QUALIFICATION

Dossier pour la procédure de qualification (année 2002)
aux fonctions de maître de conférence
25ème section (mathématiques)

Sylvie RUETTE
Bâtiment B
9, bd Saint-Simon
13009 Marseille

Liste des pièces jointes :

- Photocopie de la carte d'identité
- Attestation de réussite au doctorat
- Rapports de pré-soutenance de thèse de MM. E. Glasner et B. Schmitt
- Rapport de soutenance de thèse
- Contrat de monitorat
- Attestations d'enseignement de MM. Maltret et Lafont
- Lettre d'*Israel Journal of Mathematics* attestant l'acceptation de l'article "Mixing C^r maps of the interval without maximal measure"
- Lettre d'*Ergodic Theory & Dynamical Systems* attestant l'acceptation de l'article "Asymptotic pairs in positive-entropy systems"
- Mémoire de thèse
- Article "Mixing C^r maps of the interval without maximal measure"
- Article "Asymptotic pairs in positive-entropy systems"
- Article "Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps"

Sylvie RUETTE
Bâtiment B
9, bd Saint-Simon
13009 Marseille
Tél personnel : 04 91 40 55 14
Tél professionnel : 04 91 26 96 77
Fax : 04 91 26 96 55
Mail : ruette@iml.univ-mrs.fr
Page web : `http://iml.univ-mrs.fr/~ruette/`

Née le 7 mars 1975 à Paris (12e)
Nationalité française

Situation actuelle : allocataire monitrice (AMN) à l'Université Aix-Marseille II

Formation

1998-2001	Doctorat en mathématiques, Université Aix-Marseille II
1995-1999	Scolarité à l'École Normale Supérieure de Lyon (98-99 : 1ère année de thèse)
1995-1998	Magistère de Mathématiques et Applications, Université Lyon I, mention bien
1998	Agrégation de mathématiques, rang : 31
1997-1998	DEA de mathématiques, Université Lyon I, mention bien
1997-1998	Maîtrise de mathématiques, Université Lyon I, mention bien
1997-1998	Licence de mathématiques, Université Lyon I, mention bien
1993-1995	Classes préparatoires, lycée Montaigne (Bordeaux)
1993	Baccalauréat série C, mention très bien

Expérience

Recherche

1998-2001 Thèse de mathématiques effectuée au sein de l'Institut de Mathématiques de Luminy.
Titre : « Chaos en dynamique topologique, en particulier sur l'intervalle, mesures d'entropie maximale ».
Directeur de thèse : François Blanchard.
Soutenance : le 26 novembre 2001 à l'Institut de Mathématiques de Luminy (Marseille), devant le jury composé de :
M. François Blanchard, Directeur de Recherche, Institut de Mathématiques de Luminy,
M. Jérôme Buzzi, Chargé de Recherche, École Polytechnique,
M. Albert Fathi, Professeur, École Normale Supérieure de Lyon,
M. Bernard Host, Professeur, Université de Marne la Vallée,
M. Bernard Schmitt, Professeur, Université de Bourgogne (Dijon),
M. Serge Troubetzkoy, Professeur, Institut de Mathématiques de Luminy.
Mention : très honorable

2000 Séjour de deux mois à l'Universidad de Chile (Santiago, Chili) et collaboration sur place avec Alejandro Maass.

1998 Stage de DEA à l'Institut de Mathématiques de Luminy, sous la direction de François Blanchard. Thème : sensibilité aux conditions initiales dans les systèmes dynamiques.

1997 Stage de magistère (6 semaines) à l'Université de Bretagne Occidentale (Brest), sous la direction de Yves Lacroix. Thème : disjonction dans les systèmes dynamiques topologiques et mesurés.

1996	Stage de magistère (6 semaines) à l'Université de Mathématiques de Genève, sous la direction de Pierre de La Harpe. Thème : comportement asymptotique du nombre de sous-groupes d'indice fini.

Enseignement

Monitrice depuis septembre 1999 à l'Université Aix-Marseille II.

Les enseignements pour l'année en cours se décomposeront comme suit :

2001-2002	56 heures de TD en 1ère année de DEUG MIAS, en *Techniques de calcul* et en *Algèbre Linéaire*, responsable de l'enseignement : Y. Lafont. 5 heures de colles en 2ème année de DEUG MIAS, en *Mathématiques avancées.* 3 heures de colles en 1ère année de DEUG MIAS.

Années précédentes :

2000-2001	56 heures de TD en 1ère année de DEUG MIAS, en *Techniques de calcul* et en *Algèbre Linéaire*, responsable de l'enseignement : Y. Lafont. Participation à la rédaction de sujets d'examen et à la correction. 8 heures de colles en 2ème année de DEUG MIAS, en *Mathématiques avancées.*
1999-2000	56 heures de TD en 1ère année de DEUG SM, en *Techniques de calcul* et en *Algèbre Linéaire*, responsable de l'enseignement : J.-L. Maltret. Correction d'examen 8 heures de colles en 2ème année de DEUG MIAS, en *Mathématiques avancées.*

Colles : ce sont des interrogations orales individuelles (environ 20 minutes par étudiant), consistant en questions de cours et en exercices.

Techniques de calcul : c'est un cours de base apportant des compléments aux connaissances de lycée sur les sujets suivants : complexes (racines de l'unité, exponentielle complexe...), applications (injection, surjection...), calcul différentiel et intégral (développement limité d'ordre 1 et 2, accroissements finis, changement de variable...), suites récurrentes linéaires d'ordre 1 et 2, équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants avec second membres.

Algèbre linéaire : on aborde les notions élémentaires d'algèbre linéaire en se plaçant dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et on met l'accent sur l'aspect géométrique (sous-espaces orthogonaux, équations d'espaces affines...).

Thèmes de recherche

Recherche effectuée durant ma thèse

Un système dynamique topologique (X, T) est la donnée d'une transformation continue $T: X \to X$, l'espace X étant le plus souvent un ensemble métrique compact. L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation, T^n désigne la transformation T composée n fois ($T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$). On cherche à étudier le comportement du système pour des temps n tendant vers l'infini.

Je me suis intéressée aux propriétés liées au chaos et à l'existence de mesures d'entropie maximale pour certains systèmes dynamiques topologiques, en particulier ceux sur l'intervalle.

Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle

Soit (X, T) un système dynamique topologique, où X est un expace métrique compact et d désigne la distance sur X. Si x, y sont deux points de X, nous dirons que (x, y) est un *couple de Li-Yorke* si

$$\limsup_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

Par ailleurs, (x, y) est un *couple asymptotique* si

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0;$$

le couple est *propre* si $x \neq y$.

Blanchard, Glasner, Kolyada et Maass ont montré récemment qu'une entropie topologique non nulle impliquait l'existence de nombreux couples de Li-Yorke. J'ai montré avec F. Blanchard et B. Host qu'un système d'entropie topologique non nolle possède également des couples asymptotiques propres [2], par conséquent il y a cohabitation de comportements chaotiques (les couples de Li-Yorke) et non chaotiques (les couples asymptotiques).

Plus précisément, nous avons montré que, pour une mesure ergodique μ d'entropie non nulle (une telle mesure existe par le principe variationnel), presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. De plus, quand le système (X, T) est inversible, pour μ-presque tout point x il existe un ensemble non dénombrable de points y tels que (x, y) est un couple asymptotique pour T et un couple de Li-Yorke pour T^{-1}. Ces résultats reposent presque exclusivement sur des preuves ergodiques.

On peut voir l'ensemble des points formant un couple asymptotique avec x comme sa *classe stable*; ce résultat montre que les classes stables pour T sont presque sûrement instables pour T^{-1}, ce qui rappelle un peu le comportement des systèmes Anosov, qui ont des feuilletages stables et instables.

Chaînes de Markov topologiques et mesures d'entropie maximale

Une chaîne de Markov topologique est l'ensemble des chemins bi-infinis sur un graphe orienté dénombrable, muni de la transformation shift (décalage vers la gauche). Contrairement aux chaînes de Markov probabilistes, il n'y a pas de probabilité *a priori*, mais on peut chercher à munir le système d'une mesure invariante. Les chaînes de Markov topologiques sont un outil essentiel pour l'étude des mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle (voir la section suivante).

Vere-Jones a classé les graphes orientés connexes en trois catégories (transients, récurrents nuls, récurrents positifs) selon des critères combinatoires liés au nombre de chemins, ceci par analogie avec les chaînes de Markov probabilistes. Salama a donné une approche géométrique de cette classification : si un graphe connexe G ne possède pas de sous-graphe propre de même entropie, alors G est nécessairement récurrent positif ; d'autre part, un graphe connexe G est transient si et seulement s'il est strictement inclus dans un graphe transient de même entropie. J'ai complété cette approche en montrant qu'un graphe transient G peut toujours être inclus dans un surgraphe récurrent de même entropie, qui est soit récurrent nul soit récurrent positif selon les propriétés du graphe G [3].

Gurevich a montré que cette classification est intimement liée à l'existence de mesures d'entropie maximale : si G est un graphe orienté connexe, la chaîne de Markov sur G admet une mesure d'entropie maximale si et seulement si G est récurrent positif. J'en ai déduit une condition d'existence de mesure d'entropie maximale utilisant la notion d'entropie locale [3] : si l'entropie de la chaîne de Markov est strictement supérieure à son entropie locale, alors le graphe est récurrent positif, donc il existe une mesure d'entropie maximale. Ceci conforte la conjecture de Buzzi énonçant que ce résultat est vrai pour les transformations de l'intervalle, mais cette question est toujours ouverte.

J'ai également montré que pour un graphe G sans mesure d'entropie maximale il existe une suite de mesures μ_n presque maximales fuyant vers l'infini [4], c'est-à-dire que l'entropie de μ_n tend vers l'entropie de la chaîne de Markov sur G, et que pour tout ensemble fini de sommets S, $\mu_n([S])$ tend vers 0, où $[S]$ désigne le cylindre correspondant à V. Ce résultat est un des points-clés d'un critère d'existence de mesure d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle.

Transformations de l'intervalle et mesures d'entropie maximale

Une transformation de l'intervalle est une application continue $f\colon I \to I$, où I est un intervalle compact. L'essentiel de la dynamique d'un système sur l'intervalle peut se ramener à une chaîne de Markov topologique sous certaines conditions. Cela a d'abord été montré par Hofbauer pour les applications monotones par morceaux, puis Buzzi a généralisé la construction de Hofbauer en associant un graphe orienté, appelé *diagramme de Markov*, aux transformations de l'intervalle, en particulier dans le cas C^1. Si l'entropie topologique de la transformation f est strictement supérieure à l'entropie des zéros de la dérivée de f, alors il y a une bijection entre les mesures d'entropie maximale de f et celles de son diagramme de Markov.

En combinant les propriétés des chaînes de Markov topologiques et des résultats liés à la dérivabilité, J. Buzzi et moi-même avons montré un critère d'existence de mesure d'entropie maximale pour les transformations C^1 de l'intervalle [4]. En utilisant une majoration de l'entropie des zéros de la dérivée et de l'entropie locale, deux quantités qui apparaissent dans ce critère, nous obtenons une condition plus facile à vérifier pour une transformation f qui est C^r : si $h_{top}(f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty$, alors f admet une mesure d'entropie maximale.

Ce théorème implique que toute transformation C^∞ de l'intervalle a une mesure d'entropie maximale, résultat déjà montré par Newhouse et Buzzi. Ce théorème prend en fait toute son importance pour des valeurs de r finies, car on ne connaissait pas jusqu'à présent de condition d'existence dans ce cas, et pour tout entier r j'ai montré qu'il existe une transformation de l'intervalle qui est C^r et transitive mais qui n'a pas de mesure d'entropie maximale [1]. Pour le démontrer, j'ai utilisé l'approche géométrique de Salama présentée plus haut pour montrer que le diagramme de Markov de la transformation n'a pas de mesure d'entropie maximale.

Perspectives

Je souhaiterais affiner certains résultats obtenus pendant ma thèse. En particulier, il semble possible d'étendre en dimension supérieure le critère d'existence de mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle. Par ailleurs, on peut se demander si l'inégalité apparaissant dans ce critère est optimale. Pour répondre à cette question, il est fondamental d'étudier le poids de l'entropie topologique des zéros de la dérivée : cette quantité intervient-elle réellement ? une régularité suffisante oblige-t-elle cette quantité à être nulle ? À l'heure actuelle, nous ne disposons même pas d'exemples dont l'entropie topologique des zéros de la dérivée soit non nulle.

J'aimerais également aborder de nouvelles questions, dans le prolongement des thématiques de ma thèse. La notion de chaos repose sur un faisceau de propriétés, et il importe d'étudier ce qu'implique chacune de ces propriétés et les liens qu'elles nouent entre elles ; par exemple, si le système inversible (X, T) est transitif et chaotique au sens de Li-Yorke, on ne sait pas si le système inverse (X, T^{-1}) a la même propriété. Pour les chaînes de Markov topologiques, j'ai montré qu'un graphe transient G est inclus dans un graphe récurrent H de même entropie ; il serait intéressant de savoir quelles informations la mesure d'entropie maximale sur H donne sur le graphe G. Enfin, on ne sait rien sur les mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle continues mais non dérivables ; par exemple, plusieurs mesures d'entropie maximale pourraient-elles coexister dans le cas transitif ? Les outils dont nous disposons actuellement ne permettent pas d'aborder cette question, d'autres méthodes restent à inventer.

Publications

Articles acceptés dans une revue internationale avec comité de lecture

[1] S. Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure, à paraître dans *Israel Journal of Mathematics*.

[2] F. Blanchard, B. Host, and S. Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems, à paraître dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.

Articles soumis

[3] S. Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for topological Markov chains, soumis à *Pacific Journal of Mathematics*.

[4] J. Buzzi and S. Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps, soumis à *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.

Communications orales

Conférences internationales

— Colloque Temps de Retour, Entropie et Complexité, CIRM, Marseille, mars 2000. *Stable classes in positive-entropy systems : a parallel with Anosov.*

— Conference Dynamical Systems and Ergodic Theory, Katsiveli (Ukraine), août 2000. *Asymptotic pairs and entropy.*

— Colloque Théorie Ergodique et Systèmes dynamiques, Villetaneuse, août-septembre 2001. *A criterion for existence of measures of maximal entropy for topological Markov chains.*

Séminaires

— Séminaire Ernest, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille. *Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle*, octobre 1999.

— Séminaire Dynamique Symbolique et Arithmétique, Université de Provence, Marseille. *Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle*, mars 2000.

— Séminaire du Département de Mathématiques, Universidad de Chile, Santiago (Chili). *Couples asymptotiques et entropie*, juin 2000.

— Séminaire Ernest, Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille. *Critère d'existence d'une mesure d'entropie maximale pour une chaîne de Markov topologique*, novembre 2000.

— Séminaire de Théorie des nombres, Algorithmique et Complexité, Université de Provence, Marseille. *Chaînes de Markov topologiques sur les graphes*, décembre 2000.

— Séminaire de Géométrie Ergodique, École Polytechnique, Palaiseau. *Existence de couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, décembre 2000.

— Séminaire de Théorie Ergodique, Université de Bourgogne, Dijon. *Existence de mesures d'entropie maximales pour des transformations de l'intervalle*, mai 2001.

— Séminaire de Probabilités et Théorie Ergodique, Université de Picardie, Amiens. *Existence de couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle*, octobre 2001.

— Séminaire de Dynamique, Université Paris-Sud XI, Orsay. *Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle : conditions d'existence, contre-exemples*, octobre 2001.