Curriculum Vitae détaillé

Sylvie RUETTE
Adresse permanente : Bât. B – 9 boulevard Saint-Simon – 13009 Marseille
Tél personnel : 00 34 93 581 75 18
Tél professionnel : 00 34 93 581 35 87
Mon téléphone en France au moment des auditions sera indiqué sur ma page web.
Fax : 00 34 93 581 27 90
Mail : `ruette@mat.uab.es`
Page web : `http://mat.uab.es/ruette/index-fr.html`

Née le 7 mars 1975 à Paris (12e) – Nationalité française

Situation actuelle : post-doctorat (bourse Marie Curie) à l'Universitat Autònoma de Barcelona

1. Formation

1998-2001	Thèse de doctorat en mathématiques, Université Aix-Marseille II, soutenue le 26 novembre 2001, mention très honorable. Titre : *Chaos en dynamique topologique, en particulier sur l'intervalle, mesures d'entropie maximale.* Directeur de thèse : François Blanchard. Composition du jury : – François Blanchard (Institut de Mathématiques de Luminy) – Jérôme Buzzi (École Polytechnique) – Albert Fathi (École Normale Supérieure de Lyon) – Bernard Host (Université de Marne-la-Vallée) – Bernard Schmitt (Université de Bourgogne) – Serge Troubetzkoy (Institut de Mathématiques de Luminy)
1995-1999	Scolarité à l'École Normale Supérieure de Lyon (98-99 : 1ère année de thèse).
1995-1998	Magistère de Mathématiques et Applications, Université Lyon I, mention bien.
1998	Agrégation de mathématiques, rang : 31.
1997-1998	DEA de mathématiques, Université Lyon I, mention bien.
1995-1997	licence (mention bien) et maîtrise (mention bien), Université Lyon I.
1993-1995	Classes préparatoires, lycée Montaigne (Bordeaux).

2. Séjours à l'étranger et stages

2002-2003	Post-doctorat d'un an à l'Universitat Autònoma de Barcelona (Espagne). Titre du projet : *Topological dynamics in one-dimensional spaces.* Responsable : Ll. Alsedà.
2000	Séjour de deux mois à l'Universidad de Chile (Santiago, Chili) et collaboration avec A. Maass sur le thème des couples de Li-Yorke en dynamique topologique.
1998	Stage de DEA à l'Institut de Mathématiques de Luminy, sous la direction de F. Blanchard. Thème : sensibilité aux conditions initiales dans les systèmes dynamiques.
1997	Stage de magistère (6 semaines) à l'Université de Bretagne Occidentale, sous la direction de Y. Lacroix. Thème : disjonction dans les systèmes dynamiques topologiques et mesurés.
1996	Stage de magistère (6 semaines) à l'Université de Mathématiques de Genève, sous la direction de P. de La Harpe. Thème : comportement asymptotique du nombre de sous-groupes d'indice fini.

3. Activités d'enseignement

J'ai été monitrice pendant 3 ans à l'Université Aix-Marseille II. J'ai assuré des Travaux Dirigés ainsi que des interrogations orales en DEUG.

— 1999-2000 : 56 heures de Travaux Dirigés en 1ère année de DEUG SM, en *Techniques de calcul* et en *Algèbre Linéaire*. Responsable de l'enseignement : J.-L. Maltret. Correction d'examen.

— 2000-2001 et 2001-2002 : 56 heures par an de Travaux Dirigés en 1ère année de DEUG MIAS, en *Techniques de calcul* et en *Algèbre Linéaire*. Responsable de l'enseignement : Y. Lafont. Participation à la rédaction de sujets d'examen et à la correction.

— 1999-2002 : 8 heures par an de colles (interrogations orales) en 1ère ou 2ème année de DEUG MIAS.

Techniques de calcul : c'est un cours de base apportant des compléments aux connaissances de lycée sur les sujets suivants : complexes, applications (injection, surjection...), calcul différentiel (développement limité et limites, accroissements finis...), intégration, suites récurrentes linéaires d'ordre 1 et 2, équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Algèbre linéaire : on introduit les notions élémentaires d'algèbre linéaire en se plaçant dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, on met l'accent sur l'aspect géométrique (sous-espaces orthogonaux, équations d'espaces affines...) et on aborde le calcul matriciel.

Colles : ce sont des interrogations orales individuelles (environ 20 minutes par étudiant), consistant en questions de cours et en exercices et portant sur le programme des 2 ou 3 semaines précédentes.

4. Publications

disponibles à l'adresse `http://mat.uab.es/ruette/publications.html`

Articles publiés dans une revue internationale avec comité de lecture

[1] S. Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure, *Israel Journal of Mathematics*, **127**, 253-277, 2002.

[2] F. Blanchard, B. Host and S. Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **22**, 671-686, 2002.

Articles acceptés pour publication

[3] S. Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measure for topological Markov chains, à paraître dans *Pacific Journal of Mathematics.*

[4] S. Ruette. C^n interval maps not Borel conjugate to any C^∞ map, à paraître dans *Proceedings of the American Mathematical Society.*

Articles soumis

[5] J. Buzzi and S. Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps, soumis à *Transactions of the American Mathematical Society.*

Autres

[6] S. Ruette. *Chaos for continuous interval maps – a survey of relationship between the various sorts of chaos* (version préliminaire, 123 pages).

[7] S. Ruette. Transitive, sensitive subsystems for interval maps, Preprint UAB n° 5/2003.

Travaux qui seront envoyés aux rapporteurs : [1], [2], [3], [5] et thèse.

5. Communications orales

Conférences internationales

- Colloque Temps de Retour, Entropie et Complexité, CIRM, Marseille, mars 2000. *Stable classes in positive-entropy systems : a parallel with Anosov.*
- Conference Dynamical Systems and Ergodic Theory, Katsiveli (Ukraine), août 2000.*Asymptotic pairs and entropy.*
- Colloque Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques, Villetaneuse, août-septembre 2001. *A criterion for existence of measures of maximal entropy for topological Markov chains.*
- Workshop Countable Markov shifts : recurrence and classifications, Marseille, juillet 2002. *On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for countable Markov shifts.*

Séminaires

- Séminaire Ernest, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille. *Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle*, octobre 1999.
- Séminaire Dynamique Symbolique et Arithmétique, Université de Provence, Marseille. *Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle*, mars 2000.
- Séminaire du Département de Mathématiques, Universidad de Chile, Santiago (Chili). *Couples asymptotiques et entropie*, juin 2000.
- Séminaire Ernest, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille. *Critère d'existence d'une mesure d'entropie maximale pour une chaîne de Markov topologique*, novembre 2000.
- Séminaire de Théorie des nombres, Algorithmique et Complexité, Université de Provence, Marseille. *Chaînes de Markov topologiques sur les graphes*, décembre 2000.
- Séminaire de Géométrie Ergodique, École Polytechnique, Palaiseau. *Existence de couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, décembre 2000.
- Séminaire de Théorie Ergodique, Université de Bourgogne, Dijon. *Existence de mesures d'entropie maximales pour des transformations de l'intervalle*, mai 2001.
- Séminaire de Probabilités et Théorie Ergodique, Université de Picardie, Amiens. *Existence de couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, octobre 2001.
- Séminaire de Dynamique, Université Paris-Sud XI, Orsay. *Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle : conditions d'existence, contre-exemples*, octobre 2001.
- Séminaire de Théorie Ergodique, Université Paris 6-7, Chevaleret. *Sur la classification des chaînes de Markov topologiques et l'existence de mesures d'entropie maximale*, décembre 2001.
- Séminaire de Mathématiques pures, École Normale Supérieure de Lyon. *Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle*, janvier 2002.
- Séminaire de Probabilité et Théorie Ergodique, Université de Rennes 1. *Chaînes de Markov topologiques et mesures d'entropie maximale*, janvier 2002.
- Séminaire de Systèmes Dynamiques, Université de Bourgogne, Dijon. *Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, février 2002.
- Séminaire de Théorie Ergodique, Université de Marne-la-Vallée. *Chaînes de Markov et dynamique de l'intervalle : mesures d'entropie maximale*, mars 2002.
- Séminaire de Dynamique, Universitat Autònoma de Barcelona (Espagne). *Measures of maximal entropy for interval maps*, janvier 2003.

— Séminaire de Probabilité et Théorie Ergodique, Université de Rennes 1. *Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, février 2003.
— Séminaire d'Analyse et Probabilités, Université de Bretagne Occidentale (Brest), *Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, mars 2003.

6. Rapport et projet de recherche

1 Introduction

Mon domaine de recherche est la dynamique topologique. Un système dynamique topologique (X, T) est la donnée d'une transformation continue $T: X \to X$, l'espace X étant le plus souvent un ensemble métrique compact. L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation, T^n désignant la transformation T composée n fois ($T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$). On cherche à étudier le comportement du système pour des temps n tendant vers l'infini.

Les deux thématiques majeures de mes recherches sont d'une part l'entropie topologique et le chaos, et d'autre part le problème d'existence de mesures d'entropie maximale ; je m'intéresse également aux points périodiques. J'ai beaucoup travaillé sur les transformations de l'intervalle, ce qui m'a amenée à étudier les chaînes de Markov topologiques car ces systèmes permettent d´étudier les mesures d'entropie maximale des transformations de l'intervalle. J'ai également travaillé dans le cadre plus général des transformations continues d'un espace métrique compact dans lui-même. Dans le prolongement de mes travaux sur l'intervalle, je m'intéresse actuellement à des systèmes sur des espaces de dimension 1 autres que l'intervalle.

Mes travaux sont également liés à la théorie ergodique, d'une part parce qu'un système dynamique topologique muni d'une mesure d'entropie maximale devient un système dynamique mesuré, et d'autre part parce que j'ai été amenée à utiliser des outils ergodiques et probabilistes pour démontrer des résultats topologiques, ceci étant rendu possible par le principe variationnel qui lie l'entropie topologique à l'entropie métrique.

Je présente ci-dessous un résumé de mes travaux et des recherches que j'envisage de conduire, que je développe plus longuement dans les sections 2 et 3.

Résumé des travaux effectués

F. Blanchard, B. Host et moi avons montré, à l'aide de méthodes ergodiques, qu'un système dynamique (X, T) d'entropie topologique non nulle possède des couples asymptotiques propres, c'est-à-dire des points distincts x, y tels que la distance entre $T^n x$ et $T^n y$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. De plus, ces couples sont en général "instables" dans le passé.

Je me suis intéressée au chaos pour les transformations de l'intervalle (transformations continues sur un intervalle compact) et j'ai rédigé une synthèse des nombreuses propriétés connues. J'ai également prouvé de nouveaux résultats dans ce domaine, notamment le fait que pour les transformations de l'intervalle l'existence d'un sous-système transitif et sensible aux conditions initiales est une notion strictement intermédiaire entre l'entropie non nulle et le chaos au sens de Li-Yorke.

Après avoir constaté la cascade de propriétés topologiques impliquées par la transitivité et le mélange (sur l'intervalle, ces deux notions sont presque équivalentes et entraînent à peu près tous les types de chaos), je me suis demandée si on pouvait obtenir des mesures invariantes ≪ adaptées ≫ à l'observation du chaos, en particulier des mesures d'entropie maximale. Pour cela, j'ai étudié les chaînes de Markov topologiques, qui sont des systèmes symboliques sur des graphes infinis, car ces systèmes permettent, sous certaines conditions, de représenter une transformation de l'intervalle et constituent un outil essentiel pour l'étude des mesures d'entropie maximale. Je me suis intéressée à la classification transient/récurrent nul/récurrent positif des graphes infinis et j'ai montré de nouveaux résultats liés à l'existence ou l'absence de mesure d'entropie maximale.

On sait qu'une transformation de l'intervalle monotone par morceaux ou C^∞ possède au moins une mesure d'entropie maximale, qui est unique dans le cas transitif. À l'aide de chaînes de Markov topologiques, j'ai construit pour tout entier n des transformations de l'intervalle transitives, C^n, sans mesure d'entropie maximale, et j'ai obtenu avec J. Buzzi une condition suffisante d'existence de mesure d'entropie maximale pour les transformations C^n de l'intervalle.

Je m'intéresse actuellement aux systèmes dynamiques sur des graphes topologiques, qui sont des espaces de dimension 1, sujet qui s'inscrit dans les thématiques de l'Universitat Autònoma de Barcelona où je me trouve cette année. Je travaille en particulier avec Ll. Alsedà sur les nombres de rotation pour les transformations de degré 1 sur des espaces obtenus en greffant un arbre sur un cercle. L'ensemble des nombres de rotation contient un intervalle correspondant aux points revenant périodiquement dans le cercle. J'ai montré que si p/q est un rationnel à l'intérieur de cet intervalle alors pour tout n assez grand il existe un point du cercle de période nq et de nombre de rotation p/q. De plus, si la transformation est transitive, l'ensemble des nombres de rotation est un intervalle fermé.

Recherches envisagées

Les questions liées au chaos en dynamique topologique s'inscrivent naturellement dans le prolongement de mes travaux sur les couples asymptotiques. J'aimerais contribuer à une meilleure compréhension des diverses propriétés chaotiques, notamment le chaos au sens de Li-Yorke et les relations entre entropie et récurrence.

J'ai acquis une vue d'ensemble sur les transformations de l'intervalle et j'ai manipulé des outils tant différentiables que symboliques pour étudier les mesures d'entropie maximale. Je compte poursuivre ces recherches dans deux directions. D'une part je souhaite m'intéresser aux mesures invariantes pour les transformations de l'intervalle : mesures d'entropie maximale, mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, rapport entre ces deux types de mesures. D'autre part j'aimerais utiliser la représentation par chaînes de Markov topologiques des transformations entropie-dilatantes en dimension n pour généraliser à ces systèmes le résultat d'existence de mesure d'entropie maximale obtenu pour l'intervalle, mais également pour étudier la densité des points périodiques des transformations entropie-dilatantes.

J'aimerais déterminer les propriétés conservées par h-conjugaison (conjugaison négligeant des ensembles de faible entropie) et voir si l'entropie permet de classifier les chaînes de Markov topologiques positivement récurrentes modulo h-conjugaison. Je m'intéresse également aux diagrammes de Bratteli, autre catégorie de systèmes sur des graphes infinis, qui fournissent des représentations pour des systèmes non singuliers. Je compte étudier certaines propriétés de ces représentations, en particulier l'entropie topologique et les invariants d'orbite-équivalence.

2 Rapport de recherche

2.1 Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle

Historiquement, le terme de chaos a été introduit par Li et Yorke pour qualifier le comportement de certains systèmes sur l'intervalle. Par la suite, d'autres définitions du chaos ont été proposées ; elles ne coïncident pas en général, sans qu'aucune puisse figurer comme l'unique « bonne » définition. Il apparaît que la notion de chaos repose plutôt sur un faisceau de propriétés. Il importe d'étudier les relations entre ces propriétés, mais également de savoir dans quelle mesure certains comportements réguliers sont compatibles avec une propriété chaotique donnée.

Soit $T\colon X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact ; d désigne la distance. Si x et y sont deux points de X, (x, y) est appelé un *couple de Li-Yorke* si

$$\limsup_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

Le système (X, T) est dit *chaotique au sens de Li-Yorke* s'il existe un ensemble non dénombrable $S \subset X$ tel que tout couple de points distincts de S est un couple de Li-Yorke. Par ailleurs, (x, y) est un *couple asymptotique* si

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0;$$

le couple est *propre* si $x \neq y$.

J'ai montré avec F. Blanchard et B. Host qu'un système dynamique (X, T) d'entropie topologique non nulle possède nécessairement des couples asymptotiques propres [4]. Ce résultat répond par la négative à une question de Huang et Ye qui ont étudié les systèmes dont tous les couples de points distincts sont des couples de Li-Yorke et qui se demandaient si de tels systèmes pouvaient avoir une entropie topologique non nulle. Presque au même moment, Blanchard, Glasner, Kolyada et Maass ont montré qu'une entropie non nulle implique le chaos au sens de Li-Yorke [3]. Par conséquent, dans un système d'entropie non nulle il y a cohabitation de couples « chaotiques » (Li-Yorke) et « non chaotiques » (asymptotiques).

Plus précisément, nous avons montré que, pour toute mesure ergodique d'entropie non nulle, presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. Si de plus T est inversible, pour presque tout point x il existe un ensemble non dénombrable de points y tels que (x, y) est un couple asymptotique pour T et un couple de Li-Yorke pour T^{-1}, ce qui rappelle les feuilletages stables et instables des Anosov. Les preuves de ces résultats reposent presque exclusivement sur des arguments ergodiques ; il serait intéressant de montrer l'existence de couples asymptotiques de façon purement topologique.

2.2 Le chaos pour les transformations de l'intervalle

Une *transformation de l'intervalle* est un système dynamique topologique donné par une fonction continue $f\colon I \to I$, où I est un intervalle compact. Pour ces systèmes, les relations entre les divers types de chaos sont bien plus nombreuses que pour des systèmes dynamiques sur des espaces quelconques. Par exemple, la transitivité implique la sensibilité aux conditions initiales, la densité des points périodiques, une entropie non nulle, et d'autres propriétés encore. Beaucoup de travaux ont été menés sur ce sujet, mais les résultats sont éparpillés dans la littérature, parfois mal connus ou publiés sans preuve. J'ai abordé ce sujet pendant ma thèse puis, après ma thèse, j'ai rédigé un ouvrage dans le but de donner une vue d'ensemble sur les liens existant entre les différentes propriétés liées au chaos sur l'intervalle [22]. Je me suis attachée à donner des preuves complètes, parfois originales, et à illustrer les résultats par des exemples. Ce travail inclut également quelques résultats nouveaux. J'ai notamment montré qu'une transformation de l'intervalle densément chaotique a une entropie supérieure ou égale à $\log 2/2$ et que son type pour l'ordre de Sharkovskii est au plus 6 (c'est-à-dire qu'il existe un point périodique de période 6), l'égalité étant possible dans les deux cas ; ce résultat répond à certaines questions posées par Snoha dans [24].

En complément de ce travail de synthèse, j'ai étudié l'existence d'un sous-système transitif et sensible aux conditions initiales : pour les transformations de l'intervalle, l'existence d'un tel sous-système est impliquée par l'entropie non nulle (résultat déjà connu [5]) et implique le chaos au sens de Li-Yorke ; j'ai construit des exemples montrant qu'aucune de ces deux implications n'est une équivalence [21].

2.3 Chaînes de Markov topologiques et classification des graphes

Une *chaîne de Markov topologique* (ou *shift de Markov*) est un système symbolique défini par l'ensemble des chemins bi-infinis sur un graphe orienté dénombrable, muni de la transformation shift (décalage vers la gauche). Contrairement aux chaînes de Markov probabilistes, il n'y a pas de probabilité *a priori*. Outre leur intérêt propre, les chaînes de Markov topologiques permettent de représenter certains systèmes et elles sont utilisées pour étudier les mesures d'entropie maximale.

Les graphes orientés connexes sont classés en trois catégories : transients, récurrents nuls, récurrents positifs, en fonction de critères combinatoires liés au nombre de chemins. Cette classification est intimement liée à l'existence de mesures d'entropie maximale : Gurevich a montré qu'il existe une mesure de probabilité d'entropie maximale si et seulement si le graphe est récurrent positif [11] ; dans le cas des graphes récurrents nuls, il existe une mesure infinie jouant le rôle de mesure d'entropie maximale.

J'ai montré que si l'entropie d'une chaîne de Markov topologique sur un graphe connexe est strictement supérieure à son entropie locale alors le graphe est récurrent positif, si bien qu'il existe une mesure d'entropie maximale [19]. Étant donné les liens entre chaînes de Markov topologiques et transformations de l'intervalle, ce résultat conforte la conjecture de Buzzi énonçant que le même résultat est vrai pour les transformations de l'intervalle, mais cette question est toujours ouverte.

J'ai également montré que pour un graphe sans mesure d'entropie maximale il existe une suite de mesures ergodiques presque maximales fuyant vers l'infini ; ce résultat est un des points-clés d'un critère d'existence de mesure d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle [9], énoncé dans le paragraphe 2.4.

Salama a donné une approche géométrique de la classification transient/récurrent nul/récurrent positif en termes d'existence de sous-graphes ou de surgraphes de même entropie : un graphe connexe sans sous-graphe propre de même entropie est récurrent positif, et un graphe connexe est transient si et seulement s'il est strictement inclus dans un graphe transient de même entropie [23]. J'ai complété ces travaux en montrant qu'un graphe transient G peut toujours être inclus dans un graphe récurrent de même entropie, qui est soit récurrent nul soit récurrent positif selon les propriétés de G [19].

J'ai également entamé des recherches sur les graphes transients portant sur les questions suivantes : à quelle condition peut-on définir des probabilités de transitions canoniques transformant un graphe transient en une chaîne de Markov probabiliste transiente ? Étant donné qu'un graphe transient G est inclus dans un graphe récurrent G' de même entropie, quelles informations la mesure d'entropie maximale (finie ou infinie) sur G' donne-t-elle sur G ? Pour l'instant, je n'ai étudié que des cas particuliers [18].

2.4 Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle

Une *mesure maximale* μ est une mesure de probabilité invariante dont l'entropie réalise le supremum des entropies métriques ; par le principe variationnel l'entropie de μ est égale à l'entropie topologique. Les mesures maximales sont particulièrement intéressantes car elles reflètent la totalité de la complexité topologique et permettent de voir où se concentre cette complexité. Elles ont un sens physique moins évident que les mesures absolument continues, par contre elles sont préservées par les conjugaisons par homéomorphisme.

Si f est une transformation de l'intervalle, on peut lui associer un graphe orienté, généralement infini, appelé *diagramme de Markov*. Cette construction, basée sur la dynamique des sous-intervalles de monotonie, a d'abord été faite par Hofbauer pour les transformations monotones par morceaux, puis généralisée par Buzzi. Sous certaines conditions, la chaîne de Markov topologique sur ce graphe représente l'essentiel de la dynamique de f. En particulier, Buzzi a montré que si f est C^1 et si son entropie est strictement supérieure à l'entropie topologique des points critiques (c'est-à-dire les points au voisinage desquels f n'est pas monotone), alors il y a une bijection entre les mesures maximales ergodiques de f et celles de son diagramme de Markov [6]. Le problème de l'existence de telles mesures pour f se transpose alors sur le graphe.

Une transformation de l'intervalle f qui est soit monotone par morceaux soit C^∞ admet au moins une mesure maximale, et cette mesure est unique si f est transitive (Hofbauer [13] pour le cas monotone par morceaux, Newhouse [16] et Buzzi [6] pour le cas C^∞). Ce résultat n'est pas vrai si on suppose seulement f continue, comme l'ont montré Gurevich et Zargaryan [12]. La condition C^∞ ne peut pas non plus être affaiblie : pour tout entier n, j'ai construit des transformations de l'intervalle C^n, transitives, mais sans mesure maximale [17]. Pour cela, j'ai utilisé l'approche géométrique de Salama présentée au paragraphe 2.3 pour montrer que le graphe de Markov associé à ces transformations est transient ; l'absence de mesure maximale pour le graphe se transporte alors sur l'intervalle.

J'ai déduit des résultats précédents que pour tout entier n il existe des transformations de l'intervalle C^n, transitives, qui ne sont boréliennement conjuguées à aucune transformation C^∞ [20].

D'un autre côté, J. Buzzi et moi-même avons montré que la régularité de la transformation permet de donner une condition suffisante d'existence [9], en combinant des résultats liés à la dérivabilité et des propriétés des chaînes de Markov topologiques. On considère f une transformation C^1 de l'intervalle ; on note C l'ensemble des points critiques, $h_{top}(C, f)$ l'entropie de l'ensemble C et $h_{loc}(f)$ l'entropie locale de f. Si l'entropie topologique $h_{top}(f)$ vérifie $h_{top}(f) > h_{top}(C, f) + h_{loc}(f)$, alors f a un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques, avec unicité si f est transitive. En utilisant une majoration de l'entropie des zéros de la dérivée et de l'entropie locale, nous obtenons une condition plus facile à vérifier pour les transformations C^r : si

$$h_{top}(f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty,$$

alors le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul.

2.5 Nombres de rotation sur certains graphes topologiques

Un ensemble connexe X est un *graphe topologique* s'il existe un sous-ensemble fini S tel que chaque composante connexe de $X \setminus S$ est homéomorphe à un intervalle ouvert. Si de plus X n'a pas de sous-ensemble homéomorphe à un cercle, X est appelé un *arbre*. De par leur dimension 1, les systèmes dynamiques sur des graphes topologiques partagent certaines propriétés avec les transformations de l'intervalle.

La détermination de l'ensemble des périodes des points périodiques, qui est donnée par le théorème de Sharkovskii pour les transformations de l'intervalle, a été trouvée pour certains graphes, notamment les n-étoiles (n segments reliés par une extrémité) mais reste un problème ouvert dans le cas général. Pour les transformations du cercle de degré 1, la réponse est donnée par la théorie du nombre de rotation (voir par exemple [2]).

Actuellement, je travaille avec Ll. Alsedà à la généralisation du nombre de rotation pour les transformations de degré 1 sur des espaces obtenus en greffant un arbre sur un cercle (par exemple $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \cup [0, 1]$). Une telle transformation f se relève en une transformation F sur un arbre infini T inclus dans $\mathbb{C}$ tel que $T + 1 = T$, $\mathbb{R} \subset T$ ($\mathbb{R}$ correspond au cercle) et $F(x + 1) = F(x) + 1$ pour tout x dans T. Les points périodiques pour f sont les points périodiques mod 1 pour F. Généraliser la définition du nombre de rotation à ce contexte ne pose pas de problème. L'ensemble des nombres de rotation n'est pas nécessairement connexe et on ne sait pas s'il est fermé. Les nombres de rotation des points x pour lesquels il existe $n \geq 1$ tel que $F^{nk}(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $k \geq 0$ forment un intervalle non vide, non nécessairement fermé, qu'on note $R(F)$. J'ai montré que si f est transitive alors l'ensemble des nombres de rotation est un intervalle fermé égal à $\overline{R(F)}$. Un point périodique de période q a un nombre de rotation égal à p/q pour un certain $p \in \mathbb{Z}$. Nous cherchons à déterminer l'ensemble des périodes des points périodiques ayant un nombre de rotation p/q donné, avec p et q premiers entre eux. Grâce à des exemples, on sait que ce n'est pas nécessairement l'ensemble des multiples de q comme dans le cas du cercle. J'ai montré que si p/q appartient à $\mathrm{Int}(R(F))$ alors il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ il existe un point périodique de période nq et de nombre de rotation p/q. On ne sait rien pour l'instant pour les bornes de $R(F)$.

3 Projet de recherche

3.1 Dynamique topologique

Je compte poursuivre l'étude des liens entre les diverses propriétés liées au chaos, afin de mieux comprendre la hiérarchie entre ces différentes propriétés et, à l'inverse, les comportements pouvant « tuer » le chaos.

Des travaux récents ont précisé la place du chaos au sens de Li-Yorke dans la dynamique topologique. Ainsi, un système d'entropie topologique non nulle est chaotique au sens de Li-Yorke [3], de même qu'un système dispersant ou qu'un système transitif ayant un point périodique [15]. Néanmoins, si un système inversible (X, T) est transitif et chaotique au sens de Li-Yorke, on ignore si (X, T^{-1}) l'est également ; des exemples montrent que l'hypothèse de transitivité est nécessaire [14].

Un système (X, T) est dit *Li-Yorke-sensible* s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x il existe $y \in U$ tel que (x, y) soit un couple de Li-Yorke de module δ (c'est-à-dire $\limsup d(T^n x, T^n y) > \delta$ et $\liminf d(T^n x, T^n y) = 0$). Cette notion a été introduite et étudiée récemment par Akin et Kolyada, qui ont dégagé un certain nombre de propriétés [1]. Il reste plusieurs questions ouvertes, en particulier on ne sait pas si la sensibilité Li-Yorke implique le chaos au sens de Li-Yorke.

Un autre sujet intéressant provient des travaux de Weiss. Si (X, T) est un système inversible, le point $x \in X$ est dit *récurrent* (resp. *positivement récurrent*) si x est valeur d'adhérence de l'ensemble $\{T^n x; x \in \mathbb{Z}\}$ (resp. $\{T^n x; x \in \mathbb{N}\}$). Weiss a montré que si tous les points de $(X \times X, T \times T)$ sont positivement récurrents alors $h_{top}(X, T) = 0$ [25]. Un tel système ne possède pas de couples asymptotiques propres, ainsi le résultat que j'ai montré avec F. Blanchard et B. Host ($h_{top}(X, T) > 0 \Rightarrow$ existence de couples asymptotiques propres, voir paragraphe 2.1) généralise le résultat de Weiss. J'aimerais me pencher sur la question suivante : si tous les points de $(X \times X, T \times T)$ sont récurrents, a-t-on nécessairement $h_{top}(X, T) = 0$? Actuellement, on sait seulement que la conclusion est juste si on suppose que tous les points de $(X \times X \times X, T \times T \times T)$ sont récurrents.

3.2 Dynamique en dimension 1

Je compte tout d'abord poursuivre mes travaux sur les nombres de rotation exposés au paragraphe 2.5. Ensuite, j'aimerais d'une part affiner mes travaux sur l'existence de mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle, et d'autre part aborder la thématique des mesures absolument continues.

J'ai montré avec J. Buzzi que si f est une transformation C^1 de l'intervalle satisfaisant $h_{top}(f) > h_{loc}(f) + h_{top}(C, f)$, où $h_{loc}(f)$ désigne l'entropie locale et C l'ensemble des points critiques, alors il existe une mesure d'entropie maximale. Cette inégalité est-elle optimale ? Elle l'est dans le cas des transformations dont l'entropie des points critiques est zéro : on connaît des transformations sans mesure maximale qui vérifient $h_{top}(C, f) = 0$ et $h_{top}(f) = h_{loc}(f)$ [17]. Dans le cas général, J. Buzzi conjecture que la bonne hypothèse est $h_{top}(f) > h_{loc}(f)$. Deux approches sont possibles : étudier le poids de $h_{top}(C, f)$ (on ne connaît pas d'exemple C^1 où cette quantité est non nulle mais on sait que $h_{top}(C, f) = 0$ dans le cas C^∞) ; ou approfondir la relation avec les chaînes de Markov topologiques, pour lesquelles cette conjecture est vraie (voir le paragraphe 2.3).

D'autre part, je suis curieuse de savoir s'il existe des transformations de l'intervalle transitives ayant plusieurs mesures d'entropie maximale ; de tels exemples seraient nécessairement très irréguliers.

Par ailleurs, j'aimerais m'intéresser aux mesure absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, qui représentent les mesures les plus « observables ». Je pense que mon expérience me sera utile dans ce domaine, notamment en raison de l'importance du caractère dérivable. Je me demande en particulier comment « voir » qu'une mesure invariante absolument continue n'est pas d'entropie maximale. Une amorce de réponse est donnée par le fait qu'on peut approximer l'entropie topologique grâce à des fers à cheval, qui sont des comportements observables « à l'échelle de l'intervalle ». Rappelons qu'un fer à cheval est composé d´intervalles fermés disjoints $J_1, \ldots, J_k$ tels que $f^n(J_i) \supset J_1 \cup \cdots \cup J_k$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et cette configuration implique $h_{top}(f) \geq \frac{\log k}{n}$.

3.3 Représentation par chaînes de Markov en dimension supérieure

Pour les transformations de l'intervalle, le principal outil pour étudier les mesures d'entropie maximale est la construction d'un diagramme de Markov. J. Buzzi a montré qu'en dimension supérieure on peut également associer une chaîne de Markov topologique à une transformation f, à condition que celle-ci soit $C^{1+\alpha}$ et *entropie-dilatante* (ce qui signifie que l'entropie ne se concentre pas sur des sous-ensembles de dimension inférieure) [7, 8]. Il semble qu'il n'y ait pas d'obstacle pour généraliser à ces systèmes la condition d'existence de mesure d'entropie maximale énoncée au paragraphe 2.4.

Par ailleurs, je pense que pour les transformations f transitives cette représentation par une chaîne de Markov topologique peut servir à montrer la densité des points périodiques. En effet, on sait que pour une chaîne de Markov topologique transitive les points périodiques sont denses. Que deviennent ces points périodiques quand on les transporte via l'isomorphisme ? La difficulté vient du fait qu'on doit négliger certains sous-ensembles pour construire cet isomorphisme, mais je pense qu'on conserve suffisamment d'information pour montrer que les points périodiques sont denses pour les transformations transitives, $C^{1+\alpha}$ et entropie-dilatantes. L'intérêt de cet axe de recherche est essentiellement en dimension supérieure à 2 car la densité des points périodiques pour les systèmes transitifs en dimension 1 est déjà connue.

Je voudrais également expliciter l'hypothèse « entropie-dilatante » pour les transformations triangulaires. J'envisage l'étude de cette classe de systèmes comme une première étape dans la compréhension du problème précédent.

3.4 Chaînes de Markov topologiques, diagrammes de Bratteli

Outre les travaux en cours évoqués à la fin du paragraphe 2.3, je me pose avec J. Buzzi la question suivante : si deux chaînes de Markov topologiques sur un graphe récurrent positif ont la même entropie, sont-elles nécessairement h-conjuguées ? Une *h-conjugaison* entre deux systèmes (X, T) et (Y, S) est une conjugaison mesurable entre $X \setminus M$ et $Y \setminus N$, où M et N sont des sous-ensembles invariants (non nécessairement fermés) pour lesquels le sup des entropies métriques est strictement inférieur à l'entropie de X et Y. En particulier une h-conjugaison induit une bijection entre les mesures ergodiques d'entropie maximale des deux systèmes. C'est ce type de conjugaison qui est construit quand on associe un diagramme de Markov à une transformation de l'intervalle ou une transformation entropie-dilatante. Il est à noter qu'on peut construire plusieurs diagrammes de Markov pour une même transformation en faisant varier le découpage, par exemple en le raffinant. Les différentes chaînes de Markov topologiques obtenues sont alors h-conjuguées, mais de manière indirecte. Plus généralement on peut se demander quelles sont les classes de h-conjugaison pour les chaînes de Markov topologiques, et pour cela chercher à déterminer les propriétés conservées par h-conjugaison.

Enfin, je compte collaborer avec T. Dooley pour étudier certaines propriétés des systèmes de Bratteli-Vershik. Ce sont des odomètres sur des types particuliers de graphes infinis, et ils sont utilisés pour représenter, via une orbite-équivalence, des systèmes dynamiques non singuliers [10]. Nous nous intéressons à l'éventuelle relation entre l'entropie topologique et le comportement du système dynamique mesuré, et nous recherchons un invariant pour l'orbite-équivalence entre systèmes de Bratteli-Vershik ; le taux de croissance des boules pourrait être un candidat pour cet invariant.

Références

[1] E. Akin and S. Kolyada. Li-Yorke sensitivity. *Nonlinearity*, 16 :1421–1433, 2003.

[2] Ll. Alsedà, J. Llibre, and M. Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, volume 5 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 2000.

[3] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, and A. Maass. On Li-Yorke pairs. *J. Reine Angew. Math.*, 547 :51–68, 2002.

[4] F. Blanchard, B. Host, and S. Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 22 :671–686, 2002.

[5] L. S. Block and W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension*. Lecture Notes in Mathematics, no. 1513. Springer-Verlag, 1992.

[6] J. Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100 :125–161, 1997.

[7] J. Buzzi. Markov extensions for multi-dimensional dynamical systems. *Israel J. Math.*, 112 :357–380, 1999.

[8] J. Buzzi. On entropy-expanding maps. Preprint École Polytechnique no. 2000-14, 2000.

[9] J. Buzzi and S. Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 14(4) :673–688, 2006.

[10] A. H. Dooley and Toshihiro Hamachi. Nonsingular dynamical systems, Bratteli diagrams and Markov odometers. Preprint, 2002.

[11] B. M. Gurevich. Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 192 :963–965, 1970. English translation *Soviet Math. Dokl*, 11(3) :744–747, 1970.

[12] B. M. Gurevich and A. S. Zargaryan. A continuous one-dimensional mapping without a measure with maximal entropy (Russian). *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(2) :60–61, 1986. English translation *Functional Anal. Appl.*, 20(2), 134–136, 1986.

[13] F. Hofbauer. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. *Israel J. Math.*, **I.** 34(3) :213–237, 1979. **II.** 38(1–2) :107–115, 1981.

[14] W. Huang and X. Ye. Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets. *Ergod. Th. Dynam. Systems*, 21(1) :77–91, 2001.

[15] W. Huang and X. Ye. Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos. *Topology Appl.*, 117(3) :259–272, 2002.

[16] S. E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2) :215–235, 1989. Corrections, 131(2) :409–410, 1990.

[17] S. Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure. *Israel J. Math*, 127 :253–277, 2002.

[18] S. Ruette. Note on transient graphs. Manuscript, 2002.

[19] S. Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for topological Markov chains. *Pacific J. Math.*, 209(2) :365–380, 2003.

[20] S. Ruette. C^n interval maps not Borel conjugate to any C^∞ map. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(4) :1091–1093, 2004.

[21] S. Ruette. Transitive sensitive subsystems for interval maps. *Studia Math.*, 169(1) :81–104, 2005.

[22] S. Ruette. *Chaos on the interval.* University Lectures series, No. 67. AMS, 2017.

[23] I. A. Salama. On the recurrence of countable topological Markov chains. In *Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991)*, Contemp. Math, 135, pages 349–360. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[24] Ľ. Snoha. Dense chaos. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 33(4) :747–752, 1992.

[25] B. Weiss. Multiple recurrence and doubly minimal systems. In *Topological dynamics and applications (proceedings of a conference in honor of R. Ellis, Univ. of Minnesota)*, Contemporary Mathematics, 215, pages 189–196. Amer. Math. Soc., 1998.