Projet de recherche

CNRS – section 01

Sylvie Ruette

Mon domaine de recherche est la dynamique topologique. Un système dynamique topologique (X,T) est la donnée d'une transformation continue $T\colon X \to X$, l'espace X étant le plus souvent un ensemble métrique compact. L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation, T^n désignant la transformation T composée n fois ($T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$). On cherche à étudier le comportement du système pour des temps n tendant vers l'infini.

Les deux thématiques majeures de mes recherches sont d'une part l'entropie topologique et le chaos, et d'autre part le problème d'existence de mesures d'entropie maximale. J'ai travaillé sur trois types de systèmes dynamiques : les transformations continues sur un espace métrique compact, les transformations de l'intervalle, sous-ensemble très particulier de la classe précédente, et les chaînes de Markov topologiques, qui sont des systèmes symboliques sur des graphes infinis. Ces deux derniers types de systèmes sont en relation. En effet, les transformations de l'intervalle peuvent, sous certaines conditions, être représentées par des chaînes de Markov topologiques, et cette représentation est un outil essentiel pour l'étude des mesures d'entropie maximale. Mes travaux sont également liés à la théorie ergodique, d'une part parce qu'un système dynamique topologique muni d'une mesure d'entropie maximale devient un système dynamique mesuré, et d'autre part parce que j'ai été amenée à utiliser des outils ergodiques et probabilistes pour démontrer des résultats topologiques, ceci étant rendu possible par le principe variationnel qui lie l'entropie topologique à l'entropie métrique.

Je présente dans une première partie les thématiques sur lesquelles je travaille et les résultats que j'ai obtenus depuis 4 ans, puis dans une seconde partie mon projet de recherche.

1 Rapport de recherche

1.1 Couples asymptotiques dans les systèmes d'entropie non nulle

Historiquement, le terme de chaos a été introduit par Li et Yorke pour qualifier le comportement de certains systèmes sur l'intervalle. Par la suite, d'autres définitions du chaos ont été proposées ; elles ne coïncident pas en général, sans qu'aucune puisse figurer comme l'unique « bonne » définition. Il apparaît que la notion de chaos repose plutôt sur un faisceau de propriétés. Il importe d'étudier les relations entre ces propriétés, mais également de savoir dans quelle mesure certains comportements réguliers sont compatibles avec une propriété chaotique donnée.

Soit $T\colon X \to X$ une transformation continue sur un espace métrique compact ; d désigne la distance. Si x et y sont deux points de X, (x,y) est appelé un *couple de Li-Yorke* si

$$\limsup_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0.$$

Le système (X,T) est dit *chaotique au sens de Li-Yorke* s'il existe un ensemble non dénombrable $S \subset X$ tel que tout couple de points distincts de S est un couple de Li-Yorke. Par ailleurs, (x,y) est un *couple asymptotique* si

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n x, T^n y) = 0;$$

le couple est *propre* si $x \neq y$.

J'ai montré avec F. Blanchard et B. Host qu'un système dynamique (X,T) d'entropie topologique non nulle possède nécessairement des couples asymptotiques propres [4]. Ce résultat répond par la négative à une question de Huang et Ye qui ont étudié les systèmes dont tous les couples de points distincts sont des couples de Li-Yorke et qui se demandaient si de tels systèmes pouvaient avoir une entropie topologique non nulle. Presque au même moment, Blanchard, Glasner, Kolyada et Maass ont montré qu'une entropie non nulle implique le chaos au sens de Li-Yorke [3]. Par conséquent, dans un système d'entropie non nulle il y a cohabitation de couples « chaotiques » (Li-Yorke) et « non chaotiques » (asymptotiques).

Plus précisément, nous avons montré que, pour toute mesure ergodique d'entropie non nulle, presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. Si de plus T est inversible, pour presque tout point x il existe un ensemble non dénombrable de points y tels que (x,y) est un couple asymptotique pour T et un couple de Li-Yorke pour T^{-1}, ce qui rappelle les feuilletages stables et instables des Anosov. Les preuves de ces résultats reposent presque exclusivement sur des arguments ergodiques ; il serait intéressant de montrer l'existence de couples asymptotiques de façon purement topologique.

1.2 Le chaos pour les transformations de l'intervalle

Une *transformation de l'intervalle* est un système dynamique topologique donné par une fonction continue $f\colon I \to I$, où I est un intervalle compact. Pour ces systèmes, les relations entre les divers types de chaos sont bien plus nombreuses que pour des systèmes dynamiques sur des espaces quelconques. Par exemple, la transitivité implique la sensibilité aux conditions initiales, la densité des points périodiques, une entropie non nulle, et d'autres propriétés encore. Beaucoup de travaux ont été menés sur ce sujet, mais les résultats sont éparpillés das la littérature, parfois mal connus ou publiés sans preuve. J'ai abordé ce sujet pendant ma thèse puis, après ma thèse, j'ai rédigé un ouvrage dans le but de donner une vue d'ensemble sur les liens existant entre les différentes propriétés liées au chaos sur l'intervalle [17]. Je me suis attachée à donner des preuves complètes, parfois originales, et à illustrer les résultats par des exemples. Ce travail inclut également quelques résultats nouveaux. J'ai notamment montré qu'une transformation de l'intervalle densément chaotique a une entropie supérieure ou égale à $\log 2/2$ et que son type pour l'ordre de Sharkovskii est au plus 6 (c'est-à-dire qu'il existe un point périodique de période 6), l'égalité étant possible dans les deux cas ; ce résultat répond à certaines questions posées par Snoha dans [24].

En complément de ce travail de synthèse, j'ai étudié l'existence d'un sous-système transitif et sensible aux conditions initiales (*chaos au sens de Wiggins*) : pour les transformations de l'intervalle, l'existence d'un tel sous-système est impliquée par l'entropie non nulle (résultat déjà connu [5]) et implique le chaos au sens de Li-Yorke ; j'ai construit des exemples montrant qu'aucune de ces deux implications n'est une équivalence [20].

1.3 Chaînes de Markov topologiques et classification des graphes

Une *chaîne de Markov topologique* (ou *shift de Markov*) est un système symbolique défini par l'ensemble des chemins bi-infinis sur un graphe orienté dénombrable, muni de la transformation shift (décalage vers la gauche). Contrairement aux chaînes de Markov probabilistes, il n'y a pas de probabilité *a priori*. Outre leur intérêt propre, les chaînes de Markov topologiques permettent de représenter certains systèmes et elles sont utilisées pour étudier les mesures d'entropie maximale.

Les graphes orientés connexes sont classés en trois catégories : transients, récurrents nuls, récurrents positifs, en fonction de critères combinatoires liés au nombre de chemins. Cette classification est intimement liée à l'existence de mesures d'entropie maximale : Gurevich a montré qu'il existe une mesure de probabilité d'entropie maximale si et seulement si le graphe est récurrent positif [12] ; dans le cas des graphes récurrents nuls, il existe une mesure infinie jouant le rôle de mesure d'entropie maximale.

J'ai montré que si l'entropie d'une chaîne de Markov topologique sur un graphe connexe est strictement supérieure à son entropie locale alors le graphe est récurrent positif, si bien qu'il existe une mesure d'entropie maximale [22]. Étant donné les liens entre chaînes de Markov topologiques et transformations de l'intervalle, ce résultat conforte la conjecture de Buzzi énonçant que le même résultat est vrai pour les transformations de l'intervalle, mais cette question est toujours ouverte.

J'ai également montré que pour un graphe sans mesure d'entropie maximale il existe une suite de mesures ergodiques presque maximales fuyant vers l'infini ; ce résultat est un des points-clés d'un critère d'existence de mesure d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle [9], énoncé dans le paragraphe 1.4.

Salama a donné une approche géométrique de la classification transient/récurrent nul/récurrent positif en termes d'existence de sous-graphes ou de surgraphes de même entropie : un graphe connexe sans sous-graphe propre de même entropie est récurrent positif, et un graphe connexe est transient si et seulement s'il est strictement inclus dans un graphe transient de même entropie [23]. J'ai complété ces travaux en montrant qu'un graphe transient G peut toujours être inclus dans un graphe récurrent de même entropie, qui est soit récurrent nul soit récurrent positif selon les propriétés de G [22].

J'ai également entamé des recherches sur les graphes transients portant sur les questions suivantes : à quelle condition peut-on définir des probabilités de transitions canoniques transformant un graphe transient en une chaîne de Markov probabiliste transiente ? Étant donné qu'un graphe transient G est inclus dans un graphe récurrent G' de même entropie, quelles informations la mesure d'entropie maximale (finie ou infinie) sur G' donne-t-elle sur G ? Pour l'instant, je n'ai étudié que des cas particuliers [19].

1.4 Mesures maximales pour les transformations de l'intervalle

Une *mesure maximale* μ est une mesure de probabilité invariante dont l'entropie réalise le supremum des entropies métriques ; par le principe variationnel l'entropie de μ est égale à l'entropie topologique. Les mesures maximales sont particulièrement intéressantes car elles reflètent la totalité de la complexité topologique et permettent de voir où se concentre cette complexité. Elles ont un sens physique moins évident que les mesures absolument continues, par contre elles sont préservées par les conjugaisons par homéomorphisme.

Si f est une transformation de l'intervalle, on peut lui associer un graphe orienté, généralement infini, appelé *diagramme de Markov*. Cette construction, basée sur la dynamique des sous-intervalles de monotonie, a d'abord été faite par Hofbauer pour les transformations monotones par morceaux, puis généralisée par Buzzi. Sous certaines conditions, la chaîne de Markov topologique sur ce graphe représente l'essentiel de la dynamique de f. En particulier, Buzzi a montré que si l'entropie de f est strictement supérieure à l'entropie topologique des points critiques (c'est-à-dire les points au voisinage desquels f n'est pas monotone), alors il y a une bijection entre les mesures maximales ergodiques de f et celles de son diagrammme de Markov [6]. Le problème de l'existence de telles mesures pour f se transpose alors sur le graphe.

Une transformation de l'intervalle f qui est soit monotone par morceaux soit C^∞ admet au moins une mesure maximale, et cette mesure est unique si f est transitive (Hofbauer [13] pour le cas monotone par morceaux, Newhouse [16] et Buzzi [6] pour le cas C^∞). Ce résultat n'est pas vrai si on supose seulement f continue, comme l'ont montré Gurevich et Zargaryan [11]. La condition C^∞ ne peut pas non plus être affaiblie : pour tout entier n, j'ai construit des transformations de l'intervalle C^n, transitives, mais sans mesure maximale [18]. Pour cela, j'ai utilisé l'approche géométrique de Salama présentée au paragraphe 1.3 pour montrer que le graphe de Markov associé à ces transformations est transient ; l'absence de mesure maximale pour le graphe se transporte alors sur l'intervalle.

J'ai déduit des résultats précédents que pour tout entier n il existe des transformations de l'intervalle C^n, transitives, qui ne sont boréliennement conjuguées à aucune transformation C^∞ [21].

D'un autre côté, J. Buzzi et moi-même avons montré que la régularité de la transformation permet de donner une condition suffisante d'existence [9], en combinant des résultats liés à la dérivabilité et des propriétés des chaînes de Markov topologiques. On considère f une transformation C^1 de l'intervalle ; on note C l'ensemble des points critiques, $h_{top}(C,f)$ l'entropie de l'ensemble C et $h_{loc}(f)$ l'entropie locale de f. Si l'entropie topologique $h_{top}(f)$ vérifie $h_{top}(f) > h_{top}(C,f) + h_{loc}(f)$, alors f a un nombre fini non nul de mesures maximales ergodiques, avec unicité si f est transitive. En utilisant une majoration de l'entropie des zéros de la dérivée et de l'entropie locale, nous obtenons une condition plus facile à vérifier pour les transformations C^r : si

$$h_{top}(f) > \frac{2}{r} \log \|f'\|_\infty,$$

alors le nombre de mesures maximales ergodiques est fini et non nul.

2 Projet de recherche

Les questions liées au chaos en dynamique topologique s'inscrivent naturellement dans le prolongement de mes travaux sur l'entropie et les couples asymptotiques. J'aimerais travailler à une meilleure compréhension des diverses propriétés chaotiques. Cette problématique associe la topologie, la théorie ergodique et la dynamique symbolique, domaines que j'ai déjà abordés dans mes précédents travaux.

J'ai acquis une vue d'ensemble sur les transformations de l'intervalle et j'ai manipulé des outils tant différentiables que symboliques pour étudier les mesures d'entropie maximales. J'aimerais élargir mon champ de recherche selon deux directions : d'une part en étudiant des espaces de dimension 1 autres que l'intervalle, d'autre part en utilisant mes connaissances sur les représentations par chaînes de Markov topologiques pour des systèmes en dimension supérieure.

L'utilisation des chaînes de Markov topologiques m'a révélée la richesse de cet outil mais aussi l'intérêt propre de ces systèmes, dont je souhaite approfondir l'étude. Je m'intéresse également aux diagrammes de Bratteli, autre catégorie de systèmes sur des graphes infinis, qui fournissent des représentations pour d'autres types de systèmes dynamiques.

Mon projet de recherche s'intègrerait particulièrement bien dans le laboratoire de mathématiques de l'Université de Marne-la-Vallée. Je pourrai y poursuivre ma collaboration avec B. Host et bénéficier de l'environnement d'autres universités (notamment Paris 13, dont le groupe de dynamique entretient des liens privilégiés avec l'Université de Marne-la-Vallée). Ce projet s'intègrerait également dans les thématiques de l'Université de Bourgogne (B. Schmitt, V. Maume).

Je présente maintenant des problématiques qui m'intéressent particulièrement, correspondant aux thématiques évoquées ci-dessus.

2.1 Dynamique topologique

Je compte poursuivre l'étude des liens entre les diverses propriétés liées au chaos, afin de mieux comprendre la hiérarchie entre ces différentes propriétés et, à l'inverse, les comportements pouvant « tuer » le chaos.

Des travaux récents ont précisé la place du chaos au sens de Li-Yorke dans la dynamique topologique. Ainsi, un système d'entropie topologique non nulle est chaotique au sens de Li-Yorke [3], de même qu'un système dispersant ou qu'un système transitif ayant un point périodique [14]. Néanmoins, si un système inversible (X,T) est transitif et chaotique au sens de Li-Yorke, on ignore si (X,T^{-1}) l'est également ; des exemples montrent que l'hypothèse de transitivité est nécessaire [15].

Un système (X,T) est dit *Li-Yorke-sensible* s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ et tout voisinage U de x il existe $y \in U$ tel que (x,y) soit une couple de Li-Yorke de module δ (c'est-à-dire $\limsup d(T^n x, T^n y) > \delta$ et $\liminf d(T^n x, T^n y) = 0$). Cette notion a été introduite et étudiée récemment par Akin et Kolyada, qui ont dégagé un certain nombre de propriétés [1]. Il reste plusieurs questions ouvertes, en particulier on ne sait pas si la sensibilité Li-Yorke implique le chaos au sens de Li-Yorke.

Un autre sujet intéressant provient des travaux de Weiss. Si (X,T) est un système inversible, le point $x \in X$ est dit *récurrent* (resp. *positivement récurrent*) si x est valeur d'adhérence de l'ensemble $\{T^n x; x \in \mathbb{Z}\}$ (resp. $\{T^n x; x \in \mathbb{N}\}$). Weiss a montré que si tous les points de $(X \times X, T \times T)$ sont positivement récurrents alors $h_{top}(X,T) = 0$ [25]. Un tel système ne possède pas de couples asymptotiques propres, ainsi le résultat que j'ai montré avec F. Blanchard et B. Host ($h_{top}(X,T) > 0 \Rightarrow$ existence de couples asymptotiques propres, voir paragraphe 1.1) généralise le résultat de Weiss. J'aimerais me pencher sur la question suivante : si tous les points de $(X \times X, T \times T)$ sont récurrents, a-t-on nécessairement $h_{top}(X,T) = 0$? Actuellement, on sait seulement que la conclusion est juste si on suppose que tous les points de $(X \times X \times X, T \times T \times T)$ sont récurrents.

2.2 Dynamique en dimension 1

J'aimerais d'une part affiner mes travaux sur l'existence de mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle, et d'autre part étudier des systèmes dynamiques en dimension 1 sur d'autres espaces (arbres, graphes) ; ce dernier thème s'inscrit tout particulièrement dans les thématiques de l'Université Autonome de Barcelone où je me trouve actuellement.

J'ai montré avec J. Buzzi que si f est une transformation C^1 de l'intervalle satisfaisant $h_{top}(f) > h_{loc}(f) + h_{top}(C,f)$, où $h_{loc}(f)$ désigne l'entropie locale et C l'ensemble des points critiques, alors il existe une mesure d'entropie maximale. Cette inégalité est-elle optimale ? Elle l'est dans le cas des transformations dont l'entropie des points critiques est zéro : on connaît des transformations sans mesure maximale qui vérifient $h_{top}(C,f) = 0$ et $h_{top}(f) = h_{loc}(f)$ [18]. Dans le cas général, J. Buzzi conjecture que la bonne hypothèse est $h_{top}(f) > h_{loc}(f)$. Deux approches sont possibles : étudier le poids de $h_{top}(C,f)$ (on ne connaît pas d'exemple C^1 où cette quantité est non nulle mais on sait que $h_{top}(C, f) = 0$ dans le cas C^∞) ; ou approfondir la relation avec les chaînes de Markov topologiques, pour lesquelles cette conjecture est vraie (voir paragraphe 1.3).

Par ailleurs, je suis curieuse de savoir s'il existe des transformations de l'intervalle transitives ayant plusieurs mesures d'entropie maximale ; de tels exemples seraient nécessairement très irréguliers.

Une n-étoile ($n \geq 2$) est un espace composé de n segments fermés ayant un sommet commun, par exemple $E_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n \in [0,1]\}$; on note 0 son centre. On connaît des bornes inférieures pour l'entropie des transformations transitives $f: E_n \to E_n$: si $f(0) = 0$ alors $h_{top}(f) \geq \log 2/n$ (avec égalité possible) et si $f(0) \neq 0$ alors $h_{top}(f) \geq \log 2/2$ [2]. Dans ce dernier cas, on ne sait pas si la borne est optimale pour $n > 3$; j'aimerais chercher des exemples réalisant l'égalité.

J'ai commencé à réfléchir avec Ll. Alsedà au problème suivant. On considère un cercle sur lequel est greffé un arbre (par exemple $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \cup [1, 2]$). Peut-on définir un nombre de rotation pour les transformations de degré 1 sur cet espace et obtenir des informations sur le type de points périodiques existants ? Nous espérons caractériser entièrement l'ensemble des périodes à l'aide de cette quantité et de la nature de l'arbre.

2.3 Représentation par chaînes de Markov en dimension supérieure

Pour les transformations de l'intervalle, le principal outil pour étudier les mesures d'entropie maximale est la construction d'un diagramme de Markov. J. Buzzi a montré qu'en dimension supérieure on peut également associer une chaîne de Markov topologique à une transformation f, à condition que celle-ci soit $C^{1+\alpha}$ et *entropie-dilatante* (ce qui signifie que l'entropie ne se concentre pas sur des sous-ensembles de dimension inférieure) [7, 8]. Il semble qu'il n'y ait pas d'obstacle pour généraliser à ces systèmes la condition d'existence de mesure d'entropie maximale énoncée au paragraphe 1.4.

Par ailleurs, je pense que pour les transformations f transitives cette représentation par une chaîne de Markov topologique peut servir à montrer la densité des points périodiques. En effet, on sait que pour une chaîne de Markov topologique transitive les points périodiques sont denses. Que deviennent ces points périodiques quand on les transporte via "l'isomorphisme" ? La difficulté vient du fait qu'on doit négliger certains sous-ensembles pour construire cet isomorphisme, mais je pense qu'on conserve suffisamment d'information pour montrer que les points périodiques sont denses pour les tranformations transitives, $C^{1+\alpha}$ et entropie-dilatantes. L'intérêt de cet axe de recherche est essentiellement en dimension supérieure à 2 car la densité des points périodiques pour les systèmes transitifs en dimension 1 est déjà connue.

Je voudrais également expliciter l'hypothèse "entropie-dilatante" pour les transformations triangulaires. J'envisage l'étude de cette classe de systèmes comme une première étape dans la compréhension du problème précédent.

2.4 Chaînes de Markov topologiques, diagrammes de Bratteli

Outre les travaux en cours évoqués à la fin du paragraphe 1.3, je me pose avec J. Buzzi la question suivante : si deux chaînes de Markov topologiques sur un graphe récurrent positif ont la même entropie, sont-elles nécessairement h-conjuguées ? Une *h-conjugaison* entre deux systèmes (X, T) et (Y, S) est une conjugaison mesurable entre $X \setminus M$ et $Y \setminus N$, où M et N sont des sous-ensembles invariants (non nécessairement fermés) pour lesquels le sup des entropies métriques est strictement inférieur à l'entropie de X et Y. En particulier une h-conjugaison induit une bijection entre les mesures ergodiques d'entropie maximale des deux systèmes. C'est ce type de conjugaison qui est construit quand on associe un diagramme de Markov à une transformation de l'intervalle ou une transformation entropie-dilatante. Il est à noter qu'on peut construire plusieurs diagrammes de Markov pour une même transformation en faisant varier le découpage, par exemple en le raffinant. Les différentes chaînes de Markov topologiques obtenues sont alors h-conjuguées, mais de manière indirecte. Plus généralement on peut se demander quelles sont les classes de h-conjugaison pour les chaînes de Markov topologiques, et pour cela chercher à déterminer les propriétés conservées par h-conjugaison.

Enfin, je compte collaborer avec T. Dooley pour étudier certaines propriétés des systèmes de Bratteli-Vershik. Ce sont des odomètres sur des types particuliers de graphes infinis, et ils sont utilisés pour représenter, via une orbite-équivalence, des systèmes dynamiques non singuliers [10]. Nous nous intéressons à l'éventuelle relation entre l'entropie topologique et le comportement du système dynamique mesuré, et nous recherchons un invariant pour l'orbite-équivalence entre systèmes de Bratteli-Vershik ; le taux de croissance des boules pourrait être un candidat pour cet invariant.

Références

[1] E. Akin and S. Kolyada. Li-Yorke sensitivity. Preprint, 2002.

[2] Ll. Alsedà, S. Kolyada, J. Llibre, and Lˇ. Snoha. Entropy and periodic points for transitive maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(4) :1551–1573, 1999.

[3] F. Blanchard, E. Glasner, S. Kolyada, and A. Maass. On Li-Yorke pairs. *J. Reine Angew. Math.*, 547 :51–68, 2002.

[4] F. Blanchard, B. Host, and S. Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 22 :671–686, 2002.

[5] L. S. Block and W. A. Coppel. *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Mathematics, no. 1513. Springer-Verlag, 1992.

[6] J. Buzzi. Intrinsic ergodicity of smooth interval maps. *Israel J. Math.*, 100 :125–161, 1997.

[7] J. Buzzi. Markov extensions for multi-dimensional dynamical systems. *Israel J. Math.*, 112 :357–380, 1999.

[8] J. Buzzi. On entropy-expanding maps. Preprint, 2000.

[9] J. Buzzi and S. Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps. Preprint, 2001.

[10] A. H. Dooley and Toshihiro Hamachi. Nonsingular dynamical systems, Bratteli diagrams and Markov odometers. Preprint, 2002.

[11] B. M. Gurevich and A. S. Zargaryan. A continuous one-dimensional mapping without a measure with maximal entropy (Russian). *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(2) :60–61, 1986. English translation *Functional Anal. Appl.*, 20(2), 134–136, 1986.

[12] B. M. Gurevič. Shift entropy and Markov measures in the path space of a denumerable graph (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 192 :963–965, 1970. English translation *Soviet. Math. Dokl*, 11(3) :744–747, 1970.

[13] F. Hofbauer. On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy. *Israel J. Math.*, **I.** 34(3) :213–237, 1979. **II.** 38(1–2) :107–115, 1981.

[14] W. Huang and X. Ye. Devaney's chaos or 2-scattering implies Li-Yorke's chaos. Preprint.

[15] W. Huang and X. Ye. Homeomorphisms with the whole compacta being scrambled sets. *Ergod. Th. Dynam. Systems*, 21(1) :77–91, 2001.

[16] S. E. Newhouse. Continuity properties of entropy. *Ann. of Math. (2)*, 129(2) :215–235, 1989. Corrections, 131(2) :409–410, 1990.

[17] S. Ruette. *Chaos for continuous interval maps : a survey of relationship between the various sorts of chaos.* Preliminary version, 123 pages.

[18] S. Ruette. Mixing C^r maps of the interval without maximal measure. *Israel J. Math*, 127 :253–277, 2002.

[19] S. Ruette. Note on transient graphs. Manuscript, 2002.

[20] S. Ruette. Transitive, sensitive subsystems for interval maps. Preprint, 2002.

[21] S. Ruette. C^n interval maps not Borel conjugate to any C^∞ map. *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[22] S. Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for topological Markov chains. *Pacific J. Math.*, to appear.

[23] I. A. Salama. On the recurrence of countable topological Markov chains. In *Symbolic dynamics and its applications (New Haven, CT, 1991)*, Contemp. Math, 135, pages 349–360. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[24] Ľ. Snoha. Dense chaos. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 33(4) :747–752, 1992.

[25] B. Weiss. Multiple recurrence and doubly minimal systems. In *Topological dynamics and applications (proceedings of a conference in honor of R. Ellis, Univ. of Minnesota)*, Contemporary Mathematics, 215, pages 189–196. Amer. Math. Soc., 1998.