Tout d'abord je me présente.

Je m'appelle Sylvie Ruette. Je suis actuellement post-doctorante à l'Université Autonome de Barcelone. J'ai fait ma thèse à l'Institut de Mathématiques de Luminy, à Marseille, sous la direction de François Blanchard, et je l'ai soutenue novembre 2001.

Durant ma thèse, j'ai été monitrice pendant 3 ans, ce qui m'a donné l'occasion d'enseigner en DEUG lors de Travaux Dirigés.

Système dynamique topologique

Mon domaine de recherche est la dynamique topologique en temps discret. Un système dynamique topologique est la donnée d'une transformation continue $f\colon X \to X$, où X est un espace métrique compact.

L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation f. Si on part du point x au temps 0, la nouvelle position au temps 1 est donnée par $f(x)$, au temps 2 on est en $f(f(x))$, etc.

On note f^n f composée n fois.

On cherche à étudier le comportement du système quand le temps n tend vers l'infini.

Thèmes de recherche

Pendant ma thèse, mes travaux ont porté essentiellement

– d'une part sur le chaos en dynamique topologique,

– d'autre part sur les mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle.

Je m'intéresse actuellement aux transformations de graphe topologique et à la généralisation des nombres de rotation à ces systèmes.

Je vais maintenant présenter ces différentes thématiques.

Couples asymptotiques et entropie

On considère un système dynamique topologique donné par la transformation f sur un espace métrique compact.

On dit que les 2 points x, y forment un couple asymptotique si la distance entre $f^n(x)$ et $f^n(y)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le couple est propre si $x \neq y$.

J'ai montré avec François Blanchard et Bernard Host que si l'entropie topologique du système est non nulle alors il existe des couples asymptotiques propres. Ce résultat a un côté paradoxal car les couples asymptotiques sont des couples non chaotiques alors que l'entropie est une façon de mesurer la complexité du système.

Plus précisément nous avons montré le résultat suivant. Si l'entropie topologique du système est non nulle, alors par le principe variationnel il existe une mesure ergodique d'entropie non nulle. Et pour cette mesure presque tout point appartient à un couple asymptotique propre.

De plus, si f est inversible, la plupart des couples asymptotiques pour f sont des couples de Li-Yorke pour f^{-1}, autrement dit les couples stables dans le futur sont instables dans le passé. Ce résultat rappelle les variétés stables et instables des Anosov, bien qu'ici on n'ait pas de structure différentiable.

Mesures d'entropie maximale

Je vais maintenant parler de mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle.

Une transformation de l'intervalle est une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Une mesure d'entropie maximale est une mesure invariante μ dont l'entropie réalise le sup des entropies métriques.

Il n'existe pas toujours de mesures d'entropie maximale. On cherche donc à savoir dans quels cas il en existe une.

Pour cela, on va construire une chaîne de Markov topologique qui reflète l'essentiel de la dynamique de f.

Une chaîne de Markov topologique, c'est l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté.

Construction d'un diagramme de Markov

Je vais maintenant illustrer sur un exemple comment associer une chaîne de Markov topologique à une transformation de l'intervalle.

(explication du dessin)

Résultats sur les mesures d'entropie maximale

On connaît des conditions d'existence – ou de non existence – de mesures d'entropie maximale pour les chaînes de Markov topologiques. A l'aide de cette représentation, on peut en déduire des résultats pour les transformations de l'intervalle.

Jérôme Buzzi a montré qu'une transformation C^∞ de l'intervalle a au moins une mesure d'entropie maximale, et si la transformation est transitive alors cette mesure est unique.

J'ai cherché à savoir s'il était possible d'affaiblir l'hypothèse de régularité. En fait on ne peut pas. J'ai construit des transformations transitives de l'intervalle qui sont C^n, pour n fini aussi grand qu'on veut, mais qui n'ont pas de mesure d'entropie maximale.

Néanmoins la régularité permet de donner une condition suffisante d'existence. Si f est C^n et satisfait cette inégalité alors il existe une mesure d'entropie maximale, qui est unique dans le cas transitif.

Il est à noter que plus f est régulière plus cette quantité à droite est petite. On retrouve notamment le cas C^∞.

La preuve de ce théorème combine de nouveaux résultats sur les chaînes de Markov topologiques et des propriétés liées à la dérivabilité.

Nombres de rotation pour les transformations de graphe

Actuellement je travaille sur les transformations de graphes topologiques. Un graphe topologique est composé de cercles et de segments collés ensembles, comme ici.

Je m'intéresse aux graphes avec une seule boucle et aux transformations de degré 1 sur ces graphes. On peut définir des nombres de rotation comme pour les applications du cercle de degré 1.

L'ensemble de tous les nombres de rotation n'a pas de très bonnes propriétés, par contre le sous-ensemble des nombres de rotation des points appartenant à la boucle a des propriétés ressemblant à l'intervalle de rotation pour un cercle, bien qu'un peu plus faibles.

Je note R cet ensemble.

Tout d'abord c'est un intervalle compact.

Ensuite, si p/q est un rationnel dans R alors il existe un point périodique dont le nombre de rotation est p/q. Si de plus p/q est à l'intérieur de R, c'est-à-dire pas à une des extrémités, alors on a des résultats plus précis sur l'ensemble des périodes des points périodiques de nombre de rotation p/q.

Enfin, l'intervalle R, qui a priori est un sous-ensemble des nombres de rotation, est égal à l'ensemble tout entier sous certaines conditions, notamment si f est transitive.

Ces travaux sont encore en cours, notamment pour étudier ce qui se passe en dehors de R quand cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite.