a une mesure maximale si $h(G) > h_{loc}(\Gamma_G, \sigma)$, ce qui renforce cette conjecture.

Chapitre 3

Ensemble de rotation pour des transformations de graphes topologiques

Le but de ce chapitre est de généraliser la théorie des rotation sur le cercle à certains graphes topologiques contenant une boucle, et d'exposer les relations entre l'ensemble de rotation et les points périodiques. Les résultats obtenus rappellent ceux du cercle, néanmoins ils ne permettent pas de caractériser complètement l'ensemble des périodes des transformations de degré 1 ; cette caractérisation est l'objet de recherches futures. Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Lluís Alsedà [8].

3.1 Théorie de rotation sur le cercle

Soit $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ la projection canonique. Pour définir le degré d'une transformation continue $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, il est nécessaire de se placer dans \mathbb{R} , revêtement universel du cercle, et de considérer un relèvement de f , c'est-à-dire une application continue $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\pi \circ F = f \circ \pi$, où $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$ est la projection canonique. Il n'existe pas un unique relèvement, mais si F' est un autre relèvement de f , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $F' = F + k$. Il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+1) = F(x) + d$. Cet entier est appelé le degré de f ; il ne dépend pas du relèvement choisi.

La théorie de rotation concerne les applications de degré 1. Tout d'abord, Poincaré a introduit le nombre de rotation d'un homéomorphisme f du cercle dans lui-même, de degré 1 [Poi52] : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe et ne dépend pas du point x . Le nombre de rotation de f est égal à cette limite prise modulo 1 (de cette façon, elle ne dépend pas du relèvement choisi). Si $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ est simplement une application continue de degré 1, il n'existe généralement pas un unique nombre de rotation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$\rho_F(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_F(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}.$$

Si la limite existe, on la note $\rho_F(x)$ et on l'appelle le nombre de rotation de x . L'ensemble de rotation de F est $\text{Rot}(F) = \{\rho_F(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } \rho_F(x) \text{ existe}\}$; c'est un intervalle compact [Ito81]. De plus, $\text{Rot}(F) = \{\rho_F(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\bar{\rho}_F(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Si F' est un autre relèvement de f avec $F' = F + k$ alors $\text{Rot}(F') = \text{Rot}(F) + k$.

Soit $\hat{x} \in \mathbb{S}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\pi(x) = \hat{x}$. Le point \hat{x} est périodique pour f si et seulement si x est périodique (mod 1) pour F , c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$ tels que $F^q(x) = x + p$. Dans

ce cas, son nombre de rotation est rationnel et vaut $\rho_F(x) = p/q$. Misiurewicz a déterminé les périodes des points périodiques ayant un nombre de rotation donné ; ceci permet de caractériser l'ensemble des périodes d'une transformation du cercle de degré 1 [Mis82].

Théorème 3.1.1 (Misiurewicz) *Soit $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ une application continue de degré 1 et F un relèvement de f . On écrit $\text{Rot}(F) = [a, b]$. Soit $p/q \in [a, b]$ un rationnel sous forme irréductible. Alors il existe un point périodique (mod 1) pour F de nombre de rotation p/q . Plus précisément :*

- si $p/q \in]a, b[$, pour tout entier $n \geq 1$ il existe un point périodique (mod 1) de période nq et de nombre de rotation p/q ;
- si $p/q = a$ ou b , il existe $s \in \mathbb{N}^* \cup \{2^\infty\}$ tel que, pour tout entier $n \geq s$ (où \geq désigne l'ordre de Sharkovskii), il existe un point périodique (mod 1) de période nq et de nombre de rotation p/q .

Définition 3.1.2 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, et $s \in \mathbb{N}^* \cup \{2^\infty\}$. On définit les ensembles suivants :

- $M(a, b) = \{q \in \mathbb{N}^* \mid \exists p \in \mathbb{Z}, p/q \in]a, b[\}$.
- $S(a, s) = \emptyset$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $S(a, s) = \{nq \mid n \geq s\}$ si $a = p/q$ est écrit sous forme irréductible.
- $\text{Per}(f)$ est l'ensemble des entiers qui sont la période d'un point périodique de f .

Théorème 3.1.3 (Misiurewicz) *Soit $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ une application continue de degré 1, F un relèvement de f et $\text{Rot}(F) = [a, b]$. Alors il existe $s_a, s_b \in \mathbb{N}^* \cup \{2^\infty\}$ tels que*

$$\text{Per}(f) = S(a, s_a) \cup M(a, b) \cup S(b, s_b).$$

Remarque 3.1.4 Comme dans le cas des transformations de l'intervalle, des liens étroits existent également entre les points périodiques et l'entropie topologique de f . En particulier, l'entropie de f est strictement positive si et seulement si $\text{Rot}(F)$ n'est pas réduit à un point, ou si $\text{Rot}(F) = \{p/q\}$ et $\text{Per}(f) = S(p/q, s)$ avec s n'étant pas une puissance de 2. Ceci se déduit de la présence de «fer à cheval» dans un cas, et des résultats sur l'intervalle dans l'autre.

Dans [9], nous avons montré un résultat sur les points périodiques de nombre de rotation 0 dans une direction différente des théorèmes ci-dessus. Si F a une orbite périodique de diamètre supérieur à 1, alors F a des points périodiques de toutes les périodes, et donc f aussi. Il s'agit d'une vraie orbite périodique pour F , et non d'une période (mod 1), ce qui revient à dire que c'est une orbite périodique (mod 1) de nombre de rotation 0. Le fait que le diamètre de l'orbite pour F est plus grand que 1 signifie pour f que l'orbite périodique s'étale sur plus d'un tour sur le cercle. Ce résultat est en fait vrai pour toute transformation du cercle de degré $d \geq 1$. Des exemples montrent qu'il n'est pas vrai en degré $d \leq 0$.

Proposition 3.1.5 *Soit $f: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ une application continue de degré $d \geq 1$ et $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de f . S'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $p \geq 1$ tels que $F^p(x) = x$ et $\text{diam}(\{F^k(x) \mid 0 \leq k \leq p\}) > 1$, alors F a des points périodiques de période n pour tout entier $n \geq 1$.*

Ce travail, en plus de son intérêt propre, éclairera peut-être le comportement des transformations de degré 1 de graphes contenant une boucle. En particulier, pour les relevés de transformations du graphe σ , il semble que les orbites de diamètre supérieur à 1 forcent l'existence de toutes les périodes (mod 1) supérieures ou égales à 2.

3.2 Définitions

3.2.1 Espaces relevés

Le revêtement universel d'un graphe topologique ayant une unique boucle est un arbre infini contenant un unique sous-espace homéomorphe à \mathbb{R} , comme sur la figure 3.1. Il s'avère que la

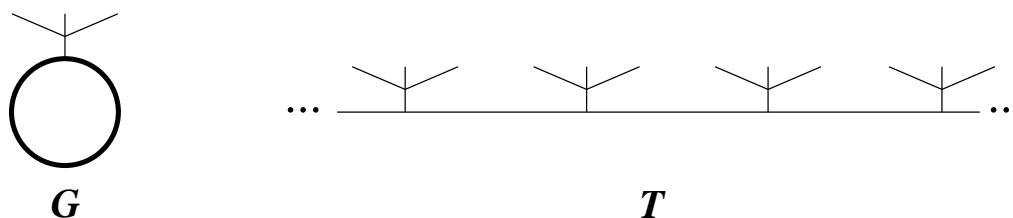


FIGURE 3.1 – À gauche un graphe topologique G avec une unique boucle, à droite son revêtement universel T .

théorie de rotation qu'on peut définir sur un tel espace peut aisément être étendue à une plus large famille d'espaces, que nous appellerons *espaces relevés*. Avant de donner leur définition, expliquons comment sont obtenus ces espaces. Si on part d'un graphe topologique X contenant une boucle S (c'est-à-dire un lacet non trivial dans le groupe d'homotopie), on peut le «développer» par rapport à cette boucle, comme représenté sur les figures 3.2 et 3.3. Ceci

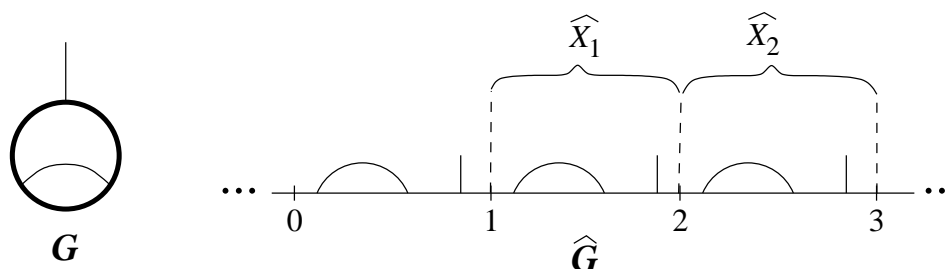


FIGURE 3.2 – \widehat{G} est le graphe infini obtenu en développant le graphe G par rapport à la boucle en gras; \widehat{G} n'est pas un espace relevé, on ne peut pas le rétracter sur la droite réelle en raison des arcs joignant deux points réels distincts.

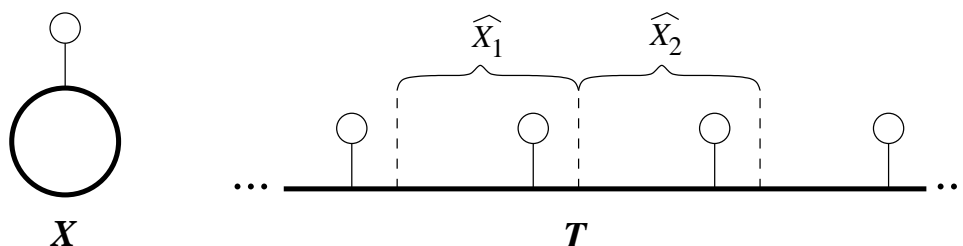


FIGURE 3.3 – T est le développement de X , c'est un espace relevé.

donne un nouvel espace \widehat{X} , qui contient un sous-espace homéomorphe à \mathbb{R} (sous-ensemble que nous identifions avec \mathbb{R}) et «invariant par translation». Plus précisément, \widehat{X} est un revêtement de X muni d'une projection canonique $\pi: \widehat{X} \rightarrow X$ vérifiant $\pi^{-1}(S) = \mathbb{R}$, et \widehat{X} est la réunion de sous-espaces fermés $(\widehat{X}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ homéomorphes entre eux tels que $\widehat{X}_n \cap \mathbb{R} = [n, n+1]$ et $\pi: \widehat{X}_n \rightarrow X$ est surjective. Les exemples des figures 3.2 et 3.3 présentent une différence importante : l'espace T peut être «rétracté» sur \mathbb{R} (en envoyant chaque composante connexe de $T \setminus \mathbb{R}$ sur sa racine

dans \mathbb{R} , qui est réduite à un point), ce qui n'est pas le cas de \widehat{G} . Cette propriété est essentielle dans ce qui suit, ce qui nous a menés à poser la définition d'espace relevé suivante.

Définition 3.2.1 Un espace métrique connexe $T \supset \mathbb{R}$ est appelé un *espace relevé* si :

- i) il existe un homéomorphisme $\tau: T \rightarrow T$ tel que $\tau(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- ii) la fermeture de toute composante connexe de $T \setminus \mathbb{R}$ est un compact qui intersecte \mathbb{R} en un unique point,
- iii) le nombre de composantes connexes C de $T \setminus \mathbb{R}$ telles que $\overline{C} \cap [0, 1] \neq \emptyset$ est fini.

La classe des espaces relevés sera notée \mathbf{T} , et la sous-famille des espaces $T \in \mathbf{T}$ tels que $\{x \in T \mid 0 \leq r(x) \leq 1\}$ est un graphe fini sera notée \mathbf{T}° .

Il est naturel de visualiser τ comme une « translation par 1 » dans tout l'espace T . Pour simplifier les notations dans la suite, nous écrirons $x + 1$ au lieu de $\tau(x)$ pour tout $x \in T$, et de même $x + m$ désignera $\tau^m(x)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

La définition d'espace relevé permet de définir une rétraction naturelle de T sur \mathbb{R} . Elle sera utilisée comme instrument de mesure des déplacements vers la gauche ou vers la droite, ainsi que pour localiser des points dans $T \setminus \mathbb{R}$.

Définition 3.2.2 Soit $T \in \mathbf{T}$. La *rétraction* de T sur \mathbb{R} est l'application $r: T \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

- si $x \in \mathbb{R}$, $r(x) = x$,
- si $x \notin \mathbb{R}$, soit C la composante connexe de $T \setminus \mathbb{R}$ contenant x ; on pose $r(x) = z$, où $\{z\} = \overline{C} \cap \mathbb{R}$.

3.2.2 Relèvement, degré, points périodiques

Considérons un graphe X dont le développement par rapport à une boucle S est un espace relevé $T \in \mathbf{T}$, et $f: X \rightarrow X$ une transformation continue. Il existe une application continue $F: T \rightarrow T$ telle que $f \circ \pi = \pi \circ F$, où π est la projection canonique de T sur X . Une telle application F est appelée un *relèvement* de f . Les relèvements sont uniques modulo l'addition d'un entier : si F' est un autre relèvement de f , alors $F' = F + k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(x + 1) = F(x) + d$ pour tout $x \in T$; d est appelé le *degré* de f ou de F . Intuitivement, le degré correspond au nombre de tours (comptés positivement ou négativement) réalisés par $f(x)$ quand x décrit la boucle S . Pour pouvoir définir les nombres de rotation, nous considérerons uniquement des applications de degré 1.

Un point $x \in T$ est *périodique* (mod 1) pour F s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $F^n(x) \in x + \mathbb{Z}$. La *période* (mod 1) de x est le plus petit entier n avec cette propriété, c'est-à-dire $F^n(x) \in x + \mathbb{Z}$ et $F^i(x) \notin x + \mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$. Un point x est périodique (mod 1) pour F si et seulement si sa projection $\pi(x) \in X$ est périodique pour f ; de plus, la période (mod 1) de x pour F et la période de $\pi(x)$ pour f sont égales.

Une approche standard pour étudier la dynamique de f et ses points périodiques est de travailler au niveau du relèvement F . C'est le point de vue que nous adoptons; dans la suite, nous considérerons uniquement des applications continues $F: T \rightarrow T$ telle que $F(x + 1) = F(x) + 1$ pour tout $x \in T$, où T est un espace relevé. Les résultats obtenus pour F peuvent bien évidemment être exprimés pour f grâce à la projection π .

Définition 3.2.3 Soit $T \in \mathbf{T}$. La classe des fonctions continues $F: T \rightarrow T$ telles que $\forall x \in T, F(x + 1) = F(x) + 1$ est notée $\mathcal{C}_1(T)$.

Nous définissons trois types de nombres de rotation.

Définition 3.2.4 Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et $x \in T$. On pose

$$\underline{\rho}_F(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{r \circ F^n(x) - r(x)}{n} \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_F(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{r \circ F^n(x) - r(x)}{n}.$$

Si $\underline{\rho}_F(x) = \bar{\rho}_F(x)$, ce nombre est noté $\rho_F(x)$ et appelé le *nombre de rotation* de x .

Remarque 3.2.5 La raison d'utiliser la rétraction dans la définition ci-dessus est de « projeter » les points sur \mathbb{R} , sur lequel les opérations arithmétiques sont définies, pour pouvoir mesurer l'écart entre $F^n(x)$ et x . Dans le cas où T est plongé dans \mathbb{R}^n , il est facile de voir que le nombre de rotation peut être défini sans utiliser la rétraction r , en posant $\rho_F(x) = \lim \frac{F^n(x) - x}{n}$.

L'ensemble de rotation est un objet qui synthétise l'information concernant la rotation d'une transformation.

Définition 3.2.6 Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et $X \subset T$. On pose :

$$\text{Rot}_X^+(F) = \{\bar{\rho}_F(x) \mid x \in X\}, \quad \text{Rot}_X^-(F) = \{\underline{\rho}_F(x) \mid x \in X\},$$

$$\text{Rot}_X(F) = \{\rho_F F(x) \mid x \in X \text{ et } \rho_F F(x) \text{ existe}\}.$$

Quand $X = T$, on écrit $\text{Rot}^+(F)$, $\text{Rot}^-(F)$ et $\text{Rot}(F)$ au lieu de $\text{Rot}_X^+(F)$, $\text{Rot}_X^-(F)$ et $\text{Rot}_X(F)$. $\text{Rot}(F)$ est appelé l'*ensemble de rotation* de la transformation F .

Nous sommes *a priori* intéressés par l'ensemble de rotation entier mais, en général, il n'a pas les mêmes propriétés que l'ensemble de rotation d'une transformation du cercle. Cela justifie l'étude de l'ensemble $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, qui exhibe de bonnes propriétés et que nous savons étudier dans le cas général. Au chapitre suivant, nous étudierons l'ensemble $\text{Rot}(F)$ pour des espaces T particuliers.

3.3 Connexité et compacité de l'ensemble de rotation

Commençons par parler de ce qui marche mal. L'ensemble de rotation n'est pas toujours connexe, même dans des cas très simples, comme le montre l'exemple suivant. On conjecture que l'ensemble de rotation est fermé et coïncide avec $\text{Rot}^+(F)$ et $\text{Rot}^-(F)$, mais on ne sait le montrer que pour des transformations particulières (notamment les transformations markoviennes) ou sur certains graphes (voir le chapitre 4).

Exemple 3.3.1 Soit T l'espace relevé dessiné en figure 3.4. Entre 0 et 1, il a une branche A

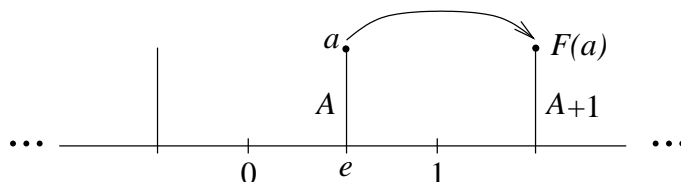


FIGURE 3.4 – L'ensemble $\text{Rot}(F) = \{0, 1\}$ est non connexe et non égal à $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \{0\}$.

d'extrémités $e \in \mathbb{R}$ et a . Soit $F: T \rightarrow T$ une application continue de degré 1 vérifiant :

- $F|_{\mathbb{R}} = Id$,

- $F(a) = a + 1$,
- $F|_A$ est injective.

On voit trivialement que $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \{0\}$ et $\rho_F(a) = 1$. Soit $x \in A$. S'il existe $k \geq 1$ tel que $F^k(x) \in \mathbb{R}$, alors $F^n(x) = F^k(x)$ pour tout $n \geq k$, et $\rho_F(x) = 0$. Sinon, $F^n(x) \in A + n$ pour tout $n \geq 1$, et $\rho_F(x) = 1$. Il en est de même pour tout $x \in A + \mathbb{Z}$ car $\rho_F(x) = \rho_F(x + p)$ si $p \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\text{Rot}(F) = \{0, 1\}$, qui n'est pas connexe.

Remarquons de plus que $\text{Rot}(F) \neq \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ bien qu'on puisse choisir F de sorte que $\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(\mathbb{R}) = T \setminus (\{a\} + \mathbb{Z})$, qui est dense dans T .

Il est possible de construire des exemples de transformations F telles que $\text{Rot}(F)$ a n composantes connexes pour n'importe quel entier n , ou des composantes connexes non réduites à un point, même sur l'espace T avec une seule branche A de l'exemple précédent : voir les figures 3.5 et 3.6 (la notation $[x, y]_A$ désigne le sous-intervalle de A d'extrémités x et y).

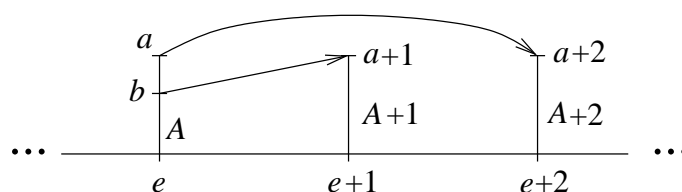


FIGURE 3.5 – $F|_{\mathbb{R}} = \text{Id}$, $F(a) = a + 2$, $F(b) = a + 1$; $F|_{[e, b]_A}$ et $F|_{[b, a]_A}$ sont injectives. On a $F(A) \supset (A + 1) \cup (A + 2)$ et on peut calculer facilement que $\text{Rot}(F) = \{0\} \cup [1, 2]$.

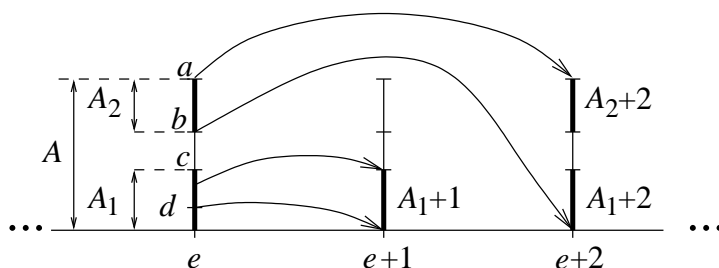


FIGURE 3.6 – $F|_{\mathbb{R}} = \text{Id}$, $F(a) = a + 2$, $F(b) = e + 2$, $F([d, c]_A) = [e, c]_{A+1}$, $F([b, a]_A) = [e, a]_{A+2}$, $F([c, b]_A \cup [e, d]_A) \subset \mathbb{R}$. Si on note $A_1 = [e, c]_A$ et $A_2 = [b, a]_A$, on a $F(A_1) \supset A_1 + 1$ et $F(A_2) \supset (A_1 \cup A_2) + 2$. On peut calculer que $\text{Rot}(F) = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) \cup \text{Rot}_{A_1}(F) \cup \text{Rot}_{A_2}(F) = \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$. En partitionnant A en davantage de morceaux, on peut obtenir un ensemble de rotation avec n composantes connexes.

De façon générale, quand la dynamique de certaines parties des branches n'a pas de relation avec la dynamique de \mathbb{R} , alors l'ensemble de rotation a des chances d'être non connexe.

Si on se restreint aux nombres de rotation des points de \mathbb{R} , alors l'ensemble de rotation $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ est connexe et fermé, et coïncide avec les ensembles $\text{Rot}_{\mathbb{R}}^+(F)$ et $\text{Rot}_{\mathbb{R}}^-(F)$. La preuve du premier point du théorème suivant s'inspire de [Ito81] (où R. Ito fait une preuve « à la main » du fait que l'ensemble de rotation d'une transformation du cercle de degré 1 est un intervalle fermé). Le deuxième point du théorème utilise le fait que $F_n \stackrel{\text{def}}{=} r \circ F^n|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le relèvement d'une transformation du cercle et que, si $(F_n)^k(x) \notin \text{Const}(F_n)$ pour tout $k \geq 0$, alors les orbites de x pour F^n et F_n coïncident (pour une application G , on note $\text{Const}(G)$ l'ensemble des points au voisinage desquels G est constante).

Théorème 3.3.2 Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. L'ensemble $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ est un intervalle compact non vide et $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \overline{\text{Rot}_{\mathbb{R}}^+(F)} = \overline{\text{Rot}_{\mathbb{R}}^-(F)}$.

De plus, $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \text{Rot}(r \circ F^n|_{\mathbb{R}})}$, cette union est une union croissante d'intervalles compacts, et si $\alpha \in \text{Rot}(r \circ F^n|_{\mathbb{R}})$, il existe un point x de nombre de rotation α tel que $F^{nk}(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $k \geq 0$.

Remarque 3.3.3 L'ensemble $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ coïncide avec l'ensemble des nombres de rotation des points qui ont une image ou une préimage dans \mathbb{R} sous l'action d'un itéré de F (car $\rho_F(x) = \rho_F(F(x))$), autrement dit tous les points dont l'orbite future ou « passée » passe dans \mathbb{R} . Si T est le développement d'un graphe topologique, la proposition 3.3.4 énonce qu'on peut prendre l'adhérence de $\bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathbb{R})$ sans changer l'ensemble de rotation ; par contre $\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(\mathbb{R})$ peut contenir des points dont le nombre de rotation n'est pas dans $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, comme le montre l'exemple 3.3.1.

Proposition 3.3.4 Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Si on pose $T_{\mathbb{R}} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathbb{R})}$, alors $\text{Rot}_{T_{\mathbb{R}}}(F) = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$.

3.4 Relation entre ensemble de rotation et points périodiques

Si $F^q(x) = x + p$ (avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$) alors $\rho_F(x) = p/q$. Par conséquent, tout point périodique (mod 1) a un nombre de rotation rationnel. Nous avons montré la réciproque pour les rationnels de l'intervalle $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$: si $p/q \in \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, il existe un point périodique (mod 1) de nombre de rotation p/q . Ce résultat se décompose en deux parties, selon que p/q est dans l'intérieur ou sur le bord de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$. Remarquons que cette dichotomie entre l'intérieur et le bord de l'intervalle de rotation est déjà présente pour les transformations du cercle.

3.4.1 Intérieur de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$

Pour trouver des points fixes ou périodiques, nous avons introduit la notion de *recouvrement positif*. Pour une fonction continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le théorème des valeurs intermédiaires assure que, si I est un intervalle compact tel que $f(I) \supset I$, alors f a un point fixe dans I . Cette propriété n'est pas vraie en général pour une fonction continue sur un graphe topologique, même si c'est un arbre. La figure 3.7 donne un contre-exemple élémentaire. Ce contre-exemple illustre l'origine du problème : l'unique point fixe de $r \circ f|_I$ n'est pas un point fixe de $f|_I$ car il fait partie des points x dont l'image n'est pas dans I , autrement dit $f(x) \neq r \circ f(x)$; ces points sont dans la partie constante de $r \circ f$. Cette situation ne peut pas se produire si $f(I) \supset I$ et $r \circ f$ est croissante : il peut exister des points fixes de $r \circ f$ dans la partie constante de $r \circ f$, mais dans ce cas il existe nécessairement d'autres points fixes hors de la partie constante, de sorte que ce sont aussi des points fixes pour f . Ceci est illustré en figure 3.8 (nous renvoyons à [9] pour les détails de la preuve). C'est l'idée d'un recouvrement positif. Un intervalle I F -recouvre positivement un intervalle J si $r \circ F(I) \supset J$ et cette inclusion est « globalement croissante ».

Dans ce chapitre, nous utiliserons des recouvrements positifs uniquement pour des sous-intervalles de \mathbb{R} . Néanmoins, nous donnons une définition générale en vue d'une utilisation au chapitre 4. Soit I un intervalle fermé de T . On peut définir une rétraction $r_I: T \rightarrow I$ sur I si pour toute composante connexe C de $T \setminus I$, l'ensemble $\overline{C} \cap T$ est réduit à un point. Dans ce cas, r_I est définie par $r_I(x) = x$ si $x \in I$ et $\{r_I(x)\} = \overline{C} \cap T$ si C est la composante connexe de $T \setminus I$ contenant x . L'intervalle I est homéomorphe à un sous-intervalle fermé (compact ou non) de \mathbb{R} , et tout homéomorphisme $h: I \rightarrow h(I) \subset \mathbb{R}$ induit un ordre sur I par $x < y$ ssi $h(x) < h(y)$. L'ensemble des homéomorphismes définit deux ordres sur I , inverses l'un de l'autre. Pour chaque

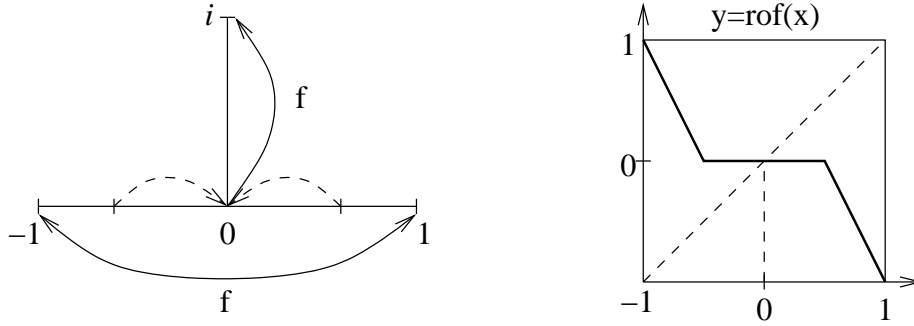


FIGURE 3.7 – Soit f une fonction continue sur le graphe $[-1, 1] \cup i[0, 1] \subset \mathbb{C}$ (figure de gauche) telle que $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, $f(0) = i$ et f est injective sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ (la définition de f sur $i[0, 1]$ n'importe pas). On note $I = [-1, 1]$. Il est clair que $f(I) \supset I$. Néanmoins f n'a pas de point fixe dans l'intervalle I . À droite, on a représenté la rétraction de $f|_I$ sur \mathbb{R} (en pointillés : la diagonale $y = x$) ; l'intervalle constant de $r \circ f$ correspond aux points $x \in I$ tels que $f(x) \in i[0, 1]$.

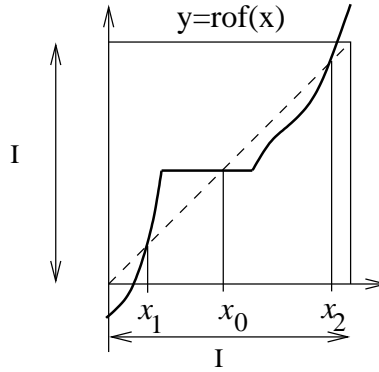


FIGURE 3.8 – Soit f une fonction continue du graphe $\mathbb{R} \cup i[0, 1]$ dans lui-même telle que $r \circ f|_I$ est croissante et $f(I) \supset I$, où I est un intervalle compact (sur la figure : graphe de $r \circ f|_I$ avec en pointillés la diagonale $y = x$) ; sur cette figure, $r \circ f$ a un point fixe x_0 dans sa partie constante, elle a aussi deux autres points fixes x_1 et x_2 , qui sont nécessairement points fixes de f .

intervalle I , il suffit de choisir arbitrairement un des deux ordres, que nous notons \leq_I . Pour assurer une certaine compatibilité, nous faisons les choix suivants : si $I \cap \mathbb{R}$ est un intervalle non dégénéré, l'ordre \leq_I est celui qui coïncide avec l'ordre de \mathbb{R} sur $I \cap \mathbb{R}$; si la rétraction r_I envoie \mathbb{R} sur une extrémité de I , \leq_I est l'ordre tel $\min(I)$ est le point $r_I(\mathbb{R})$. Cette convention couvre tous les cas que nous rencontrerons dans la suite.

Définition 3.4.1 Soit $T \in \mathbf{T}$, $F: T \rightarrow T$ continue, et I, J deux intervalles compacts de T sur lesquels sont définies des rétractions. On dit que I F -recouvre positivement J , et on note $I \xrightarrow{+}_F J$, s'il existe $x, y \in I$ tels que $x \leq_I y$ et

$$r_J \circ F(x) \leq_J \min J \leq_J \max J \leq_J r_J \circ F(y).$$

Remarque 3.4.2 Si I, J sont des intervalles compacts de \mathbb{R} ,

$$I \xrightarrow{+}_F J \iff \exists x, y \in I \text{ tels que } x \leq y \text{ et } r(F(x)) \leq \min J \leq \max J \leq r(F(y)). \quad (3.1)$$

Si l'intervalle I F -recouvre positivement I , alors on peut montrer que F a un point fixe dans I . Comme dans le cas des recouvrements d'intervalles dans \mathbb{R} , on peut enchaîner des recouvrements positifs et obtenir des points périodiques qui suivent cette chaîne.

Proposition 3.4.3 *Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et I_0, \dots, I_{k-1} des intervalles compacts non dégénérés de \mathbb{R} sur lesquels sont définies des rétractions. On suppose que*

$$I_0 \xrightarrow{F^{n_1-p_1}} I_1 \xrightarrow{F^{n_2-p_2}} I_2 \xrightarrow{+} \cdots \xrightarrow{+} I_{k-1} \xrightarrow{F^{n_k-p_k}} I_0,$$

où les n_i et p_i sont des entiers, avec $n_i \geq 1$. On pose $m_i = \sum_{j=1}^i n_j$ et $\hat{p}_i = \sum_{j=1}^i p_j$ pour $1 \leq i \leq k$. Alors il existe un point $x_0 \in I_0$ tel que $f^{m_k}(x_0) = x_0 + \hat{p}_k$ et $f^{m_i}(x_0) \in I_i + \hat{p}_i$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$.

Définition 3.4.4 Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$, $X \subset T$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit :

$$\text{Per}_X(\alpha, F) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists x \in X, x \text{ périodique (mod 1) de période } n \text{ et } \rho_F(x) = \alpha\},$$

et $\text{Per}_X(F)$ est l'ensemble des périodes des points $x \in X$ qui sont périodiques (mod 1). Si $X = T$, on note $\text{Per}(\alpha, F)$ et $\text{Per}(F)$ au lieu de $\text{Per}_T(\alpha, F)$ et $\text{Per}_T(F)$.

L'ensemble $\text{Per}(\alpha, F)$ est vide si $\alpha \notin \text{Rot}(F) \cap \mathbb{Q}$. Si p, q sont premiers entre eux, il est facile de montrer que $\text{Per}(p/q, F) \subset q\mathbb{N}^*$. Dans le cas où F est une transformation du cercle de degré 1 et $p/q \in \text{Int}(\text{Rot}(F))$, on sait que $\text{Per}(p/q, F) = q\mathbb{N}^*$ si p, q sont premiers entre eux. Nous avons montré que si $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et $p/q \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$, alors $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F)$ contient tous les multiples de q à partir d'un certain rang. Des exemples montrent que le nombre de multiples de q manquants est non borné même pour T fixé, et que $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F)$ n'est en général pas égal à un ensemble de la forme $\{mq \mid m \geq M\}$ [8, Exemple 6.5]. L'ensemble des périodes d'un nombre de rotation donné n'est pas entièrement caractérisé, contrairement au cas du cercle.

Théorème 3.4.5 *Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et $p/q \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$ avec p, q premiers entre eux. Il existe un entier $M \geq 1$ tel que $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F) \supset \{mq \mid m \geq M\}$.*

Idée de la preuve. La première étape consiste à se ramener au nombre de rotation 0 en considérant $G = F^q - p$. On a alors $0 \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(G))$. On veut montrer que pour tout entier n assez grand, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $G^n(x) = x$ et $G^i(x) \neq x$ si $1 \leq i < n$.

Comme $0 \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(G))$, il existe des points $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\rho_G(x_0) < 0$ et $\rho_G(x_1) > 0$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r \circ G^n(x_0) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r \circ G^n(x_1) = +\infty. \quad (3.2)$$

Quitte à translater x_1 par un entier (ce qui ne change pas son nombre de rotation), on peut supposer $x_0 < x_1 < x_0 + 1$. On pose $I = [x_0, x_1]$. Pour n assez grand, on a $r \circ G^n(x_0) \leq x_0 < x_1 \leq r \circ G^n(x_1)$, et donc $I \xrightarrow{G^n} I$.

La proposition 3.4.3 implique qu'il existe $x \in I$ tel que $G^n(x) = x$, mais cela n'assure pas que la période de x est n . Pour construire des points périodiques dont on contrôle la période, on va s'inspirer des fers à cheval. On pose $J = I + 1$. Les intervalles I et J sont disjoints et, par l'équation (3.2), il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, I et J G^n -recouvrent positivement I et J . Les intervalles I et J forment donc l'analogie (pour les recouvrements positifs) d'un fer à cheval pour G^n , ce qui permettrait d'obtenir toutes les périodes pour G^n ,

mais ceci n'est pas suffisant. Soit $n_1, \dots, n_k \geq N$ et $m = n_1 + \dots + n_k$. Si on applique la proposition 3.4.3 à la chaîne

$$I \xrightarrow[G^{n_1}]{+} J \xrightarrow[G^{n_2}]{+} J \xrightarrow[G^{n_3}]{+} J \cdots \xrightarrow[G^{n_{k-1}}]{+} J \xrightarrow[G^{n_k}]{+} I,$$

on obtient :

$$\exists x \in I \text{ tel que } G^m(x) = x \text{ et } \forall 1 \leq i \leq k-1, G^{n_1+\dots+n_i}(x) \in J. \quad (3.3)$$

Cela suffit-il à trouver des points périodiques pour toute période assez grande? La réponse est oui grâce au lemme arithmétique suivant.

Lemme 3.4.6 *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier $\chi(N)$ tel que, pour tout $m \geq \chi(N)$, il existe des entiers strictement positifs k et n_1, \dots, n_k tels que*

- i) $n_1 + n_2 + \dots + n_k = m$,
- ii) $n_i \geq N$ pour tout $1 \leq i \leq k$,
- iii) si $d \in \mathbb{N}^*$ divise m et $d \neq m$ alors il existe $1 \leq i \leq k-1$ tel que d divise $n_1 + \dots + n_i$.

En effet, si $m \geq \chi(N)$, soit n_1, \dots, n_k les entiers donnés par le lemme ci-dessus, et x le point vérifiant (3.3) pour ces entiers. C'est un point périodique pour G , et sa période d divise m . Si $d \neq m$ alors le lemme dit qu'il existe $1 \leq i \leq k-1$ tel que d divise $n_1 + \dots + n_i$. Donc $G^{n_1+\dots+n_i}(x) = x$. Or $x \in I$ et $G^{n_1+\dots+n_i}(x) \in J$, ce qui contredit le fait que $I \cap J = \emptyset$. La période de x est donc $d = m$. Conclusion : pour tout $m \geq \chi(N)$, il existe un point $x \in I$ périodique pour G de période m .

En revenant à F , on montre facilement qu'il existe M tel que $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F) \supset \{mq \mid m \geq M\}$, ce qui prouve le théorème. \square

On peut donner une formule explicite (mais non optimale) pour $\chi(N)$ dans le lemme 3.4.6; la seule valeur importante de χ est $\chi(1) = 1$.

Remarque 3.4.7 Un fer à cheval est exhibé dans la preuve du théorème 3.4.5, ce qui implique que l'entropie topologique de f est strictement positive dès que l'intervalle $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ n'est pas réduit à un point (où $F: T \rightarrow T$ est un relèvement de $f: X \rightarrow X$, application de degré 1 sur X dont le développement donne l'espace relevé T).

Le théorème 3.11 dans [8] est plus précis que le théorème 3.4.5 sur la borne M : si K est un intervalle compact inclus dans $\text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$, il existe un entier $N(K)$ tel que, si $p/q \in K$ avec p, q premiers entre eux, alors $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F) \supset \{mq \mid m \geq \chi(\lceil \frac{N(K)}{q} \rceil)\}$. En particulier, $\text{Per}_{\mathbb{R}}(p/q, F) = q\mathbb{N}^*$ si $q \geq N(K)$. Cet entier $N(K)$ ne peut pas être pris uniforme sur tout $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$: il peut « exploser » quand une des bornes de K tend vers le bord de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, comme le montre l'exemple 6.6 dans [8].

Ce résultat sur l'ensemble des périodes pour un nombre de rotation donné permet de démontrer assez rapidement le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.8 *Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Si $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ n'est pas réduit à un point alors l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \text{Per}_{\mathbb{R}}(F)$ est fini.*

3.4.2 Bord de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$

Il nous reste à étudier le cas où un rationnel p/q appartient au bord de l'intervalle $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, qui est réduit aux deux extrémités de l'intervalle, éventuellement confondues.

Bien que p/q soit le nombre de rotation d'un point de \mathbb{R} , il n'existe pas nécessairement de point périodique (mod 1) dans \mathbb{R} de nombre de rotation p/q , et il faut alors chercher les points périodiques potentiels hors de \mathbb{R} . De ce fait, la topologie des branches de $T \setminus \mathbb{R}$ intervient, et il faut se restreindre aux espaces relevés de dimension 1, c'est-à-dire ceux provenant du développement d'un graphe fini. L'exemple 6.7 dans [8] montre que, dans un espace relevé quelconque, il n'existe pas nécessairement de point périodique de nombre de rotation p/q si $p/q \in \partial \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$.

Le cas où $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ est réduit au point p/q se traite en utilisant le fait que $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ contient $\text{Rot}(r \circ F|_{\mathbb{R}})$ (théorème 3.3.2). Comme $F_1 \stackrel{\text{def}}{=} r \circ F|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le relèvement d'une transformation continue du cercle, de degré 1, on peut utiliser la théorie de rotation du cercle de Misiurewicz [Mis82] (voir aussi [ALM00]). On sait que $\text{Rot}(F_1)$ est non vide, donc égal à $\{p/q\}$, et il existe $x \in \mathbb{R}$ périodique (mod 1) pour F_1 , de nombre de rotation p/q ; de plus, x peut être choisi de façon que son orbite soit disjointe de $\text{Const}(F_1)$ ([ALM00, Theorem 3.7.20]), ce qui implique que les orbites de x pour F_1 et F coïncident. Par conséquent, x est périodique (mod 1) pour F et $\rho_F(x) = p/q$.

Si $p/q = \min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ (resp. $p/q = \max \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$), on pose $G = F^p - q$, de façon à se ramener à $0 = \min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(G)$ (resp. $0 = \max \text{Rot}_{\mathbb{R}}(G)$). Nous nous concentrerons sur le cas du minimum, le maximum se traitant de façon symétrique.

Dans la suite, nous considérons $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$ telle que $\text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)) \neq \emptyset$ et $\min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = 0$. Les points périodiques (mod 1) de nombre de rotation 0 sont les points x tels que $F^n(x) = x$ pour un certain $n \geq 1$.

Nous commençons par introduire les outils qui permettent de trouver ces points périodiques, qui peuvent être hors de \mathbb{R} . Un *chemin direct* est un chemin sans boucle ni retour en arrière. La notion clé est celle de chemin direct associé à un chemin vers $+\infty$ quelconque. Cette notion permet de généraliser les recouvrements positifs. Nous présentons cette machinerie dans le cadre simplifié d'un arbre infini. Notons \mathbf{T}^Γ l'ensemble des espaces $T \in \mathbf{T}^\circ$ ne contenant pas de boucle.

Définition 3.4.9 Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$. Un *chemin* de $x_0 \in T$ vers $+\infty$ est une application continue $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow T$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} r \circ \gamma(t) = +\infty$. Un *chemin direct* est un chemin γ tel que, si $\gamma(t) = \gamma(t')$ avec $0 \leq t < t'$, alors γ est constante sur $[t, t']$.

Remarque 3.4.10 Si γ est un chemin direct, alors $\text{Im}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma([0, +\infty[)$ est homéomorphe à $[0, +\infty[$.

Un espace $T \in \mathbf{T}^\Gamma$ étant uniquement connexe par arc, on peut parler sans ambiguïté de l'intervalle joignant deux points x et y , ou joignant un point x à $+\infty$. On peut définir une rétraction sur tout intervalle fermé de T .

Définition 3.4.11 Soit $T \in \mathbf{T}^\Gamma$ et γ un chemin de x_0 vers $+\infty$. Soit A l'intervalle joignant x_0 à $+\infty$ et r_A la rétraction de T sur A . Le chemin direct associé à γ est $\tilde{\gamma} : [0, +\infty[\rightarrow T$ défini par $\tilde{\gamma}(t) = \max r_A \circ \gamma([0, t])$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

Considérons en exemple la situation représentée en figure 3.9 : l'intervalle A joignant a à $+\infty$ est homéomorphe à une demi-droite et contient les points $F(x)$, x , y et $r(F(y))$ dans cet ordre. En posant $I = [x, y]$ (qui est un intervalle dans A), on a $I \xrightarrow[F]{+} I$ (il suffit de considérer A à la place de \mathbb{R} dans la définition de recouvrement positif dans \mathbb{R} (3.1)). Ceci implique l'existence

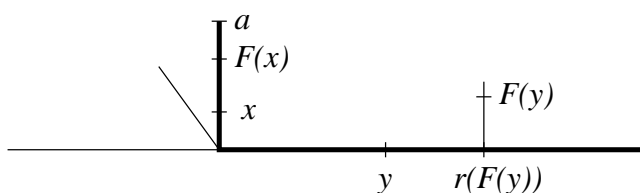


FIGURE 3.9 – L'intervalle A joignant a à $+\infty$ est dessiné en gras. Si on se place dans A , on a, dans la configuration de la figure : $F(x) < x < y < r(F(y))$.

d'un point $z \in I$ tel que $F(z) = z$. Exprimons ce résultat en termes de chemins directs. Soit γ_0 un chemin direct de x vers $+\infty$ et $\gamma_1 = \widetilde{F(\gamma_0)}$. La présence du recouvrement $I \xrightarrow{F} I$ découle du fait que $\text{Im}(\gamma_1) \supset \text{Im}(\gamma_0)$ et $y \in \mathbb{R}$ avec $r(x) \leq y \leq r(F(y))$. Dans le cas d'itérations successives de F , ce résultat se généralise comme suit.

Lemme 3.4.12 *Soit $T \in \mathbf{T}^\top$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ et γ un chemin de x_0 vers $+\infty$. On définit $\gamma_0 = \tilde{\gamma}$ et $\gamma_{n+1} = \widetilde{F(\gamma_n)}$ pour tout entier $n \geq 1$. On suppose que, pour un certain entier n , $\text{Im}(\gamma_n) \supset \text{Im}\gamma_0$ et qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $(r \circ F)^i(y) \geq y$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors il existe un point z tel que $F^n(z) = z$.*

Dans le cadre plus général d'un graphe infini $T \in \mathbf{T}^\circ$, il est encore possible de définir le chemin direct associé à un chemin quelconque (en supprimant les boucles et les retours en arrière), et le lemme 3.4.12, sous une formulation adéquate, reste valable. Soulignons que dans le cas général il n'existe pas de rétraction de T tout entier sur l'image d'un chemin direct, ce qui complique notablement les définitions.

Théorème 3.4.13 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Si $\min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = p/q$ (resp. $\max \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = p/q$), il existe $x \in T$ un point périodique (mod 1) de nombre de rotation p/q .*

Idée de la preuve. Le cas où $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ est réduit à un point a été traité plus haut. De plus, nous avons vu qu'il suffit de considérer le cas du minimum, avec $\min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = 0$ et $\text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)) \neq \emptyset$. Dans cette situation, nous voulons montrer qu'il existe $z \in T$ tel que $F^n(z) = z$. Nous allons en fait montrer la contraposée, plus précisément si :

$$\min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) \geq 0, \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)) \neq \emptyset \text{ et } \forall z \in T, \forall n \geq 1, F^n(z) \neq z \quad (3.4)$$

alors $\min \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) > 0$. Nous esquissons les grandes idées de la preuve dans le cadre simplifié présenté ci-dessus en nous plaçant dans un espace $T \in \mathbf{T}^\top$, et sans nous risquer à entrer dans les détails (très) techniques.

Nous supposons donc dans la suite que l'hypothèse (3.4) est vérifiée. Par le théorème 3.4.5, il existe un entier k tel que $\text{Int}(\text{Rot}(r \circ F^k)) \neq \emptyset$. Quitte à remplacer F par F^k , on suppose que $\text{Int}(\text{Rot}(r \circ F)) \neq \emptyset$. On peut en déduire, en utilisant la théorie de rotation du cercle, que

$$\text{il existe } y_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, F^n(y_0) \in \mathbb{R} \text{ et } F^n(y_0) \geq y_0. \quad (3.5)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $r(F(x)) \leq x$ alors, quitte à translater y_0 par un entier, on a $r(F(x)) \leq x < y_0 \leq F(y_0)$, d'où $[x, y_0] \xrightarrow{F} [x, y_0]$. Ceci implique l'existence d'un point fixe, qui contredit l'hypothèse. Donc $r(F(x)) > x$. Dit de façon informelle, les points de \mathbb{R} vont vers la droite, ce qui contribue à donner des nombres de rotation strictement positifs. Pour la même raison, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, r(F^n(x)) > x. \quad (3.6)$$

Nous allons expliquer que les points hors de \mathbb{R} ont, eux aussi, des orbites qui vont vers la droite au bout d'un certain temps.

Soit X le « motif périodique » de T hors de \mathbb{R} :

$$X = \overline{T \setminus \mathbb{R}} \cap r^{-1}([0, 1]).$$

L'espace T est égal à $\mathbb{R} \cup (X + \mathbb{Z})$ et on peut écrire X comme une union finie d'intervalles compacts; nous appellerons *branches* ces intervalles et leurs translatés par des entiers. Soit $x_0 \in X$ et $x_n = F^n(x_0)$ pour tout n . Comme on s'intéresse à $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, il est possible de montrer, moyennant quelques étapes techniques, qu'il est suffisant de se focaliser sur le cas où $x_0 \in F(\mathbb{R})$. Puisque les points de \mathbb{R} vont vers la droite, le cas problématique est quand l'orbite de x_0 reste longtemps dans $X + \mathbb{Z}$ ou, plus précisément, dans $\bigcup_{k \geq 0} (X - k)$, puisque les ensembles $(X + k)_{k > 0}$ sont à droite de x_0 . Soit $N \geq 0$ tel que les N premiers points de l'orbite de x_0 restent dans $\bigcup_{k \geq 0} (X - k)$, c'est-à-dire :

$$\forall 0 \leq k < N, \exists k_n \geq 0, x_n \in X - k_n. \tag{3.7}$$

Comme on a supposé $x_0 \in F(\mathbb{R})$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $F(y) = x_0$. Par (3.6), $y < r(F^{n+1}(y)) = r(x_n)$ pour tout $0 \leq n < N$. Par conséquent, y est à gauche de $r(x_0)$ et, pour tout $0 \leq n < N$, la branche de $X - k_n$ contenant x_n est entre y et $r(x_0) + 1$. Par conséquent, le nombre de branches contenant un des points $(x_n)_{0 \leq n < N}$ est fini; on peut même le borner indépendamment de x_0 sans beaucoup d'effort. Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe une branche B contenant au moins N/K points parmi x_0, \dots, x_{N-1} si K borne ce nombre de branches.

Si les points x_n et $x_{n+i} = F^i(x_n)$ (avec $i > 0$) sont tous les deux dans la branche B , avec x_{n+i} au dessus de x_n (figure 3.10) alors, quitte à translater y_0 d'un entier, on a $[x_n, y_0] \xrightarrow{F^i} [x_n, y_0]$

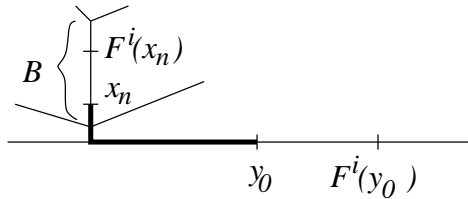


FIGURE 3.10 – Si x_n et $F^i(x_n)$ sont dans une même branche B avec $F^i(x_n)$ au dessus de x_n , alors $[x_0, y_0] \xrightarrow{F^i} [x_0, y_0]$ car on a de plus $F^i(y_0) \geq y_0 \geq r(B)$.

(car $F^i(y_0) \geq y_0$ par (3.5)), d'où l'existence d'un point z tel que $F^i(z) = z$, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, les points de l'orbite de x_0 tombant dans B sont ordonnés en « descendant », c'est-à-dire que les indices les plus élevés sont les plus proches de \mathbb{R} . On note x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < N$, les points contenus dans B parmi $(x_n)_{0 \leq n < N}$. On peut montrer que la plupart des écarts d'indice $i_{j+1} - i_j$ sont majorés par un certain entier α , grâce au fait que B contient une fraction élevée des points $(x_n)_{0 \leq n < N}$. On choisit une distance d sur T qui soit invariante par translation par 1. Les applications F, F^2, \dots, F^α sont équicontinues et n'ont pas de point fixe, donc il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall x \in T, \forall 1 \leq i \leq \alpha, d(x, F^i(x)) > \delta$. En particulier, si $i_{j+1} - i_j \leq \alpha$ alors $d(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) = d(x_{i_j}, F^{i_{j+1}-i_j}(x_{i_j})) > \delta$. On ne peut donc pas loger trop de points x_i dans B (figure 3.11). On en déduit que l'entier N dans (3.7) est borné. Par conséquent, si x appartient à X , il existe un entier n borné tel que, soit $F^n(x_0) \in X + k$ avec $k \geq 1$ (donc $F^n(x)$ est à droite de x), soit $F^n(x) \in \mathbb{R}$; et si $x \in \mathbb{R}$ alors $F(x)$ est à droite de x (c'est-à-dire $r(F(x)) > x$). La preuve n'est pas encore terminée, mais on a là les ingrédients permettant de montrer que tous les nombres de rotation de $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ sont strictement positifs. Ceci permet de prouver (3.4), et donc le théorème. \square

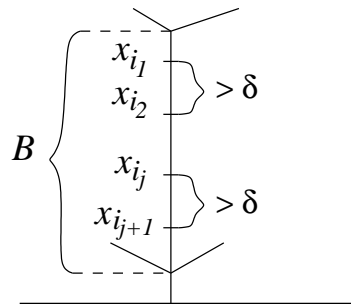


FIGURE 3.11 –

Remarque 3.4.14 Quand p/q est une extrémité de l'intervalle $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, nous ne savons rien dire de la période du point périodique (mod 1) de nombre de rotation p/q (contrairement au cas où $p/q \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$). Pour étudier les périodes possibles, il serait crucial de prendre en compte la topologie des composantes connexes de $T \setminus \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Ensemble de rotation sur les graphes sigma et soleil

Au chapitre 3 nous avons étudié $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, qui est un sous-intervalle de $\text{Rot}(F)$. L'ensemble de rotation $\text{Rot}(F)$, lui, n'est pas nécessairement connexe et, dans le cas général, on ne sait pas s'il est fermé. On conjecture que $\text{Rot}(F)$ est fermé et a un nombre fini de composantes connexes. Nous avons attaqué cette question en commençant par le graphe le plus simple, après le cercle, appartenant à la classe d'homotopie du cercle : il s'agit du graphe σ , composé d'un segment recollé à un cercle. Le fait d'avoir une seule branche facilite beaucoup la situation car il y a une seule façon de « sortir » du cercle et d'atteindre les différents points de la branche. Nous avons ensuite montré la conjecture pour les revêtements universels des graphes soleil (plusieurs segments disjoints recollés à un cercle), qui semblaient les graphes les plus simples après σ . La méthode développée est différente et a davantage de chance d'être généralisable. A terme, l'objectif est de traiter tous les espaces relevés $T \in \mathbf{T}^{\circ}$.

De plus, pour les applications sur les revêtements universels des graphes σ ou soleil, les nombres de rotation rationnels (sauf éventuellement un nombre fini) sont réalisés comme nombre de rotation d'un point périodique (mod 1). Ce résultat n'était pas nécessairement attendu, les liens entre la dynamique interne aux branches et les nombres de rotation n'étant pas évidents. Ceci fait espérer un résultat identique pour tous les espaces relevés sans boucle (c'est-à-dire le développement des graphes ayant une unique boucle) et laisse penser que l'ensemble $\text{Rot}(F)$ (et non uniquement $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$) peut jouer un rôle dans la caractérisation des périodes.

Les résultats de ce chapitre sont tirés de [10] et [11].

4.1 Applications du graphe sigma

Le graphe σ consiste en un intervalle attaché par une de ses extrémités à un cercle (figure 4.1). Dans cette section, nous montrons que, quand T est le revêtement universel du graphe σ ,

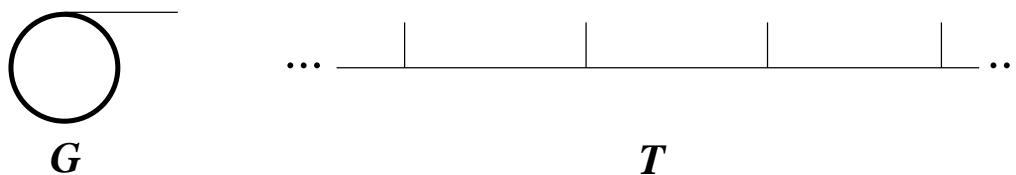


FIGURE 4.1 – G est le graphe σ , son recouvrement universel est T .

l'ensemble de rotation d'une transformation $F \in \mathcal{C}_1(T)$ est l'union d'un nombre fini d'intervalles

compacts. De plus, $\text{Rot}(F)$ coïncide avec $\text{Rot}^+(F)$ et $\text{Rot}^-(F)$ et, pour tout rationnel r dans $\text{Rot}(F)$, il existe un point périodique (mod 1) de nombre de rotation r .

Il s'avère que les preuves s'étendent à une classe de transformations que nous appelons σ -ressemblantes.

4.1.1 Applications σ -ressemblantes

Nous rappelons la définition de \mathbf{T}° , qui est la famille des graphes infinis provenant du développement par rapport à une boucle d'un graphe topologique.

Définition 4.1.1 Un espace métrique connexe $T \supset \mathbb{R}$ appartient à \mathbf{T}° si :

- i) il existe un homéomorphisme $\tau: T \rightarrow T$ tel que $\tau(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par convention, on désigne $\tau(z)$ par $z + 1$ pour tout $z \in T$),
- ii) la fermeture de toute composante connexe de $T \setminus \mathbb{R}$ est un graphe topologique fini qui intersecte \mathbb{R} en un unique point,
- iii) le nombre de composantes connexes C de $T \setminus \mathbb{R}$ telles que $\overline{C} \cap [0, 1] \neq \emptyset$ est fini.

Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. On note

$$T_{\mathbb{R}} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathbb{R})}.$$

Cet ensemble est fermé, invariant par translation par 1, il contient \mathbb{R} et il est connexe car les ensembles $F^n(\mathbb{R})$ forment une union croissante de connexes ; par conséquent $T_{\mathbb{R}} \in \mathbf{T}^\circ$.

On pose $X = \overline{T \setminus T_{\mathbb{R}}} \cap r^{-1}([0, 1])$. Cet ensemble est composé d'un nombre fini de graphes topologiques, et $T = T_{\mathbb{R}} \cup (X + \mathbb{Z})$. Les ensembles $T_{\mathbb{R}}$ et X sont illustrés en figure 4.2. Remarquons que $T_{\mathbb{R}}$ et X dépendent implicitement de F .

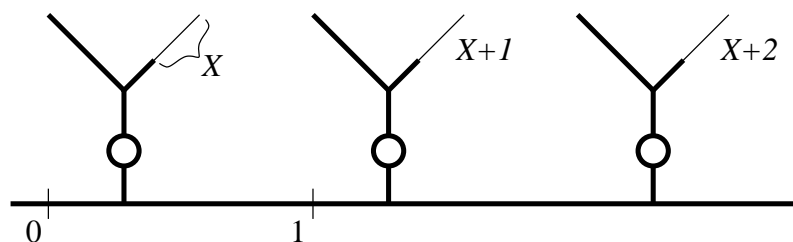


FIGURE 4.2 – Illustration des ensembles $T_{\mathbb{R}}$ (en gras) et X (trait fin). L'application de cet exemple est σ -ressemblante car X est un intervalle.

Si T est le revêtement universel du graphe σ , X est soit vide, soit un intervalle avec une extrémité dans $T_{\mathbb{R}}$. Les applications ayant la même propriété sont appelées σ -ressemblantes.

Définition 4.1.2 Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Si $X = \emptyset$ ou si X est un intervalle tel que $X \cap T_{\mathbb{R}}$ est réduit à une extrémité de X , alors F est dite σ -ressemblante. L'ensemble des applications σ -ressemblantes sur T est noté $\mathcal{C}_1^\sigma(T)$.

Considérons $F \in \mathcal{C}_1^\sigma(T)$ avec X non vide. Nous munissons l'intervalle X de l'ordre linéaire tel que $\min X$ est l'extrémité de X qui est dans $T_{\mathbb{R}}$. La rétraction $r_X: T \rightarrow X$ est définie de façon naturelle par $r_X(x) = x$ si $x \in X$ et $r_X(x) = \min X$ sinon. La notion de recouvrement positif a été introduite en section 3.4.1. Nous allons l'utiliser dans X : si I, J sont des intervalles compacts

de X , $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, $I \xrightarrow{F^n} J+p$ s'il existe $x, y \in I$ avec $x \leq y$ tels que $r_X(F^n(x) - p) \leq \min J$ et $r_X(F^n(y) - p) \geq \max J$ (pour l'ordre sur X). Nous utiliserons le lemme suivant, qui peut être montré à partir de la proposition 3.4.3.

Lemme 4.1.3 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $G \in \mathcal{C}_1^\sigma(T)$. On suppose qu'il existe I, J deux sous-intervalles compacts non vides de X et $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$I \xrightarrow{G} I + m_1, \quad I \xrightarrow{G} J + m_1, \quad J \xrightarrow{G} I + m_2, \quad J \xrightarrow{G} J + m_2.$$

Pour tout rationnel r dans $[m_1, m_2]$ ou $[m_2, m_1]$ (selon l'ordre de m_1, m_2), il existe un point périodique (mod 1) dans $I \cup J$ tel que $\rho_G(x) = r$.

4.1.2 Ensemble de rotation d'une application σ -ressemblante

Quand $T \in \mathbf{T}^\circ$, l'ensemble $\text{Rot}_{T_{\mathbb{R}}}(F)$ est égal à $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ par la proposition 3.3.4, et $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ a été étudié au chapitre 3. Comme $T = T_{\mathbb{R}} \cup (X + \mathbb{Z})$ et $F(T_{\mathbb{R}}) \subset T_{\mathbb{R}}$, il suffit de considérer les nombres de rotation des points $x \in X$ dont l'orbite n'entre pas dans $T_{\mathbb{R}}$ ou, de façon équivalente, les points de $X^\infty = \{x \in X \mid \forall n \geq 1, F^n(x) \in X + \mathbb{Z}\}$. On a $\text{Rot}(F) = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) \cup \text{Rot}_{X^\infty}(F)$.

La première étape consiste à diviser X selon la position des images des points. Si $F(x) \in X+p$ et $F(y) \in X+p'$ avec $p, p' \in \mathbb{Z}$, $p \neq p'$, alors il y a nécessairement un écart entre x et y , en raison de la continuité de F . Grâce à cette observation, on voit qu'il est possible d'inclure les points de $\{x \in X \mid F(x) \in X + \mathbb{Z}\}$ dans un nombre fini d'intervalles disjoints tels que, pour tout I parmi ces intervalles, il existe un unique entier p vérifiant $F(I) \cap (X + p) \neq \emptyset$.

Lemme 4.1.4 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1^\sigma(T)$. Il existe X_1, \dots, X_N (avec $N \geq 0$) des sous-intervalles de X , compacts, non vides, disjoints, et p_1, \dots, p_N des entiers relatifs tels que*

- i) $X_1 < X_2 < \dots < X_N$ (pour l'ordre dans X),
- ii) $F(X_i) \subset (X + p_i) \cup \text{Int}(T_{\mathbb{R}})$ pour tout $1 \leq i \leq N$,
- iii) $F(\min X_i) = \min X + p_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$,
- iv) $p_{i+1} \neq p_i$ pour tout $1 \leq i \leq N - 1$,
- v) $F(X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_N)) \cap (X + \mathbb{Z}) = \emptyset$.

X est partitionné en $X_1, X_2, \dots, X_N, X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_N)$, le dernier ensemble jouant le rôle de « poubelle ». En effet, si $F^n(x) \in X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_N) + \mathbb{Z}$ pour un certain n , alors $x \notin X^\infty$. Par conséquent, on peut coder l'itinéraire des points de X^∞ par rapport à X_1, \dots, X_N : pour tout $x \in X^\infty$, pour tout $n \geq 0$, il existe un unique $\omega_n \in \{1, \dots, N\}$ tel que $F^n(x) \in X_{\omega_n} + \mathbb{Z}$. Le nombre de rotation de x se déduit de ce codage en utilisant le fait que :

$$\forall n \geq 0, F^n(x) \in X_{\omega_n} + p_{\omega_0} + p_{\omega_1} + \dots + p_{\omega_{n-1}}.$$

L'étape suivante est l'étude de l'ensemble de rotation de $X_1 \cap X^\infty$. Il est important de commencer par X_1 qui est l'intervalle le plus près de $\min X$. Par définition, $T_{\mathbb{R}}$ est F -invariant et $\min X$ appartient à $T_{\mathbb{R}}$, donc $F^n(\min X)$ appartient à $T_{\mathbb{R}}$ pour tout $n \geq 0$. Il s'ensuit que, si I est un sous-intervalle de X d'extrémité $\min X$, alors $F(I) \cap X$ est soit vide, soit un intervalle d'extrémité $\min X$. Cette observation simple permet l'étude du « bas » de l'intervalle X . Nous allons en expliquer les grandes lignes.

Supposons que l'ensemble de rotation de $X_1 \cap X^\infty$ est non vide. On peut se ramener à $p_1 = 0$. Par le lemme 4.1.4, $F(X_1) \cap X$ est un sous-intervalle de X d'extrémité $\min X$. On distingue deux cas selon que $F(X_1) \cap X \ll \text{avance} \gg$ plus ou moins loin dans X .

Cas 1 : $F(X_1) \cap X_2 = \emptyset$. Dans ce cas, $F(X_1 \cap X^\infty) \subset X_1$ et, pour tout $n \geq 1$, $F^n(X_1 \cap X^\infty) \subset X_1$. Donc, pour tout $x \in X_1 \cap X^\infty$, $\rho_F(x)$ existe et vaut 0. D'où

$$\text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}(F) = \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^+(F) = \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^-(F) = \{0\}.$$

Cas 2 : $F(X_1) \cap X_2 \neq \emptyset$. Comme $X_2 > X_1$ et $F(\min X_1) = \min X$, ceci implique

$$X_1 \xrightarrow[F]{+} X_1. \quad (4.1)$$

En particulier, $0 \in \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}(F)$. Soit $M = \sup \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^+(F)$ et supposons $M > 0$. Il existe $y \in X_1 \cap X^\infty$ tel que $\bar{\rho}_F(y)$ est arbitrairement proche de M . Soit $(\omega_n)_{n \geq 0}$ son itinéraire. Remarquons que ω_n prend des valeurs différentes de 1 une infinité de fois, sinon on aurait $F^n(y) \in X_1$ pour tout $n \geq 0$, et donc $\rho_F(y) = 0$, ce qui est exclu si $\bar{\rho}_F(y)$ est suffisamment proche de $M > 0$. Comme

$$\bar{\rho}_F(y) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_{\omega_0} + p_{\omega_1} + \cdots + p_{\omega_{n-1}}}{n},$$

il est possible, moyennant un petit argument technique, de trouver un entier n qui vérifie $\frac{p_{\omega_0} + p_{\omega_1} + \cdots + p_{\omega_{n-1}}}{n} \geq M - \varepsilon$ et $\omega_n \neq 1$. Le point $F^n(y)$ appartient à $X_{\omega_n} + p_{\omega_0} + \cdots + p_{\omega_{n-1}}$. En particulier, si on pose $N = p_{\omega_0} + \cdots + p_{\omega_{n-1}}$, on a $F^n(y) - N > \max X_1$ puisque $X_{\omega_n} > X_1$. En posant $I = [\min X_1, y]$ et en utilisant le fait que $F(\min X_1) \in T_{\mathbb{R}}$, on a alors

$$I \xrightarrow[F^n]{+} X_1 + N. \quad (4.2)$$

Comme $I \subset X_1$, les équations (4.1) et (4.2) impliquent que

$$X_1 \xrightarrow[F^n]{+} X_1, \quad X_1 \xrightarrow[F^n]{+} I, \quad I \xrightarrow[F^n]{+} X_1 + N, \quad I \xrightarrow[F^n]{+} I + N. \quad (4.3)$$

En appliquant le lemme 4.1.3 avec $G = F^n$, on obtient des points périodiques (mod 1) de nombre de rotation r pour tout rationnel $r \in [0, M - \varepsilon]$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que cette propriété est vraie pour tout rationnel dans $[0, M]$. La combinaison des recouvrements positifs de (4.3) permet également de réaliser tout réel de $[0, M]$ comme nombre de rotation d'un point de $X_1 \cap X^\infty$. Un raisonnement analogue peut être fait avec l'intervalle $[m, 0]$, où $m = \inf \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^-(F)$, ce qui permet de déduire que $[m, M] \subset \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}(F)$. Or $[m, M] = [\inf \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^-(F), \sup \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^+(F)] \supset \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^-(F) \cup \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^+(F)$. D'où

$$\text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}(F) = \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^+(F) = \text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}^-(F) = [m, M].$$

De plus, pour tout $r \in]m, M[\cap \mathbb{Q}$, il existe un point périodique (mod 1) dans $X_1 \cap X^\infty$ dont le nombre de rotation est r . L'étude des extrémités de $\text{Rot}_{X_1 \cap X^\infty}(F)$ nécessite, comme pour $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$, une étude séparée, que nous ne détaillerons pas ici ; on montre que si M (resp. m) est un rationnel alors il existe un point périodique (mod 1) de nombre de rotation M (resp. m).

Une fois qu'on a traité X_1 , l'idée est de traiter inductivement les ensembles de rotation de X_i , $2 \leq i \leq N$, en remplaçant $T_{\mathbb{R}}$ par un ensemble F -invariant T_i contenant à la fois $T_{\mathbb{R}}$ et X_1, \dots, X_{i-1} . On aboutit finalement au résultat suivant.

Théorème 4.1.5 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1^\sigma(T)$. Il existe I_0, \dots, I_k (avec $k \geq 0$) des intervalles compacts non vides de \mathbb{R} tels que :*

- $\text{Rot}(F) = \text{Rot}^+(F) = \text{Rot}^-(F) = I_0 \cup \dots \cup I_k$,
- $I_0 = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) = \text{Rot}_{T_{\mathbb{R}}}(F)$,
- $\forall 1 \leq i \leq k, \forall r \in I_i \cap \mathbb{Q}$, il existe un point périodique (mod 1) $x \in X^\infty$ avec $\rho_F(x) = r$,
- $\forall 1 \leq i \leq k, I_i \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.

De plus, si N est l'entier donné par le lemme 4.1.4, alors $k \leq N$.

Nous faisons remarquer que les intervalles I_0, \dots, I_k ne sont pas nécessairement disjoints. En particulier, $I_0 = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$ n'est pas toujours une composante connexe de $\text{Rot}(F)$.

4.2 Applications des graphes soleil

Un graphe soleil est composé d'un cercle et d'un nombre fini d'intervalles compacts disjoints attachés au cercle par une de leurs extrémités (figure 4.3). Le graphe σ traité dans la sec-

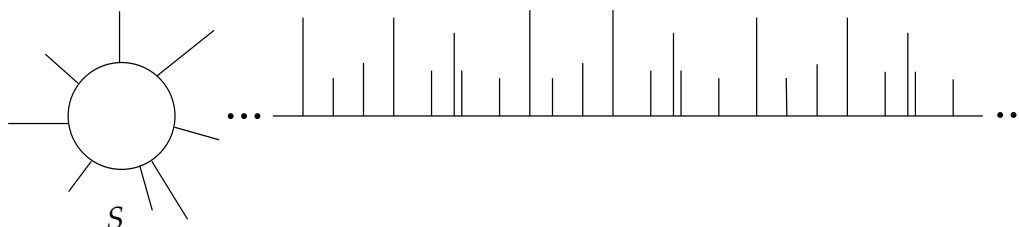


FIGURE 4.3 – Un graphe soleil à gauche, et son recouvrement universel à droite.

tion précédente est un graphe soleil avec un seul « rayon ». Dans cette section, nous montrons que, quand T est le recouvrement universel d'un graphe soleil, l'ensemble de rotation d'une transformation $F \in \mathcal{C}_1(T)$ est l'union d'un nombre fini d'intervalles compacts. De plus, tout rationnel de $\text{Rot}(F)$, sauf éventuellement un nombre fini, est le nombre de rotation d'un point périodique (mod 1). Les preuves s'étendent à une classe de transformations que nous appelons soleil-ressemblantes.

4.2.1 Applications soleil-ressemblantes

Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ un graphe infini et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Les ensembles $T_{\mathbb{R}}$ et X sont définis comme en section 4.1.1.

Si T est le revêtement universel d'un graphe soleil, X est une union finie (éventuellement vide) d'intervalles compacts disjoints ayant chacun une extrémité dans $T_{\mathbb{R}}$. Nous dirons qu'une application est soleil-ressemblante si elle vérifie la même propriété.

Définition 4.2.1 Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Si X est composé d'un nombre fini d'intervalles compacts disjoints $(X^i)_{i \in \Lambda}$ tels que $\forall i \in \Lambda, X^i \cap T_{\mathbb{R}}$ est réduit à une extrémité de X^i , alors F est une application *soleil-ressemblante*.

Les intervalles $(X^i)_{i \in \Lambda}$ sont appelés les *rayons* de F . L'ensemble des applications soleil-ressemblantes sur T est noté $\mathcal{C}_1^S(T)$.

Soit $F \in \mathcal{C}_1^S(T)$ et $(X^i)_{i \in \Lambda}$ les rayons de F . Chaque X^i est un intervalle compact non vide et tout homéomorphisme $h: X^i \rightarrow h(X^i) \subset \mathbb{R}$ permet de munir X^i d'un ordre linéaire. On obtient ainsi deux ordres opposés sur X^i , on choisit celui pour lequel le minimum de X^i est égal à $X^i \cap T_{\mathbb{R}}$ (qui est une extrémité de X^i).

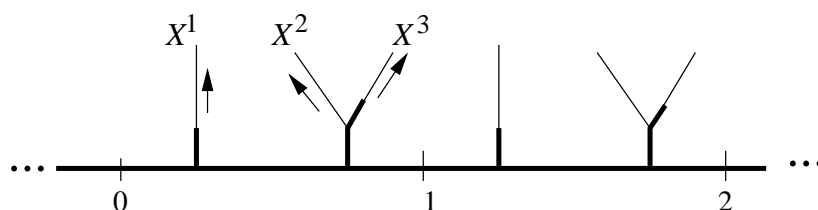


FIGURE 4.4 – Illustration d'une application soleil-ressemblante, avec $T_{\mathbb{R}}$ en gras et trois rayons X^1, X^2, X^3 en traits fins, avec une flèche pour indiquer l'ordre choisi sur ces intervalles.

4.2.2 Graphe de recouvrement

Comme pour les applications σ -ressemblantes, il suffit d'étudier l'ensemble de rotation de $X^\infty = \{x \in X \mid \forall n \geq 1, F^n(x) \in X + \mathbb{Z}\}$ car $\text{Rot}(F) = \text{Rot}_{\mathbb{R}}(F) \cup \text{Rot}_{X^\infty}(F)$. La première étape consiste, de nouveau, à partitionner X . Les différents rayons étant disjoints, y compris à leur extrémité, il n'y a pas de difficulté supplémentaire par rapport au cas d'un rayon unique.

Lemme 4.2.2 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1^S(T)$. Pour tout rayon X^i , il existe $X_1^i, \dots, X_{N_i}^i \subset X^i$ des sous-intervalles compacts non vides (avec $N_i \geq 0$) et, pour tout $1 \leq j \leq N_i$, il existe $\ell(X_j^i) \in \Lambda$ et $p(X_j^i) \in \mathbb{Z}$ tels que*

- i) $X_1^i < X_2^i < \dots < X_{N_i}^i$ (pour l'ordre dans X^i),
- ii) $F(X_j^i) \subset \left(X^{\ell(X_j^i)} + p(X_j^i) \right) \cup \text{Int}(T_{\mathbb{R}})$,
- iii) $F(\min X_j^i) = \min X^{\ell(X_j^i)} + p(X_j^i)$,
- iv) $F \left(X \setminus \bigcup_{i \in \Lambda, 1 \leq j \leq N_i} X_j^i \right) \cap (X + \mathbb{Z}) = \emptyset$.

On note $\mathcal{P} = \{X_j^i \mid i \in \Lambda, 1 \leq j \leq N_i\}$. Les orbites des points de X^∞ peuvent être codées par rapport à la partition \mathcal{P} : si $x \in X^\infty$, le lemme 4.2.2 implique que pour tout $n \geq 0$, il existe un unique élément $A_n \in \mathcal{P}$ tel que $F^n(x) \in A_n + \mathbb{Z}$. La suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est appelée l'*itinéraire* de x . On a :

$$\forall n \geq 0, F^n(x) \in A_n + p(A_0) + p(A_1) + \dots + p(A_{n-1}),$$

ce qui permet de calculer le nombre de rotation d'un point à partir de son itinéraire. On note Σ l'ensemble des itinéraires des points de X^∞ .

L'étape suivante consiste à associer un graphe (symbolique) orienté à Σ . Pour illustrer l'idée, plaçons-nous d'abord dans le cas markovien : supposons que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}, F(A) \cap (B + p(A)) \neq \emptyset \implies F(A) \supset B + p(A)$$

(rappelons que $p(A)$ est l'unique entier p pour lequel $F(A) \cap (B + p)$ peut être non vide). On peut alors montrer que Σ est une chaîne de Markov topologique, son graphe de Markov \mathcal{G} a pour sommets les éléments de \mathcal{P} et, si $A, B \in \mathcal{P}$, il y a une flèche $A \rightarrow B$ dans \mathcal{G} si et seulement si $F(A) \supset B + p(A)$. L'ensemble Σ est exactement l'ensemble des chemins infinis dans \mathcal{G} , c'est-à-dire les suites $(A_n)_{n \geq 0}$ avec $A_n \in \mathcal{P}$ et $A_n \rightarrow A_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Dans le cas général, un tel graphe n'existe pas. Nous allons néanmoins définir un graphe orienté dénombrable, appelé *graphe de recouvrement*, tel que les itinéraires de Σ se représentent

par des chemins infinis dans ce graphe. Le graphe de recouvrement \mathcal{G} associé à Σ se construit par niveaux, indexés par les entiers naturels. Les sommets de niveau n sont un sous-ensemble des mots $A_0 \dots A_n$, avec $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{P}$. Nous aurons besoin des notations suivantes.

Définition 4.2.3 Soit $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{P}$ et $\alpha = A_0 \dots A_n$. On note $p(\alpha) = p(A_n)$ et

$$\langle \alpha \rangle = \langle A_0 A_1 \dots A_n \rangle = \{x \in A_n \mid \exists y \in F^{-n}(x), \forall 0 \leq i \leq n, F^i(y) \in A_i + \mathbb{Z}\}$$

($\langle \alpha \rangle$) est l'ensemble des points de A_n admettant $A_0 A_1 \dots A_n$ comme « itinéraire passé ».

Nous définissons le graphe \mathcal{G} comme suit. Au niveau 0, les sommets sont les éléments de \mathcal{P} . Soit $A, B \in \mathcal{P}$. On met une flèche $A \rightarrow B$ si $F(A) \supset B + p(A)$. Si $F(A) \cap (B + p(A)) \neq \emptyset$ mais $F(A) \not\supset B + p(A)$, alors on ajoute le sommet AB au niveau 1 et on met une flèche $A \rightarrow AB$. On obtient ainsi tous les sommets de niveau 1 et toutes les flèches partant du niveau 0.

Supposons qu'on ait défini les sommets jusqu'au niveau n . Soit $\alpha = A_0 A_1 \dots A_n$ un sommet de niveau n et $B \in \mathcal{P}$. Si $F(\langle \alpha \rangle) \cap (B + p(\alpha)) \neq \emptyset$ alors

- si $F(\langle \alpha \rangle) \supset B + p(\alpha)$, on met une flèche $A_0 A_1 \dots A_n \rightarrow B$ (du niveau n vers le niveau 0),
- sinon, on ajoute le sommet $A_0 \dots A_n B$ au niveau $n+1$ et on met une flèche $A_0 A_1 \dots A_n \rightarrow A_0 \dots A_n B$ (du niveau n vers le niveau $n+1$).

On obtient de cette façon tous les sommets de niveau $n+1$.

Il peut arriver que la construction s'arrête, mais en général on obtient un nombre infini de niveaux.

Remarque 4.2.4 Cette construction s'inspire des diagrammes de Markov pour les transformations de l'intervalle introduit par Hofbauer et généralisés par Buzzi, que nous avons présentés en section 2.1. Notre but est très différent, et le graphe est défini de façon un peu différente. Le diagramme de Markov des transformations de l'intervalle a été utilisé pour étudier les mesures d'entropie maximales; la partition \mathcal{P} est constituée de sous-intervalles sur lesquels la transformation est monotone; dans la construction de Hofbauer (resp. de Buzzi), deux mots $\alpha = A_0 \dots A_n$ et $\beta = B_0 \dots B_m$ correspondent au même sommet dès que $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ (resp. $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \langle A_{n-i} \dots A_n \rangle$ pour un $i \geq 0$ vérifiant $A_{n-i} \dots A_n = B_{m-i} \dots B_m$). Dans le graphe de recouvrement que nous définissons, il n'y a d'identification qu'au niveau 0 (mettre une flèche $A_0 \dots A_n \rightarrow B$ revient à identifier $A_0 \dots A_n B$ et B ; dans ce cas, on a $\langle A_0 \dots A_n B \rangle = B$). Le graphe, *a priori* plus gros, a de ce fait une structure particulièrement simple, les flèches qui n'avancent pas d'un niveau revenant nécessairement au niveau 0.

Définition 4.2.5 Un *chemin* (fini) dans \mathcal{G} est une suite de sommets $\alpha_0 \dots \alpha_n$ avec $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. On définit de même un chemin infini $(\alpha_n)_{n \geq 0}$. On note $\Gamma(\mathcal{G})$ l'ensemble des chemins infinis dans \mathcal{G} .

Si $(A_n)_{n \geq 0} \in \Sigma$, on peut lui associer un chemin infini dans \mathcal{G} de la façon suivante : le chemin part de A_0 , le sommet suivant est A_1 si $A_0 \rightarrow A_1$ ou $A_0 A_1$ sinon, et plus généralement, si α est le sommet correspondant à A_n , le sommet suivant est l'unique mot β finissant par A_{n+1} tel que $\alpha \rightarrow \beta$. Réciproquement, si on a un chemin infini dans \mathcal{G} partant du niveau 0, on obtient l'itinéraire associé en ne gardant que le dernier symbole des mots composant les sommets du chemin.

Proposition 4.2.6 *Il y a une bijection entre les itinéraires de Σ et les chemins infinis partant du niveau 0 dans \mathcal{G} .*

Le graphe \mathcal{G} a été construit de façon à obtenir la propriété suivante, qui justifie le nom de « graphe de recouvrement ».

Lemme 4.2.7 *Soit α, β des sommets de \mathcal{G} tels que $\alpha \rightarrow \beta$. Alors $\langle \alpha \rangle \xrightarrow{+}_F \langle \beta \rangle + p(\alpha)$.*

Étudions les arêtes issues d'un sommet de niveau 0. Si $A \in \mathcal{P}$ alors, par le lemme 4.2.2, $F(A)$ rencontre un seul rayon, qui est $X^\ell + p$ avec $p = p(A)$ et $\ell = \ell(A)$. De plus, $F(\min A) \in T_{\mathbb{R}}$, donc $F(A) \cap (X^\ell + p)$ est un sous-intervalle de $X^\ell + p$ d'extrémité $\min X^\ell + p$. Par conséquent, les éléments de $\mathcal{P} + \mathbb{Z}$ intersectés $F(A)$ sont exactement de la forme $X_1^\ell + p, X_2^\ell + p, \dots, X_k^\ell + p$ pour un certain $k \leq N_i$, et $F(A)$ contient entièrement ces intervalles sauf éventuellement le dernier, ce qui se traduit dans le graphe \mathcal{G} par les flèches $A \rightarrow X_j^\ell$, $1 \leq j \leq k - 1$; pour le dernier intervalle, on a la flèche $A \rightarrow X_k^\ell$ si $F(A) \supset X_k^\ell + p$, ou la flèche $A \rightarrow AX_k^\ell$ sinon.

On peut montrer que $\langle A_0 \dots A_n \rangle$ est un sous-intervalle compact de A_n d'extrémité $\min A_n$, ce qui implique, à tous les niveaux du graphe, une propriété identique à celle qu'on vient de montrer au niveau 0. On en déduit la structure du graphe de recouvrement, énoncée dans la proposition suivante et illustrée en figure 4.5.

Proposition 4.2.8 *Soit $\alpha = A_0 \dots A_n$ un sommet de \mathcal{G} et $\ell = \ell(\alpha)$. Il existe un entier k tel que les flèches partant de α sont exactement :*

- $\alpha \rightarrow X_i^\ell$, $1 \leq i \leq k$ (du niveau n vers le niveau 0),
- éventuellement une flèche $\alpha \rightarrow A_0 \dots A_n X_{k+1}^\ell$ (du niveau n vers le niveau $n + 1$).

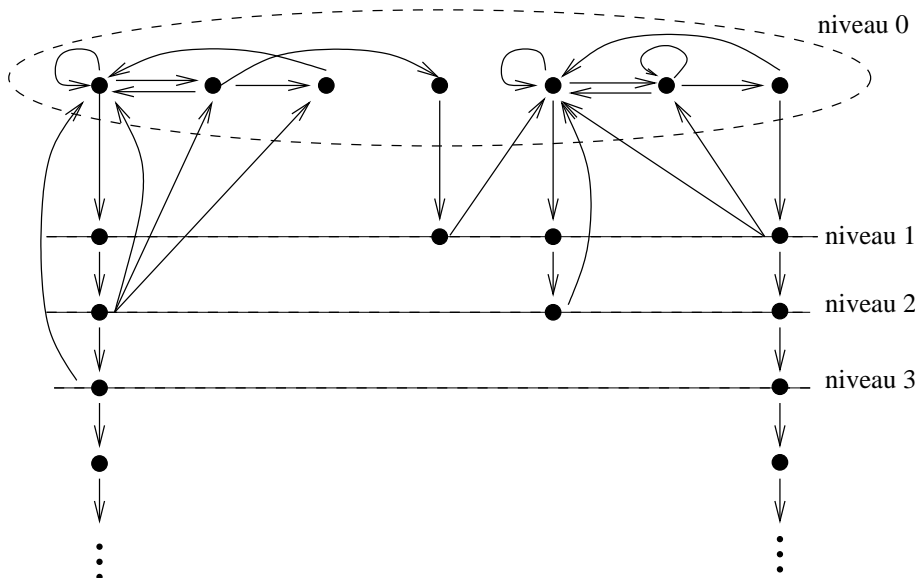


FIGURE 4.5 – La structure du graphe de recouvrement.

Remarque 4.2.9 Nous dirons que F oscille entre deux ensembles A et B s'il existe deux suites de points $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ convergeant toutes les deux vers un même point et telles que, pour tout $n \geq 0$, $F(a_n) \in \text{Int}(A)$ et $F(b_n) \in \text{Int}(B)$. Dans un graphe soleil, deux rayons différents ne rencontrent pas le cercle au même point. De même, les rayons d'une application soleil-ressemblantes n'ont pas d'extrémité commune dans $T_{\mathbb{R}}$. Cette propriété empêche F d'osciller entre deux rayons et permet de partitionner les rayons dans le lemme 4.2.2. Ceci n'est plus

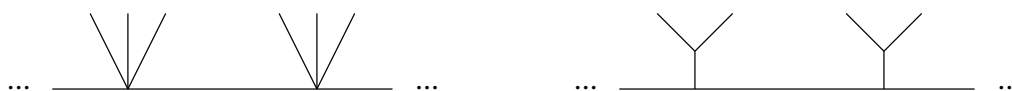


FIGURE 4.6 – Graphes dont les composantes connexes de $T \setminus \mathbb{R}$ ne sont pas des intervalles.

vrai si deux rayons ont les mêmes extrémités (comme à gauche de la figure 4.6). Nous pensons que ce problème technique peut être surmonté en traitant à part les oscillations. Une difficulté plus importante survient quand les composantes connexes de $T \setminus T_{\mathbb{R}}$ ne sont plus des intervalles (graphe à droite de la figure 4.6) car les graphes de recouvrement qu'on peut définir ne sont plus aussi simples – on n'a pas l'analogie de la proposition 4.2.8.

4.2.3 Ensemble de rotation du graphe de recouvrement

Définition 4.2.10 Soit $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n \geq 0} \in \Gamma(\mathcal{G})$. Le nombre de rotation de $\bar{\alpha}$, quand il existe, est

$$\rho(\bar{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(\alpha_0) + p(\alpha_1) + \dots + p(\alpha_{n-1})}{n}.$$

Un chemin $\gamma = \alpha_0 \dots \alpha_n$ est une boucle si $\alpha_0 = \alpha_n$. En parcourant cette boucle une infinité de fois, on obtient un chemin infini γ^∞ , de nombre de rotation $\rho(\gamma^\infty) = \frac{p(\alpha_0) + p(\alpha_1) + \dots + p(\alpha_{n-1})}{n}$. Ainsi, un chemin périodique a un nombre de rotation rationnel. Par ailleurs, la bijection de la proposition 4.2.6 fait correspondre l'itinéraire d'un point $x \in X^\infty$ avec un chemin $\bar{\alpha} \in \Gamma(\mathcal{G})$ partant du niveau 0 tel que $\rho_F(x) = \rho(\bar{\alpha})$. Comme tout chemin infini a le même nombre de rotation qu'un chemin infini partant du niveau 0, nous sommes ramenés à étudier l'ensemble de rotation de $\Gamma(\mathcal{G})$. Les composantes connexes joueront un rôle important dans cette étude.

Définition 4.2.11 Un graphe orienté est *fortement connexe* si pour tout couple de sommets (u, v) il existe un chemin de u vers v . Les *composantes connexes* d'un graphe orienté sont les sous-graphes fortement connexes maximaux.

Pour commencer avec un cas simple, supposons que \mathcal{G} est fini et regardons ce que vaut l'ensemble de rotation de $\Gamma(\mathcal{G})$. Pour tout chemin infini $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n \geq 0}$, il existe un sommet A tel que $\alpha_n = A$ pour une infinité de n (car le nombre de sommets est fini). De plus, le nombre de rotation de $\bar{\alpha}$ est égal à celui de $(\alpha_n)_{n \geq k}$, donc on peut supposer que $\alpha_0 = A$. Le chemin $\bar{\alpha}$ se décompose alors en boucles d'extrémité A , et ces boucles se décomposent elles-mêmes en boucles élémentaires, c'est-à-dire des boucles ne passant pas deux fois par un même sommet. On peut démontrer que $\rho(\bar{\alpha})$ s'exprime comme un barycentre de

$$\{\rho(\epsilon^\infty) \mid \epsilon \text{ boucle élémentaire de la composante connexe de } \mathcal{G} \text{ contenant } A\}.$$

Comme le graphe est fini, les boucles élémentaires sont en nombre fini.

Si ϵ, ϵ' sont deux boucles commençant à un même sommet, on peut les combiner en parcourant k fois l'une et k' fois l'autre et, de cette façon, obtenir une boucle dont le nombre de rotation est n'importe quel rationnel compris entre $\rho(\epsilon^\infty)$ et $\rho(\epsilon'^\infty)$. On peut également construire un chemin infini dont le nombre de rotation est un réel fixé entre $\rho(\epsilon^\infty)$ et $\rho(\epsilon'^\infty)$. Cela marche même si ϵ, ϵ' ne commencent pas au même sommet, il suffit d'ajouter un chemin pour passer d'une boucle à une autre et ne pas changer de boucle trop fréquemment de sorte que les chemins ajoutés n'aient pas d'influence sur la limite. Plus généralement, on peut combiner les boucles élémentaires d'une même composante connexe, ce qui permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 4.2.12 *Si \mathcal{G} est un graphe orienté fini, $\{\rho(\bar{\alpha}) \mid \bar{\alpha} \in \Gamma(\mathcal{G})\}$ est égal à une union finie d'intervalles compacts, ces intervalles étant chacun l'ensemble de rotation d'une composante connexe de \mathcal{G} . De plus, si r est un nombre de rotation rationnel, il existe une boucle γ telle que $\rho(\gamma^\infty) = r$.*

Dans le cas général, le graphe de recouvrement est infini. Néanmoins il est peu ramifié à l'infini : si on part d'un sommet A au niveau 0, il y a un unique chemin $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, fini ou infini, commençant en A et tel que α_n est un sommet de niveau n . Les autres arêtes dans le graphe \mathcal{G} ont pour extrémité finale un sommet de niveau 0. Notons

$$\mathcal{I} = \{(\alpha_n)_{n \geq 0} \in \Gamma(\mathcal{G}) \mid \forall n \geq 0, \alpha_n \text{ est de niveau } n\}.$$

(\mathcal{I} est l'ensemble des chemins infinis allant « tout droit » vers l'infini).

Alors, si $(\alpha_n)_{n \geq 0} \in \Gamma(\mathcal{G})$,

- i) soit il existe $k \geq 0$ tel que $(\alpha_n)_{n \geq k}$ coïncide avec la fin d'un chemin de \mathcal{I} ,
- ii) soit α_n est un sommet de niveau 0 pour une infinité de n .

\mathcal{I} est un ensemble fini (borné par $\#\mathcal{P}$), et un chemin dans le cas (i) a le même nombre de rotation que le chemin de \mathcal{I} correspondant. Donc l'ensemble de rotation des chemins dans le cas (i) est égal à l'ensemble de rotation $\{\rho(\bar{\alpha}) \mid \bar{\alpha} \in \mathcal{I} \text{ et } \rho(\bar{\alpha}) \text{ existe}\}$, qui est un ensemble fini.

Comme le nombre de sommets de niveau 0 est fini, un chemin dans le cas (ii) passe une infinité de fois par un même sommet A de niveau 0. Ceci implique que tous les sommets entre deux passages en A appartiennent à la composante connexe de A . Par conséquent, il existe une composante connexe de \mathcal{G} telle que α_n appartienne à cette composante pour tout n assez grand. De plus, les composantes connexes contenant toutes un sommet de niveau 0, elles sont en nombre fini (borné par $\#\mathcal{P}$). L'ensemble de rotation d'une composante connexe s'obtient en décomposant les chemins en boucles d'extrémité un sommet de niveau 0. De façon similaire au cas des graphes finis, on montre que l'ensemble de rotation est un intervalle compact, et les rationnels à l'intérieur de cet intervalle sont obtenus comme nombre de rotation d'une boucle. Seules les extrémités rationnelles de l'intervalle posent problème dans le cas d'une composante connexe infinie. On obtient le résultat suivant, dans lequel l'ensemble exceptionnel E est constitué des extrémités des intervalles de rotation des composantes connexes ainsi que des nombres de rotation des chemins de \mathcal{I} .

Théorème 4.2.13 *L'ensemble de rotation de $\Gamma(\mathcal{G})$ est une union finie d'intervalles compacts. Il existe un ensemble fini E tel que, pour tout nombre de rotation rationnel r avec $r \notin E$, il existe une boucle γ de \mathcal{G} tel que $\rho(\gamma^\infty) = r$.*

Remarque 4.2.14 Si on considère un chemin $\bar{\alpha} = (\alpha_n)_{n \geq 0} \in \Gamma(\mathcal{G})$ dans le cas (ii) ci-dessus, le temps entre deux passages au niveau 0 peut être *a priori* non borné. Quand $\rho(\bar{\alpha})$ n'existe pas, ceci empêche de calculer $\bar{\rho}(\bar{\alpha})$ et $\underline{\rho}(\bar{\alpha})$ (donnés par les limites sup et inf dans la définition 4.2.10) en fonction des nombres de rotation des boucles élémentaires. On ne sait pas si l'ensemble des $\bar{\rho}(\bar{\alpha})$ (resp. $\underline{\rho}(\bar{\alpha})$) des chemins $\bar{\alpha}$ dans une composante connexe est égal à l'ensemble des $\rho(\bar{\alpha})$. De plus, si $\bar{\alpha} \in \mathcal{I}$, on ne sait pas si $\rho(\bar{\alpha})$ existe (autrement dit, si $\bar{\rho}(\bar{\alpha}) = \underline{\rho}(\bar{\alpha})$). Ces deux situations problématiques n'apparaissent pas dans le cas d'un graphe fini. On conjecture que ces situations ne se produisent pas non plus dans le cas général, et qu'on peut prendre $E = \emptyset$ dans le théorème 4.2.13.

4.2.4 Ensemble de rotation d'une application soleil-ressemblante

Maintenant que nous avons étudié l'ensemble de rotation du graphe de recouvrement \mathcal{G} , il nous reste à traduire ces résultats pour une application F soleil-ressemblante. Nous avons vu au début de la section 4.2.3 que, grâce à la bijection de la proposition 4.2.6, l'ensemble de rotation de $\Gamma(\mathcal{G})$ est égal à $\text{Rot}_{X^\infty}(F)$. Par conséquent, le théorème 4.2.13 implique que $\text{Rot}_{X^\infty}(F)$ est une union finie d'intervalles compacts.

Qu'en est-il des points rationnels? Si $\gamma = \alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n$ est une boucle dans \mathcal{G} alors, par le lemme 4.2.7, on a

$$\langle \alpha_0 \rangle \xrightarrow{+}_F \langle \alpha_1 \rangle + p(\alpha_0) \xrightarrow{+}_F \langle \alpha_2 \rangle + p(\alpha_0) + p(\alpha_1) \xrightarrow{+}_F \cdots \xrightarrow{+}_F \langle \alpha_n \rangle + p(\alpha_0) + \cdots + p(\alpha_{n-1}),$$

avec $\alpha_n = \alpha_0$. Donc, selon la proposition 3.4.3, il existe un point x_0 dans l'intervalle $\langle \alpha_0 \rangle$ tel que $F^n(x_0) = x_0 + p(\alpha_0) + \cdots + p(\alpha_{n-1})$, ce qui implique que $\rho_F(x) = \rho(\gamma^\infty)$. En combinant ce résultat avec le théorème 4.2.13, on voit que tout rationnel dans $\text{Rot}_{X^\infty}(F) \setminus E$ est réalisé par un point périodique (mod 1). On obtient finalement le théorème suivant en ajoutant ce qu'on sait déjà pour $\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F)$.

Théorème 4.2.15 *Soit $T \in \mathbf{T}^\circ$ et $F \in \mathcal{C}_1^S(T)$. Alors $\text{Rot}(F)$ est une union finie d'intervalles compacts, et il existe un ensemble fini E tel que, pour tout rationnel $r \in \text{Rot}(F) \setminus E$, il existe un point périodique (mod 1) $x \in T$ tel que $\rho_F(x) = r$.*

Remarque 4.2.16 Contrairement aux applications σ -ressemblantes (théorème 4.1.5), on ne sait pas si $\text{Rot}(F)$ est égal à $\text{Rot}^+(F)$ et $\text{Rot}^-(F)$. Ceci découle de la remarque 4.2.14. On ne sait pas non plus si on peut se débarrasser ou non de l'ensemble exceptionnel E . De ce fait, le théorème 4.2.15 appliqué à une application σ -ressemblante donne des conclusions moins fortes que le théorème 4.1.5.

Chapitre 5

Applications peignées

Malgré des similarités, l'ensemble de rotation d'une transformation de degré 1 sur un graphe topologique a en général de moins bonnes propriétés que l'intervalle de rotation d'une transformation du cercle. L'objectif de ce chapitre est d'introduire une classe de transformations, appelées *applications peignées*, qui exhibent exactement les mêmes propriétés que les transformations du cercle. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Lluís Alsedà, tiré de [8].

5.1 Fonctions d'eau pour les transformations du cercle

Les fonctions d'eau sont un outil puissant pour étudier l'ensemble de rotation d'une transformation du cercle de degré 1, ou de ses relevés. Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue de degré 1, les fonctions d'eau supérieure et inférieure associées à F sont les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_u(x) = \sup\{F(y) \mid y \leq x\} \quad \text{et} \quad F_l(x) = \inf\{F(y) \mid y \geq x\}.$$

La famille des fonctions d'eau (F_λ) est définie par $F_\lambda = (\min\{r \circ F, F_l + \lambda\})_u$. La définition de ces fonctions est illustrée en figure 5.1. On a $F_0 = F_l$, $F_\mu = F_u$ pour $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \|F - F_l\|_\infty$ et, $\forall 0 \leq \lambda \leq \lambda' \leq \mu$, $F_\lambda \leq F_{\lambda'}$. Les fonctions F_λ sont des applications continues, croissantes, de degré 1, ce qui implique qu'elles ont chacune un unique nombre de rotation, noté $\rho(F_\lambda)$ (voir [ALM00, Prop. 3.7.11]). Le théorème suivant caractérise l'ensemble de rotation de F à l'aide des fonctions d'eau et donne l'existence d'orbites bien ordonnées.

Théorème 5.1.1 (Chenciner, Gambaudo, Tresser [CGT84]) *Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue de degré 1, on a les propriétés suivantes :*

- i) $\text{Rot}(F) = [\rho(F_l), \rho(F_u)] = \{\rho(F_\lambda) \mid 0 \leq \lambda \leq \mu\}$,
- ii) $\forall \alpha \in \text{Rot}(F)$, il existe $\lambda \in [0, \mu]$ et $x \in \mathbb{R}$ de nombre de rotation α tel que F est strictement croissante sur $\mathcal{O}_1(x) = \{F^n(x) + k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ (orbite bien ordonnée) et coïncide avec F_λ sur cet ensemble,
- iii) $\forall \alpha \in \text{Rot}(F) \cap \mathbb{Q}$, le point x dans (ii) peut être choisi périodique (mod 1),

D'autres propriétés peuvent être démontrées grâce aux fonctions d'eau, notamment la dépendance continue des bornes de l'intervalle de rotation par rapport à la transformation.

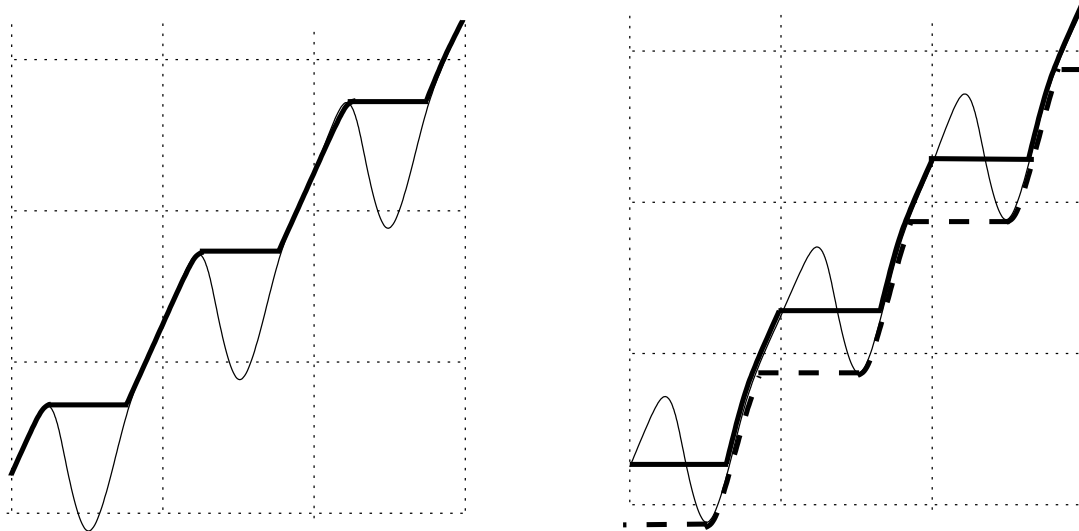


FIGURE 5.1 – À gauche, une application $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de degré 1 (trait fin) et sa fonction d'eau supérieure F_u (trait gras). À droite, la même application F avec sa fonction d'eau inférieure F_l (pointillés) et une fonction d'eau intermédiaire F_λ (trait gras). F_u et F_l donnent respectivement les nombres de rotation maximum et minimum, et F_λ donne un nombre de rotation intermédiaire.

5.2 Fonctions d'eau pour les transformations de graphes

Nous allons généraliser la notion de fonction d'eau pour les transformations d'espaces relevés $T \in \mathbf{T}$. Si $x, y \in T$, la relation $r(x) \leq r(y)$ définit un pré-ordre sur T , que nous notons $x \preceq y$.

Définition 5.2.1 Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Les fonctions $F_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_u(x) = \sup\{r(F(y)) \mid y \preceq x\} \quad \text{et} \quad F_l(x) = \inf\{r(F(y)) \mid y \succeq x\}.$$

Les applications F_u et F_l sont croissantes et vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in r^{-1}(x), F_l(x) \leq r(F(y)) \leq F_u(x). \quad (5.1)$$

Les applications F_u et F_l ne sont pas nécessairement continues (voir la figure 5.2). Ce sont néanmoins des relevés d'applications du cercle (non nécessairement continues) de degré 1. La croissance de F_u et F_l implique que les nombres de rotation $\rho_{F_u}(x)$ et $\rho_{F_l}(x)$ existent et sont indépendants de x [RT86, Theorem 1]. Ces nombres de rotation sont notés $\rho(F_u)$ et $\rho(F_l)$. L'encadrement 5.1 permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.2.2 Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. Alors $\text{Rot}(F) \subset [\rho(F_l), \rho(F_u)]$.

5.3 Applications peignées

La proposition 5.2.2 ne donne qu'une inclusion, parfois grossière. Le bon cadre pour utiliser les fonctions d'eau est celui des applications peignées.

Définition 5.3.1 Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in \mathcal{C}_1(T)$. L'application F est dite *peignée à gauche* (resp. *à droite*) au point $x \in \mathbb{R}$ si $r \circ F(\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\}) \supset r \circ F(r^{-1}(x))$ (resp. $r \circ F(\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq$

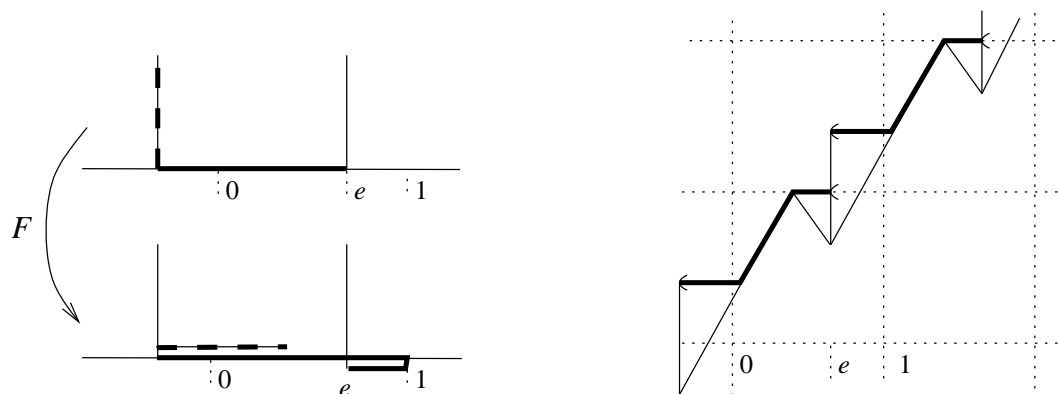


FIGURE 5.2 – À gauche, l’action d’une transformation $F: T \rightarrow T$. À droite, le graphe $\{(r(t), F(t)) \mid t \in T\}$ et l’application non continue F_u (trait gras).

$x\} \supset r \circ F(r^{-1}(x))$. L’application F est *peignée* si elle est peignée à gauche et à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$ est un point de branchement (c’est-à-dire si $r^{-1}(x) \neq \{x\}$), alors F est peignée à gauche en x si l’image de la branche en x ne « dépasse pas » vers la droite comparée à l’image de la demi-droite réelle $] -\infty, x]$. Être peigné à droite est la notion symétrique. L’application F de la figure 5.2 est peignée à droite mais pas à gauche. Si x n’est pas un point de branchement, F est par définition peignée à droite et à gauche en x .

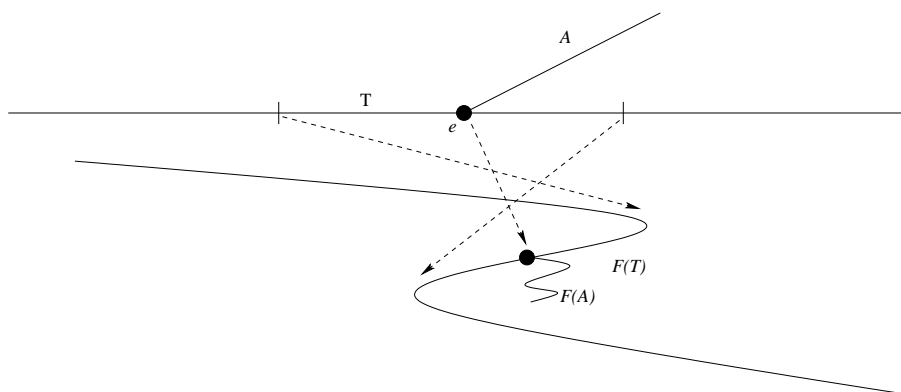


FIGURE 5.3 – L’image de la branche A est « cachée » à l’intérieur de $F(\mathbb{R})$, et F est peignée à gauche et à droite au point e (en réalité, $F(T)$ est dans T , la figure montre comment l’image se replie). Les fonctions F_u et F_l consistent à « regarder » le dessin en plaçant l’observateur au dessus ou en dessous.

Les fonctions F_u et F_l ne « voient » pas la différence entre une application peignée et une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de degré 1 (figure 5.3). En particulier, F_u (resp. F_l) est continue si et seulement si F est peignée à gauche (resp. à droite) en tout $x \in \mathbb{R}$. Dans le cadre des applications peignées, on peut adapter les preuves utilisant les fonctions d’eau des applications du cercle. Les principaux résultats obtenus sont les deux théorèmes suivants.

Théorème 5.3.2 Soit $T \in \mathbf{T}$ et $F \in C_1(T)$. Si F est peignée, on a les propriétés suivantes :

- i) $\text{Rot}(F)$ est un intervalle, égal à $[\rho(F_l), \rho(F_u)]$,

- ii) $\forall \alpha \in \text{Rot}(F)$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $\rho_F(x) = \alpha$ et tel que F est strictement croissante sur $\mathcal{O}_1(x) = \{F^n(x) + k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ et coïncide avec F_λ sur cet ensemble, pour un certain λ tel que $\rho(F_\lambda) = \alpha$,
- iii) $\forall \alpha \in \text{Rot}(F) \cap \mathbb{Q}$, le point x dans (ii) peut être choisi périodique (mod 1),
- iv) $\rho(F_l)$ et $\rho(F_u)$ dépendent de façon continue de F pour la topologie uniforme sur $\mathcal{C}_1(T)$.

Le théorème suivant caractérise les périodes pour les nombres de rotation à l'intérieur de l'intervalle de rotation. Si $a < b$, on note $M(a, b) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists k \in \mathbb{Z}, a < \frac{k}{n} < b\}$.

Théorème 5.3.3 Soit $T \in \mathbf{T}$, $F \in \mathcal{C}_1(T)$ une application peignée et $\text{Rot}(F) = [a, b]$.

- i) Si $p/q \in]a, b[$, avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et p, q premiers entre eux, alors $\text{Per}(p/q, F) = q\mathbb{N}^*$,
- ii) $\text{Per}(F) = \text{Per}(a, F) \cup M(a, b) \cup \text{Per}(b, F)$.

Remarque 5.3.4 Si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue de degré 1, on connaît la forme des ensembles $\text{Per}(a, F)$ et $\text{Per}(b, F)$ (voir le théorème 3.1.1). Dans le cas des applications peignées, les ensembles $\text{Per}(a, F)$ et $\text{Per}(b, F)$ ne sont pas caractérisés quand a ou b sont rationnels. Ils dépendent de la topologie de l'espace T .

Chapitre 6

Perspectives

Nous présentons dans cette partie quelques questions liées aux travaux présentés dans ce mémoire, qui se divisent en deux axes de recherche. La première section concerne les transformations de graphes topologiques, dans la continuation des travaux présentés dans les chapitres 3 à 5. La section suivante propose d'étudier, pour un système dynamique quelconque, des notions bien comprises sur l'intervalle, et présentées au chapitre 1, mais peu étudiées en général.

6.1 Transformations de graphes topologiques

Périodes pour les transformations de degré 1 du graphe σ

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, caractériser les ensembles de périodes pour les transformations de n'importe quel graphe topologique est un vaste problème. Le cas des arbres a été résolu récemment par Alsedà, Juher et Mumbrú [AJM03, AJM05a, AJM05b, AJM08], mais le chantier pour les autres graphes ne fait que commencer. L'approche que nous avons adoptée est de privilégier une boucle du graphe et de considérer le degré de la transformation par rapport à cette boucle. Quand le degré est 1, nous avons développé une théorie de rotation, qui marche quand le graphe G est « rétractable » sur la boucle S , c'est-à-dire que pour toute composante connexe C de $G \setminus S$, l'ensemble $\overline{C} \cap S$ est réduit à un point. Comme l'ensemble de rotation d'une transformation du cercle de degré 1 permet de caractériser l'ensemble des périodes (théorème 3.1.3), nous pensons que l'ensemble de rotation sur les graphes est un ingrédient essentiel pour étudier l'ensemble des périodes dans le cas du degré 1. Nous comptons nous attaquer dans un premier temps aux transformations de degré 1 sur le graphe σ , qui est le graphe avec une boucle le plus simple après le cercle. Les difficultés propres aux graphes apparaissent déjà pour le graphe σ . Notons $\text{Per}(\alpha, F)$ l'ensemble des périodes des points de nombre de rotation α périodiques (mod 1) pour F , et $\text{Per}(F)$ l'ensemble des périodes des points périodiques (mod 1) pour F . On sait que si $0 \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$ alors il existe N tel que $\text{Per}(0, F) \supset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\}$; des exemples montrent que cet entier N peut être arbitrairement grand. En revanche, si on considère les périodes pour n'importe quel nombre de rotation, on peut montrer que l'hypothèse $0 \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$ implique que $\text{Per}(F)$ contient tous les entiers à partir de 3. Ceci conduit naturellement à la conjecture suivante :

Conjecture. Si $p/q \in \text{Int}(\text{Rot}_{\mathbb{R}}(F))$, alors $\text{Per}(F)$ contient $\{nq \mid n \geq 3\}$.

De plus, on pense que les rationnels p/q pouvant « poser problème » (c'est-à-dire n'impliquant pas tous les multiples de q comme périodes) sont probablement en nombre fini. Si on arrive à montrer ce résultat, on obtiendra une première estimation de l'ensemble de périodes.

Une autre piste, complémentaire de la précédente, est de traiter séparément les orbites

périodiques de diamètre plus grand que 1 et les orbites périodiques de « petit » diamètre. Pour les grands diamètres, on a la conjecture suivante :

Conjecture. Si $F^n(x) = x$ et $\text{diam}(\{F^i(x) \mid 0 \leq i < n\}) \geq 1$ alors $\text{Per}(F)$ est égal à \mathbb{N}^* , $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ou $\mathbb{N}^* \setminus \{2\}$.

Quant aux orbites de petit diamètre, elles pourraient se ramener au cas du cercle ou du graphe en forme de Y , dont les périodes sont connues.

Enfin, on envisage de considérer, pour chaque orbite périodique (ou seulement les « petites » orbites) un sous-arbre fini du revêtement universel de σ qui contient un relèvement de cette orbite, puis faire une approche similaire à celle utilisée pour les arbres [AJM03, AJM05a, AJM05b, AJM08], ce qui permettrait de caractériser les ensembles de périodes à l'aide des ordres de Baldwin.

Transformations de graphes de degré différent de 1

Il faudrait étudier les transformations de graphes topologiques de degré différent de 1. Quand le degré est supérieur ou égal à 2, il semble qu'on ait exactement le même résultat que pour le cercle, à savoir que l'ensemble des périodes est \mathbb{N}^* . La situation n'est pas aussi simple pour un degré négatif, mais semble néanmoins assez proche du cas du cercle, ce qui permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture. Soit G un graphe topologique avec une unique boucle et $f: G \rightarrow G$ est une transformation de degré $d \leq -2$. Il existe un entier N dépendant uniquement de G tel que $\text{Per}(f) \supset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\}$. De plus, $\text{Per}(f) = \mathbb{N}^*$ si $|d|$ est assez grand.

On aimerait également déterminer les ensembles de périodes des transformations de degrés 0 et -1 . Pour une transformation du cercle de degré 0 ou -1 , les ensembles de périodes sont caractérisés par l'ordre de Sharkovskii, comme sur l'intervalle. Pour une transformation de graphe σ de degré 0 (resp. -1), on peut espérer montrer que les ensembles de périodes possibles sont les mêmes que les ensembles de périodes d'une transformation continue $f: T \rightarrow T$, où T est l'arbre en forme de Y , ou peut-être un arbre en forme de « peigne » (un peigne à n branches pouvant être décrit, dans \mathbb{C} , comme étant égal à $[0, n+1] \cup \bigcup_{k=1}^n (k + i[0, 1])$). Plus généralement :

Si G un graphe topologique avec une unique boucle, peut-on trouver un arbre (fini) T tel que les ensembles de périodes des transformations continues $f: G \rightarrow G$ de degré 0 (resp. -1) soient les mêmes que les ensembles de périodes des transformations continues $g: T \rightarrow T$?

Il est également possible que le cas du degré -1 conduise à une caractérisation différente du cas de degré 0.

Topologie de l'ensemble de rotation d'une transformation de graphe

Au vu des résultats pour les graphes σ et soleil, on peut formuler la conjecture suivante :

Conjecture. Soit $T \in \mathbf{T}^\Gamma$ et $F: T \rightarrow T$ une transformation de degré 1. Alors

- i) $\text{Rot}(F)$ est fermé et a un nombre fini de composantes connexes.
- ii) Pour tout $r \in \text{Rot}(F) \cap \mathbb{Q}$, il existe un point périodique (mod 1) de nombre de rotation r .

Le point (ii) n'est pas complètement montré pour les graphes soleil ; il reste à se débarrasser d'un ensemble exceptionnel de rationnels.

Pour généraliser les résultats déjà obtenus, la stratégie est d'une part de traiter le cas où la transformation oscille entre deux branches, d'autre part de trouver un codage adéquat et d'étudier le graphe de recouvrement associé (en particulier son comportement à l'infini).

Enfin, on aimerait savoir si les ensembles $\text{Rot}(F)$, $\text{Rot}^+(F)$ et $\text{Rot}^-(F)$ coïncident dans tous les cas.

6.2 Dynamique topologique abstraite

On considère un système dynamique (X, T) donné par une transformation continue T d'un espace compact métrique X dans lui-même. On note d la distance sur X .

Chaos dense

Rappelons qu'un système dynamique (X, T) est densément chaotique si l'ensemble des couples de Li-Yorke est dense dans $X \times X$. Le chaos dense n'a été étudié que sur l'intervalle [Sno92], [6]. Il serait intéressant d'analyser les propriétés du chaos dense pour un système dynamique topologique abstrait. On peut notamment se poser la question suivante :

Existe-t-il des systèmes dynamiques dans lesquels les couples de Li-Yorke forment un ensemble dense dénombrable ?

Si la réponse est affirmative, cela montrerait également que le chaos dense n'implique pas le chaos au sens de Li-Yorke. Remarquons qu'on connaît déjà des systèmes dynamiques ayant des ensembles brouillés au plus dénombrable (un ensemble S est brouillé si tout couple de points distincts de S est Li-Yorke) [BDM04]; mais dans ces exemples, les couples de Li-Yorke sont concentrés dans des fibres.

Chaos distributionnel

On ne sait pas encore bien comment le chaos distributionnel se positionne par rapport aux autres propriétés topologiques, sauf dans le cas des transformations de l'intervalle pour lesquelles les trois variantes du chaos distributionnel sont équivalentes à une entropie topologique non nulle [SS94]. En général on a uniquement des implications qui hiérarchisent les trois variantes de la plus forte à la plus faible. On conjecture qu'une entropie topologique non nulle implique au moins la forme la plus faible du chaos distributionnel; on sait que ce n'est pas vrai pour la forme la plus forte [FP98].

Quantifier la sensibilité

Enfin, il serait intéressant d'étudier la façon de quantifier la sensibilité des systèmes dynamiques topologiques. Récemment, T. K. Subrahmonian Moothathu a apporté un premier éclairage dans cette direction [Moo07], mais on sent que son approche ne capture qu'imparfaitement la plus ou moins grande sensibilité des systèmes dynamiques.

Glossaire

Dans ce glossaire, un système dynamique (X, T) est la donnée d'un espace métrique compact X et d'une application continue $T: X \rightarrow X$. La distance dans X est notée d .

Arbre. Un *arbre* est un graphe topologique sans boucle.

Boucle. Dans un graphe topologique, une *boucle* est un sous-espace homéomorphe à un cercle.

Chaos au sens de Li-Yorke. Le système (X, T) est *chaotique au sens de Li-Yorke* s'il existe un ensemble non dénombrable $S \subset X$ tel que, pour tous $x, y \in S, x \neq y$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

Chaos générique. Un système dynamique (X, T) est *génériquement chaotique* si l'ensemble des couples de Li-Yorke contient un G_δ dense de X^2 .

Chaos dense. Un système dynamique (X, T) est *densément chaotique* si l'ensemble des couples de Li-Yorke est dense dans X^2 .

Composante connexe d'un graphe orienté. Si G est un graphe orienté, une *composante connexe* de G est un sous-graphe fortement connexe qui est maximal pour l'inclusion.

Connexité forte. Un graphe orienté G est *fortement connexe* si pour tous sommets u, v de G , il existe un entier n et une suite de sommets $u_0 = u, u_1, \dots, u_n = v$ tels que $u_i \rightarrow u_{i+1}$ dans G .

Couple Li-Yorke. Si (X, T) est un système dynamique et $x, y \in X$, (x, y) est un *couple de Li-Yorke* si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0.$$

C^r . Si r est un réel positif, une fonction réelle f est dite C^r si f est C^n et $f^{(n)}$ est α -höldérienne avec $n = \lfloor r \rfloor$ et $\alpha = r - n \in [0, 1[$.

Dégénéré. Un intervalle est *dégénéré* s'il est vide ou réduit à un point.

Ensemble ω -limite. L'ensemble ω -limite d'un point x par l'application T est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n(x))_{n \geq 0}$.

Entropie topologique. Soit (X, T) un système dynamique. Si $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_p\}$ et $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_q\}$ sont des recouvrements ouverts de X , on définit le recouvrement ouvert $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U_i \cap V_j \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$. On note

$$N(\mathcal{U}) = \min\{n \mid \exists i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, p\}, X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}\}$$

et $N_n(\mathcal{U}) = N(\mathcal{U} \vee T^{-1}\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{U})$. L'entropie du recouvrement \mathcal{U} est donnée par

$$h_{top}(\mathcal{U}, T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log N_n(\mathcal{U})}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{\log N_n(\mathcal{U})}{n},$$

et l'entropie topologique du système (X, T) est définie comme

$$h_{top}(X, T) = \sup\{h_{top}(\mathcal{U}, T) \mid \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert fini de } X\}.$$

Entropie uniformément positive. Voir upe.

Étoile. Une *étoile à n branches* est un graphe topologique formé de n segments recollés chacun par une extrémité à un point central.

Expansif. Le système dynamique (X, T) est *expansif* (resp. positivement expansif) s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in X$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $n \geq 0$) tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \geq \delta$.

Fer à cheval. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow I$ une application continue. Un *fer à cheval* pour f est composé de deux sous-intervalles $J, K \subset I$ d'intérieurs disjoints tels que $f(J) \supset J \cup K$ et $f(K) \supset J \cup K$.

Graphe orienté. Un *graphe orienté* G est un couple (S, A) avec $A \subset S \times S$. On dit que S est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arêtes. Si $u, v \in S$ et $(u, v) \in A$, on note $u \rightarrow v$.

Graphe topologique. Un *graphe topologique (fini)* G est un espace compact connexe contenant un sous-ensemble fini V tel que toute composante connexe de $G \setminus V$ est homéomorphe à un intervalle ouvert.

Invariant. Soit (X, T) un système dynamique. Un sous-ensemble non vide $Y \subset X$ est *invariant* (par T) si $T(Y) \subset Y$.

Mélange topologique (fort). Le système (X, T) est *topologiquement mélangeant* (ou *fortement topologiquement mélangeant*) si pour tous U, V ouverts non vides de X il existe un entier $N \geq 0$ tel que, $\forall n \geq N$, $T^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.

Mélange topologique faible. Le système (X, T) est *faiblement topologiquement mélangeant* si $(X \times X, T \times T)$ est transitif.

Monotone par morceaux. Une fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est *monotone par morceaux* s'il existe des points $a_0 = a < a_1 < \dots, a_{n-1} < a_n = b$ tels que f est monotone sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$.

Mot. Soit \mathcal{A} un alphabet fini ou dénombrable et $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$). Un *mot* de Σ est une suite finie (w_1, \dots, w_n) telle qu'il existe un élément $(a_n)_n \in \Sigma$ et un entier k (dans \mathbb{N} ou \mathbb{Z} selon le cas) tels que $(a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) = (w_1, \dots, w_n)$.

Non dégénéré. Voir dégénéré.

ω -limite. Voir ensemble ω -limite.

Orbite. L'*orbite* (ou *orbite future*) du point x par l'application T est $\{T^n(x) \mid n \geq 0\}$.

Ordre de Sharkovskii. L'*ordre de Sharkovskii* est défini par :

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^\infty \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

Une transformation de l'intervalle f est de *type n* pour l'ordre de Sharkovskii, avec $n \in \mathbb{N}^* \cup \{2^\infty\}$, si l'ensemble des périodes de f est exactement $\{m \in \mathbb{N}^* \mid m \geq n\}$.

Sensibilité aux conditions initiales. Le système (X, T) est *sensible aux conditions initiales* (ou simplement *sensible*) s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in X$ et $n \geq 0$ tels que $d(x, y) < \varepsilon$ et $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$.

Spécification. Le système (X, T) a la propriété de *spécification* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, si x_1, \dots, x_p sont des points de X et m_i, n_i sont des entiers satisfaisant $m_1 \leq n_1 < m_2 \leq n_2 < \dots < m_p \leq n_p$ et $m_i - n_{i-1} \geq N$ pour $i = 2, \dots, p$, alors pour tout entier $q \geq N + n_p - m_1$ il existe un point $x \in X$ satisfaisant $T^q(x) = x$ et $d(T^k(x), T^k(x_i)) \leq \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq p$ et $m_i \leq k \leq n_i$.

Transitivité. Le système dynamique (X, T) est *transitif* si pour tous U, V ouverts non vides de X il existe un entier $n \geq 0$ tel que $T^{-n}U \cap V \neq \emptyset$. La transitivité est équivalente à l'existence d'un point $x \in X$ tel que $\{T^n(x) \mid n \geq 0\}$ est dense dans X .

Type pour l'ordre de Sharkovskii. Voir ordre de Sharkovskii.

Upe. Le système (X, T) a la propriété *upe* (ou a une *entropie uniformément positive*) si tout recouvrement de X par deux ouverts non denses a une entropie topologique strictement positive.

Bibliographie

- [AJM03] Ll. Alsedà, D. Juher, and P. Mumburú. Sets of periods for piecewise monotone tree maps. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13(2) :311–341, 2003.
- [AJM05a] Ll. Alsedà, D. Juher, and P. Mumburú. On the preservation of combinatorial types for maps on trees. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(7) :2375–2398, 2005.
- [AJM05b] Ll. Alsedà, D. Juher, and P. Mumburú. Periodic behavior on trees. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(5) :1373–1400, 2005.
- [AJM08] Ll. Alsedà, D. Juher, and P. Mumburú. Minimal dynamics for tree maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20(3) :511–541, 2008.
- [ALM00] Ll. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 2000.
- [BBC⁺92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney’s definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4) :332–334, 1992.
- [BC87] L. Block and E. M. Coven. Topological conjugacy and transitivity for a class of piecewise monotone maps of the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(1) :297–306, 1987.
- [BDM04] F. Blanchard, F. Durand, and A. Maass. Constant-length substitutions and countable scrambled sets. *Nonlinearity*, 17(3) :817–833, 2004.
- [BGKM02] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, and A. Maass. On Li-Yorke pairs. *J. Reine Angew. Math.*, 547 :51–68, 2002.
- [BGM^Y80] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, and L. S. Young. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. In *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, no. 819, pages 18–34. Springer-Verlag, 1980.
- [BH95] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1) :109–140, 1995.
- [BM85] M. Barge and J. Martin. Chaos, periodicity, and snakelike continua. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 289(1) :355–365, 1985.
- [Bow71] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153 :401–414, 1971.
- [Bow72] R. Bowen. Entropy-expansive maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164 :323–331, 1972.

- [BP78] G. J. Butler and G. Pianigiani. Periodic points and chaotic functions in the unit interval. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 18(2) :255–265, 1978.
- [BSŠ05] F. Balibrea, J. Smítal, and M. Štefánková. The three versions of distributional chaos. *Chaos Solitons Fractals*, 23(5) :1581–1583, 2005.
- [Buz97] J. Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100 :125–161, 1997.
- [Buz00] J. Buzzi. On entropy-expanding maps. Preprint École Polytechnique no. 2000-14, 2000.
- [CGT84] A. Chenciner, J.-M. Gambaudo, and C. Tresser. Une remarque sur la structure des endomorphismes de degré 1 du cercle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(5) :145–148, 1984.
- [Dev89] R. L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edition, 1989.
- [DGS76] M. Denker, C. Grillenberger, and K. Sigmund. *Ergodic theory on compact spaces*. Lecture Notes in Mathematics, no. 527. Springer-Verlag, 1976.
- [FL99] J. Fehrenbach and J. Los. Une minoration de l'entropie topologique des difféomorphismes du disque. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(3) :912–924, 1999.
- [FP98] G. L. Forti and L. Paganoni. A distributionally chaotic triangular map with zero sequence topological entropy. *Math. Pannon.*, 9(1) :147–152, 1998.
- [Gur69] B. M. Gurevich. Topological entropy of enumerable Markov chains (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 187 :715–718, 1969. English translation *Soviet Math. Dokl.*, 10(4) :911–915, 1969.
- [Gur70] B. M. Gurevich. Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 192 :963–965, 1970. English translation *Soviet Math. Dokl.*, 11(3) :744–747, 1970.
- [GW93] E. Glasner and B. Weiss. Sensitive dependence on initial conditions. *Nonlinearity*, 6(6) :1067–1075, 1993.
- [Hof78] F. Hofbauer. β -shifts have unique maximal measure. *Monatsh. Math.*, 85(3) :189–198, 1978.
- [Hof79] F. Hofbauer. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. *Israel J. Math.*, **I**. 34(3) :213–237, 1979. **II**. 38(1–2) :107–115, 1981.
- [Hof86] F. Hofbauer. Piecewise invertible dynamical systems. *Probab. Theory Relat. Fields*, 72(3) :359–386, 1986.
- [Ito81] R. Ito. Rotation sets are closed. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 89(1) :107–111, 1981.
- [JS86] K. Janková and J. Smítal. A characterization of chaos. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 34(2) :283–292, 1986.

- [Kat80] A. Katok. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 51 :137–173, 1980.
- [KS89] M. Kuchta and J. Smítal. Two-point scrambled set implies chaos. In *European Conference on Iteration Theory (Caldes de Malavella, 1987)*, pages 427–430. World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
- [KS97] S. Kolyada and L. Snoha. Some aspects of topological transitivity — a survey. In *Iteration theory (ECIT 94) (Opava)*, pages 3–35. Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1997.
- [Li93] Shihai Li. ω -chaos and topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339(1) :243–249, 1993.
- [LL95] M. C. Leseduarte and J. Llibre. On the set of periods for σ maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(12) :4899–4942, 1995.
- [LPR03] J. Llibre, J. Paraños, and J. A. Rodríguez. Periods for continuous self-maps of the figure-eight space. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13(7) :1743–1754, 2003. Dynamical systems and functional equations (Murcia, 2000).
- [Mis80] M. Misiurewicz. Horseshoes for continuous mappings of an interval. In *Dynamical systems (Bressanone, 1978)*, pages 125–135. Liguori, Naples, 1980.
- [Mis82] M. Misiurewicz. Periodic points of maps of degree one of a circle. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2(2) :221–227, 1982.
- [Moo07] T. K. S. Moothathu. Stronger forms of sensitivity for dynamical systems. *Nonlinearity*, 20(9) :2115–2126, 2007.
- [New89] S. E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2) :215–235, 1989. Corrections, 131(2) :409–410, 1990.
- [Poi52] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, volume 1 of *Œuvres complètes*, pages 137–158. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [RT86] F. Rhodes and C. L. Thompson. Rotation numbers for monotone functions on the circle. *J. London Math. Soc. (2)*, 34(2) :360–368, 1986.
- [Rue] S. Ruelle. *Chaos for continuous interval maps : a survey of relationship between the various sorts of chaos*. Available on <http://www.math.u-psud.fr/~ruette/>.
- [Rue78] D. Ruelle. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 9(1) :83–87, 1978.
- [Sal88] I. A. Salama. Topological entropy and recurrence of countable chains. *Pacific J. Math.*, 134(2) :325–341, 1988. Errata, 140(2) :397, 1989.
- [Sha64a] A. N. Sharkovskii. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrain. Mat. Ž.*, 16 :61–71, 1964. (Russian).
- [Sha64b] A. N. Sharkovskii. Fixed points and the center of a continuous mapping of the line into itself. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR*, 1964(7) :865–868, 1964. (Ukrainian).

- [Sha95] A. N. Sharkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself. In *Thirty years after Sharkovskii's theorem : new perspectives (Murcia, 1994)*, volume 8 of *World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. B Spec. Theme Issues Proc.*, pages 1–11. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995. Translated by J. Tolosa, Reprint of the paper reviewed in MR1361914 (96j :58058).
- [Sno90] L. Snoha. Generic chaos. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 31(4) :793–810, 1990.
- [Sno92] L. Snoha. Dense chaos. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 33(4) :747–752, 1992.
- [Spa82] C. Sparrow. *The Lorenz equations : bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [SS94] B. Schweizer and J. Smítal. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344(2) :737–754, 1994.
- [Šte77] P. Štefan. A theorem of Šarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. *Comm. Math. Phys.*, 54(3) :237–248, 1977.
- [Tak73] Y. Takahashi. Isomorphisms of β -automorphisms to Markov automorphisms. *Osaka J. Math.*, 10 :175–184, 1973.
- [Wig90] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Texts in Applied Mathematics, 2. Springer-Verlag, 1990.
- [Yom87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3) :285–300, 1987. C^k -resolution of semi-algebraic mappings. Addendum to : “Volume growth and entropy”, 57(3) :301–318, 1987.

Liste des travaux présentés

Disponibles à l'adresse <http://www.math.u-psud.fr/~ruette/publications.html>

Les numéros suivis de * sont des articles tirés de ma thèse.

- [1*] S. Ruelle. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure, *Israel Journal of Mathematics*, **127**, 253-277, 2002.
- [2*] F. Blanchard, B. Host and S. Ruelle. Asymptotic pairs in positive-entropy systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **22**, 671-686, 2002.
- [3*] S. Ruelle. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measure for topological Markov chains, *Pacific Journal of Mathematics*, **209**, No. 2, 365-380, 2003.
- [4] S. Ruelle. C^n interval maps not Borel conjugate to any C^∞ map, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, No. 4, 1091-1093, 2004.
- [5] S. Ruelle. Transitive, sensitive subsystems for interval maps, *Studia Math*, **169**, No. 1, 81-104, 2005.
- [6] S. Ruelle. Dense chaos for continuous interval maps, *Nonlinearity*, **18**, 1691-1698, 2005.
- [7*] J. Buzzi and S. Ruelle. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps, *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A*, **14**, No. 4, 673-688, 2006.
- [8] Ll. Alsedà and S. Ruelle. Rotation sets for graph maps of degree 1, *Annales de l'Institut Fourier*, **58**, No. 4, 1233-1294, 2008.
- [9] Ll. Alsedà and S. Ruelle. Periodic orbits of large diameter for circle maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, No. 9, 3211-3217, 2010.
- [10] S. Ruelle. Rotation set for maps of degree 1 on the graph sigma. *Israel Journal of Mathematics*, **184**, 275-299, 2011.
- [11] S. Ruelle. Rotation set for maps of degree 1 on sun graphs. Prépublication.